

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Y. COLIN DE VERDIÈRE

## **Ergodicité et fonctions propres du laplacien**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1984-1985), exp. n° 13,  
p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1984-1985\\_\\_\\_A13\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985___A13_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
CENTRE DE MATHÉMATIQUES  
91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

---

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°  
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   B O N Y - S J Ö S T R A N D - M E Y E R   1 9 8 4 - 1 9 8 5

ERGODICITE ET FONCTIONS PROPRES DU LAPLACIEN

par Y. COLIN DE VERDIERE



Soient  $M$  une variété riemannienne compacte,  $\Delta$  le laplacien de  $M$ ,  $(\varphi_k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) une base orthonormée de  $L^2(X)$  formée de fonctions propres associées à la suite croissante de valeurs propres  $\lambda_k$ . Si  $A$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, on s'intéresse au comportement asymptotique quand  $k \rightarrow +\infty$  de la suite  $\langle A\varphi_k | \varphi_k \rangle$  où  $\langle | \rangle$  est le produit  $L^2$ . Plus précisément, si  $a$  est le symbole principal de  $A$ ,  $S^*M$  le fibré des vecteurs cotangents unitaires et  $d\omega$  la mesure de Liouville normalisée par  $\int d\omega = 1$  sur  $S^*M$ , à quelles conditions a-t-on

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \langle A\varphi_k | \varphi_k \rangle = \int_{S^*M} a d\omega \quad ?$$

La réponse n'est pas toujours oui comme on peut le voir par examen du cas de la sphère  $S^2$  munie de la métrique usuelle : si  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  est le champ de vecteurs des rotations infinitésimales autour d'un axe, il existe une base orthonormée  $Y_{\ell, m}$  de  $L^2(X)$  (harmoniques sphériques) telle que :

$$\begin{cases} \Delta Y_{\ell, m} = \ell(\ell+1)Y_{\ell, m} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{\ell, m} = im Y_{\ell, m} \end{cases}$$

avec  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ , et  $-\ell \leq m \leq \ell$ .

Considérons la sous-suite  $Y_{\ell, \ell} = c(x+iy)^\ell \Big|_{S^2}$ , alors les  $Y_{\ell, \ell}$  se concentrent quand  $\ell \rightarrow \infty$  sur l'équateur de  $S^2$  au sens que, si  $\varepsilon > 0$  est donné et si  $B_\varepsilon$  est le voisinage tubulaire d'épaisseur  $\varepsilon$  de l'équateur, on a :

$$\int_{S^2 \setminus B_\varepsilon} |Y_{\ell, \ell}|^2 = o(e^{-c(\varepsilon)\ell}) .$$

De plus, si nous définissons la densité  $D(S)$  d'une partie  $S$  du spectre par :

$$D(S) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\#\{\lambda_k \in S \mid \lambda_k \leq \lambda\}}{\#\{\lambda_k \leq \lambda\}} ,$$

on peut pour un procédé analogue construire une suite de densité  $> 0$  qui se concentre dans un voisinage tubulaire fixé de l'équateur.

Ce qui joue un rôle dans cet exemple est l'existence de régions de  $S^*M$  invariantes pour le flot géodésique et de mesure  $> 0$  dans lesquelles une suite de fonctions propres peut se concentrer au sens que nous avons étudié dans [CV1] : à une suite de fonctions propres (ou même de quasi-fonctions propres) est associé dans cet article son microsupport, qui est un fermé de  $S^*M$ , invariant par le flot géodésique, tel que, si  $A$  est un OPD tel que  $WF(A)$  ne rencontre pas le microsupport de la suite  $\varphi_{k_i}$ , alors, pour tout  $s$ ,  $\|A\varphi_{k_i}\|_{H^s(M)}$  est une suite à décroissance rapide. Dans l'exemple précédent, la projection sur  $M$  du microsupport de la suite  $(Y_{\ell,\ell})$  est l'équateur de  $S^2$ . On a le résultat général  $D(S) \leq \text{vol}(\text{Microsupport}(S))$ , où le volume est calculé avec la probabilité de Liouville.

Le résultat énoncé vers 1974 par A. Schnirelman est tout à fait remarquable :

Théorème : Si le flot géodésique sur  $M$  est ergodique, il existe une sous-suite  $(\lambda_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$  de densité 1 du spectre du laplacien telle que, pour tout opérateur pseudo-différentiel  $A$  d'ordre 0 et de symbole principal  $a$ , on ait :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \langle A\varphi_{k_i} | \varphi_{k_i} \rangle = \int_{S^*M} a d\omega .$$

En fait la démonstration de Schnirelman est incomplète, et ce n'est que récemment que S. Zelditch a donné une démonstration plus complète dans le cas des variétés à courbure constante négative en s'appuyant sur un calcul pseudo-différentiel adapté à la géométrie hyperbolique. Les articles de Zelditch contiennent en fait suffisamment d'éléments pour construire une démonstration complète, et en fait simple du théorème précédent.

