Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

J. Duchon
R. Robert

Sur quelques problèmes à frontière libre analytique dans le plan

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1984-1985), exp. n° 10, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985____A10_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E   B O N Y - S J Ö S T R A N D - M E Y E R   1 9 8 4 - 1 9 8 5

SUR QUELQUES PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE ANALYTIQUE DANS LE PLAN

par J. DUCHON et R. ROBERT

Exposé n°X

29 Janvier 1985

INTRODUCTION

Il est bien connu que certains problèmes à frontière libre de la mécanique des fluides sont mal posés dans tout espace de fonctions de régularité finie ou même C^∞ . Citons par exemple l'instabilité de Kelvin-Helmholtz [16] ou de Rayleigh-Taylor [18] . On a recours pour traiter ces problèmes aux techniques "à la Ovsjannikov" utilisant des échelles de fonctions analytiques et une version abstraite du théorème de Cauchy-Kowalewski [1] , [11] , [9] , [10] , [15] . Mis à part le cas des ondes de surface pour lequel on peut se ramener à un domaine fixe au moyen des variables de Lagrange [8], [11] , [12] , [13] , [3], lorqu'il y a glissement de part et d'autre de l'interface, on est amené à estimer, dans une échelle de fonctions analytiques adaptée, les noyaux du potentiel associés à l'interface en mouvement [16] ,[18] . Dans certains cas interviennent des inverses d'opérateurs ; les estimations que nous utilisons mettent en évidence le caractère régularisant des noyaux du potentiel et ramènent l'estimation des inverses à une opération simple dans L^2 . Après avoir décrit deux exemples, le premier l'interface de deux liquides en milieu poreux, le second l'instabilité de Rayleigh-Taylor, nous donnons un résultat d'existence raisonnablement général pour de tels problèmes où on a un écoulement irrotationnel et incompressible de part et d'autre de l'interface.

Précisons quelques notations :

Nous noterons indifféremment Df , f_x , $\partial_x f$,...la dérivée d'une fonction f par rapport à x .

$H^m = H^m(\mathbb{R})$ désigne l'espace de Sobolev des $f \in L^2$ telles que $D^k f \in L^2$, $k = 0,1...m$. On notera $|\ |_m$ une norme convenable sur H^m , c'est-à-dire vérifiant :

$$|fg|_m \leq |f|_m |g|_m \text{ , pour } m \geq 1 \text{ ,}$$
$$|f|_{m-1} \leq |f|_m \text{ ,}$$
$$|f|_0 = |f|_{L^2}$$

$|f|_\infty$ désigne la norme de f dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

Λ^s est l'opérateur défini par transformation de Fourier : $\widehat{\Lambda^s u}(\xi)=|2\pi\xi|^s\hat{u}(\xi)$.
Si T est un opérateur continu sur L^2, on note $\|T\|_{op}$ sa norme. On note $V^{1/2}=V^{1/2}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions u localement intégrables telles que $\frac{u(y)-u(x)}{y-x}\in L^2(dxdy)$; on vérifie facilement que c'est l'espace des distributions tempérées u telles que $\widehat{Du}$ est localement intégrable et $\int|2\pi\xi|^{-1}|\widehat{Du}|^2d\xi<+\infty$. On définit alors $\Lambda^{1/2}u$ par $\widehat{\Lambda^{1/2}u}=-i\,\mathrm{sgn}\xi|2\pi\xi|^{-1/2}\widehat{Du}$.
On désignera par c différentes constantes et par $C(.,..)$ une dépendance croissante de la constante par rapport à divers arguments.

§ 1. DEUX EXEMPLES.

Les deux exemples que nous allons examiner se situent dans le cadre suivant où deux écoulements incompressibles et irrotationnels sont séparés par une interface Γ_t.
On supposera Γ_t déterminée par l'équation $y=u(t,x)$ dans le plan de coordonnées (x,y), on notera :

$$\Omega_t^+=\{(x,y)\mid y>u(t,x)\},$$

$$\Omega_t^-=\{(x,y)\mid y<u(t,x)\},$$

τ le vecteur unitaire tangent à Γ_t dirigé dans le sens des x croissants, ν le vecteur normal qui s'en déduit par une rotation de $\pi/2$, $n=-\nu$.
$V^+(t,x,y)$ désigne le champ des vitesses dans Ω_t^+ (resp. V^- dans Ω_t^-), et $\phi^+(t,x,y)$, $\phi^-(t,x,y)$ les potentiels respectifs de V^+ et V^-.
On posera également $\varphi^{\pm}(t,x)=\phi^{\pm}(t,x,u(t,x))$.
Pour que Γ_t soit véritablement une interface, on doit vérifier la condition cinématique :

$$V^+.\nu=V^-.\nu=\frac{u_t}{\sqrt{1+u_x^2}}, \text{ en tout point de } \Gamma_t,$$

ce qui donne l'équation :

$$u_t=\sqrt{1+u_x^2}\,\frac{\partial\phi^-}{\partial\nu}. \tag{1}$$

On exprime l'opérateur $\sqrt{1+u_x^2}\,\frac{\partial}{\partial\nu}$ à l'aide des noyaux du potentiel associés à Γ_t (on omettra provisoirement la dépendance en t).