C'est un problème ouvert, à ma connaissance de savoir si on peut éviter d'avoir à extraire une sous-suite de densité 1. On peut aussi noter un corollaire simple du théorème :

Corollaire : Soit  $D \subset M$  un ouvert régulier, alors :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_D |\varphi_{k_i}|^2 = \frac{\text{vol}(D)}{\text{vol}(M)} .$$

Il est aussi peut-être nécessaire de rappeler la définition de l'ergodicité :

Déf.: Le flot géodésique  $(G_t)_{t \in \mathbb{R}}$  est dit ergodique si, pour toute fonction continue  $f$  sur  $S^*M$ , on a, pour presque tout  $x \in S^*M$ ,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(G_t(x)) dt = \int_{S^*M} f.d\omega .$$

[en fait on peut prendre le presque partout indépendamment du choix de  $f$ ]

Cette définition montre à l'évidence que le théorème précédent est un bon analogue quantique de l'ergodicité d'un système hamiltonien classique.

Nous décrivons maintenant les éléments de la preuve du théorème.

### 1. 1. LA QUANTIFICATION DE FRIEDRICHS.

Il est bien connu que l'OPD associé à un symbole  $\geq 0$  n'est pas nécessairement un opérateur  $\geq 0$  : par exemple si  $a(x, \xi) = a(x)\xi^2$  avec  $a \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $a \geq 0$ , l'OPD associé à  $a$  par la quantification usuelle est

$$A = -a(x) \frac{d^2}{dx^2} \text{ qui n'est pas } \geq 0 \text{ sur } L^2(\mathbb{R}) : \text{ si } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ vérifie}$$

$$\varphi'' = \varphi \text{ sur le support de } a, \text{ on a : } (A\varphi|\varphi) = - \int_{\mathbb{R}} a\varphi^2 < 0. \text{ Au contraire}$$

l'opérateur  $-\frac{d}{dx} (a \frac{d}{dx})$  est  $\geq 0$ .

Il existe une généralisation de cette remarque, due à Friedrichs (voir [T] p.142 thm 2.2) :

Théorème : Il existe une application linéaire  $a \mapsto \text{Op}^F(a)$  qui, à un symbole classique de degré 0, associe un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, de symbole principal  $a$  et tel que :

$$a \geq 0 \implies \text{Op}^F(a) \geq 0 \text{ sur } L^2(M).$$

De plus  $\text{Op}(a) - \text{Op}^F(a)$  est d'ordre  $-1$ .

La démonstration utilise les OPD  $b(D, x, D)$  associés à un symbole  $b(\xi_1, x, \xi_2)$  et une construction à partir de  $a(x, \xi)$  d'un symbole double :

$$b(\xi_1, x, \xi_2) = \int F(\xi_2, \zeta) a(x, \zeta) F(\xi_1, \zeta) d\zeta ,$$

$$\text{où } F(\xi, \zeta) = (1 + |\xi|^2)^{-n/8} q((1 + |\xi|^2)^{-1/4} (\xi - \zeta))$$

et  $q \in C_0^\infty(|\xi| \leq 1)$  avec  $\|q\|_{L^2} = 1$ .

Une fois la construction faite dans  $\mathbb{R}^n$ , il n'est pas difficile par partition de l'unité de l'étendre à toute variété compacte :  
 si  $A_i \geq 0$ ,  $\sum \varphi_i A_i \varphi_i \geq 0$  et on choisit une partition telle que  $\sum \varphi_i^2 = 1$   
 (il faut choisir des cartes isochores, i.e. telles que la forme volume de  $M$  soit transformée en la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^n$ ).

## 2. REPRESENTATION INTEGRALE.

Considérons maintenant pour  $a \in C^\infty(S^*M)$  (qu'on étend par homogénéité de degré 0 à  $T^*M \setminus 0$ ), la correspondance qui, à  $a$ , associe  $\mu_k(a) = \langle Op^F(a) \varphi_k | \varphi_k \rangle$ . Il est clair que  $\mu_k$  est une distribution  $\geq 0$ , donc d'après L. Schwartz, une mesure de Radon (de masse 1) sur  $S^*M$ . Cette mesure représente lorsque  $k \rightarrow \infty$  la localisation de  $\varphi_k$  dans  $S^*M$  (au sens de la norme  $L^2$  microlocalisée).

## 3. LE THEOREME D'EGOROV.

On a le :

Théorème : Pour tout  $a \in C^\infty(S^*M)$ , et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{S^*M} (a - a \circ G_t) d\mu_k = 0, \text{ où } G_t \text{ est le flot géodésique :}$$

$\mu_k \circ G_t^*$  converge vaguement vers 0 quand  $k \rightarrow \infty$  [t fixé]

Preuve : Soit  $A_t = e^{-it\sqrt{\Delta}} A e^{it\sqrt{\Delta}}$  où  $A = Op^F(a)$ , on a :

$\langle A_t \varphi_k | \varphi_k \rangle = \langle A \varphi_k | \varphi_k \rangle = \int a d\mu_k$  ; d'autre part, si  $a_t$  est le symbole principal de  $A_t$ ,  $A_t - Op^F(a_t)$  est d'ordre  $-1$ , donc :  
 $\langle A_t \varphi_k | \varphi_k \rangle = \int a_t d\mu_k + O(\lambda_k^{-1/2})$  ; on applique alors le théorème d'Egorov qui affirme que  $a_t = a \circ G_t$ .

## 4. CONVERGENCE EN MOYENNE.

Soit toujours  $A = Op^F(a)$  avec  $a \geq 0$ , on a :

$$\text{Tr}(Ae^{-t\Delta}) = \sum_k e^{-t\lambda_k} \langle A \varphi_k | \varphi_k \rangle,$$

et par les méthodes de calcul symbolique classique, on a :

$$\text{Tr}(Ae^{-t\Delta}) / \text{Tr}(e^{-t\Delta}) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \int a d\omega,$$

donc, comme  $A \geq 0$ , par le théorème taubérien de Karamata :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{N\lambda} \cdot \sum_{\lambda_k \leq \lambda} \int a d\mu_k = \int a d\omega, \text{ avec } N_\lambda = \#\{\lambda_k \leq \lambda\}.$$

On a ainsi une convergence vague, en moyenne, de  $\mu_k$  vers  $\omega$ . Jusque là on n'a pas utilisé l'ergodicité.

### 5. OU L'ERGODICITE EST UTILISEE.

On pose, pour  $a \in C^\infty(S^*M)$  avec  $\|a\|_{L^\infty} = 1$

$$a_{T_0}(z) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} a(G_t(z)) dt, \quad \bar{a} = \int a d\omega \quad \text{et} \quad \hat{a}_{T_0}(z) = a_{T_0}(z) - \bar{a}. \quad \text{On se donne un}$$

$\varepsilon > 0$ . L'ergodicité implique, pour presque tout  $z \in S^*M$ ,  $\lim_{T_0 \rightarrow +\infty} \hat{a}_{T_0}(z) = 0$

et comme  $\|\hat{a}_{T_0}\|_{L^\infty} \leq 2$ , on a, d'après Lebesgue, l'existence d'un  $T_0 > 0$  tel

que  $\int |\hat{a}_{T_0}| d\omega \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Comme  $\bar{\mu}_\lambda = \frac{1}{N\lambda} \sum_{\lambda_k \leq \lambda} \mu_k$  converge vaguement vers  $d\omega$ , on a :

$$(1) \quad \exists T_0, \exists \lambda_0, \forall \lambda \geq \lambda_0, \int |\hat{a}_{T_0}| d\bar{\mu}_\lambda \leq \varepsilon.$$

D'après l'inégalité de Chebychev, on a alors :

$$(2) \quad \frac{1}{N\lambda} \#\{\lambda_k \leq \lambda \mid \int |\hat{a}_{T_0}| d\mu_k \geq \sqrt{\varepsilon}\} \leq \sqrt{\varepsilon}, \text{ pour } \lambda \geq \lambda_0.$$

Soit alors :

$$B_\varepsilon = \{\lambda_k \mid \int |\hat{a}_{T_0}| d\mu_k \leq \sqrt{\varepsilon}\}, \text{ on a } D(B_\varepsilon) \geq 1 - \sqrt{\varepsilon};$$

$$\text{Soit } C_\varepsilon = \{\lambda_k \mid |\int [a(z) - \bar{a}] d\mu_k| \leq 2\sqrt{\varepsilon}\} \text{ et}$$

$$D_\varepsilon = \{\lambda_k \mid |\int (a_{T_0} - a) d\mu_k| \leq \sqrt{\varepsilon}\}, \text{ qui est de densité 1 d'après le §3. On}$$

a évidemment  $C_\varepsilon \supset B_\varepsilon \cap D_\varepsilon$ , on en déduit  $D(C_\varepsilon) \geq 1 - \sqrt{\varepsilon}$ .

Soit maintenant  $A_n = \{\lambda_k \mid |c_k| \leq \frac{2}{n}\}$ ,  $c_k = \langle A\varphi_k | \varphi_k \rangle - \int a d\omega$ , on a  $D(A_n) \geq 1 - \frac{1}{n}$

On en déduit, par un lemme facile, l'existence d'un ensemble  $A_\infty$  de densité

tel que  $\lim_{k \rightarrow \infty, \lambda_k \in A_\infty} c_k = 0$  (procédé diagonal).

Il reste à voir qu'on peut choisir l'ensemble  $A_\infty$  indépendamment de la fonction  $a$ .

Soit  $\phi_\ell$  une base orthonormée de fonctions propres du laplacien sur  $S^*M$ , et soit  $\mathcal{A}_\ell \subset \{\lambda_k\}$  de densité 1, tel que :

$$\lim_{\lambda_k \rightarrow \infty, \lambda_k \in \mathcal{A}_\ell} \int \phi_\ell d\mu_k = \int \phi_\ell d\omega.$$

On peut évidemment supposer que,  $\forall \ell$ ,  $\mathcal{A}_{\ell+1} \subset \mathcal{A}_\ell$ . Soit alors

$$a_1 \text{ tel que, } \forall \lambda \geq a_1, \frac{1}{N_\lambda} \# \{ \lambda_k \in \mathcal{A}_1 \mid \lambda_k \leq \lambda \} \geq 1 - \frac{1}{2}, \dots,$$

$$a_\ell \text{ tel que, } \forall \lambda \geq a_\ell, \frac{1}{N_\lambda} \# \{ \lambda_k \in \mathcal{A}_\ell \mid \lambda_k \leq \lambda \} \geq 1 - \frac{1}{2^\ell},$$

on construit  $\mathcal{A}_\infty$  tel que  $\mathcal{A}_\infty \cap [a_\ell, a_{\ell+1}[ = \mathcal{A}_\ell \cap [a_\ell, a_{\ell+1}[$  et

donc  $\mathcal{A}_\infty \upharpoonright_{[0, a_{\ell+1}[} = \mathcal{A}_\ell \upharpoonright_{[0, a_{\ell+1}[}$ , on voit que  $D(\mathcal{A}_\infty) = 1$ .

Les  $\mu_k$  sont donc une suite de mesure  $\mathcal{A}$  de probabilité qui, lorsque,  $\lambda_k \rightarrow \infty$  avec  $\lambda_k \in \mathcal{A}_\infty$  convergent vaguement sur un ensemble dense de  $C(S^*M)$ , donc on a la convergence vague des  $\mu_k(\lambda_k \in \mathcal{A}_\infty)$  vers la mesure de Liouville.

## 6. GENERALISATIONS ET PROBLEMES.

Il serait intéressant de généraliser aux problèmes à bord avec un billard ergodique, à l'asymptotique semi-classique ( $\hbar \rightarrow 0$ ) et au cas des surfaces non compactes d'aire finie.

Le problème le plus intéressant est de savoir si on peut s'affranchir de la condition d'extraire une sous-suite de densité 1 : quelles sont les valeurs d'adhérences de la suite des  $\mu_k$  pour la convergence vague ? Ces mesures sont nécessairement invariantes par le flot géodésique, mais il y a une foule de telles mesures singulières : par exemple si  $\gamma$  est une géodésique périodique,  $\mu_\gamma(f) = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma f \cdot ds$  est une telle mesure.

Il me semble que ces mesures pour des géodésiques fermées des surfaces de Riemann à courbure  $-1$  ne peuvent pas être des limites vagues d'une suite  $\mu_k$ . De toutes les façons il y a d'autres mesures portées pour des ensembles de dimension de Hausdorff  $> 1$ , [cf. travaux de Patterson, Sullivan].

## BIBLIOGRAPHIE :

- [CV 1] Y. Colin de Verdière, Ouasi-modes sur les variétés riemanniennes. Inventiones Math. 43, pp 15-52, 1977.
- [CV 2] Y. Colin de Verdière, Spectre conjoint d'opérateurs qui commutent I : le cas non intégrable. Duke Math. J. 46, 169-182, 1978.
- [S] A. Schnirelman, Ergodic properties of eigenfunctions. Usp. Math. Nauk 29, 181-182, 1974.

- [T] M. Taylor, Pseudo-differential Operators. Princeton University Press (1981)
- [Z] S. Zelditch, Eigenfunctions on Compact Riemann-Surfaces of  $g \geq 2$ . Preprint 1984 (New-York).

\*  
\*  
\*