$$\sqrt{1+u_x^2}\,\frac{\partial\phi^-}{\partial\nu}=\left(-\frac{1}{2}-Y\right)\left(\frac{1}{2}H+X\right)^{-1}\varphi_x^-, \tag{2}$$

où H est la transformation de Hilbert, $Hf(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(y)}{x-y}\,dy$, et X,Y sont les parties réelle et imaginaire de l'opérateur Z défini par le noyau

$$Z(x,y) = \frac{i}{2\pi} \frac{\partial_x p}{1+ip} \ , \ p(x,y) = \frac{u(y)-u(x)}{y-x} \ .$$

Indiquons rapidement comment s'obtient cette expression. En supposant que u est lipschitzienne, si g est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$, on définit le potentiel de simple couche de densité g sur Γ , par :

$$\mathcal{S}g(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{Log}\left(\frac{(x-x')^2+(y-u(x'))^2}{(x_o-x')^2+(y_o-u(x'))^2}\right) g(x') \sqrt{1+u_x^2(x')}\,dx' \ ,$$

où (x_o,y_o) est choisi arbitrairement. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, harmonique sur le complémentaire de Γ . On note : $\mathcal{S}g(x) = Sg(x,u(x))$.
On sait (cf[14]) que la dérivée normale $\frac{\partial}{\partial \nu}\mathcal{S}g$, obtenue par passage à la limite dans Ω^-, existe presque partout et vaut :

$$\frac{\partial \mathcal{S}g}{\partial \nu} = -\frac{1}{2}\, g - \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}\, Y(g\sqrt{1+u_x^2}) \ ,$$

de même dans Ω^+ , on a :

$$\frac{\partial \mathcal{S}g}{\partial n} = -\frac{1}{2}\, g + \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}\, Y(g\sqrt{1+u_x^2}) \ .$$

Par ailleurs, un rapide calcul montre que :

$$\frac{d}{dx}\, Sg = (\frac{1}{2}\, H+X)\ (g\sqrt{1+u_x^2}).$$

On montre alors (cf[6]) que si $u_x \in V^{1/2}(\mathbb{R})$ X est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur L^2 et $\frac{1}{2}\, H+X$ est inversible par l'alternative de Fredholm. Et comme (cf[6]) pour toute fonction f telle que $\frac{df}{dx} \in L^2(\mathbb{R})$, l'unique solution du problème de Dirichlet $\Delta\phi = 0$ dans Ω^- , $\phi(x,u(x)) = f(x)$, telle que la fonction maximale $(\nabla\phi)_*$ soit dans L^2 , est donnée, à une constante additive près, par $\phi = \mathcal{S}(\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}(\frac{1}{2}\, H+X)^{-1} \frac{df}{dx})$, il vient finalement :

$$\sqrt{1+u_x^2}\,\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = (-\frac{1}{2} - Y)\ (\frac{1}{2}\, H+X)^{-1}\, \frac{df}{dx} \ .$$

Nous allons maintenant passer aux exemples en spécifiant la <u>condition dynamique</u> qui détermine l'évolution du système.

<u>Exemple 1</u>. Evolution de l'interface de deux fluides incompressibles en milieu poreux (cf[5]). Ici l'évolution du système est donnée par la <u>loi de Darcy</u> :

$$kV = - \nabla\tilde{p} + \rho\vec{g} \ ,$$

où V est le champ des vitesses, $\tilde{p}$ la pression, $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur, ρ la densité et k la viscosité dynamique du fluide.
Comme on a deux fluides distincts, k et ρ sont des fonctions qui prennent les valeurs constantes k^+, ρ^+ sur Ω_t^+ et k^-, ρ^- sur Ω_t^- ; et la loi de Darcy est à prendre au sens des distributions sur $\mathbb{R}^2$.
La condition dynamique sur Γ_t s'obtient en écrivant que $\mathrm{rot}(kV-\rho\vec{g}) = 0$, soit :

$$(k^-V^- - \rho^-\vec{g}).\tau = (k^+V^+ - \rho^+\vec{g}).\tau \ ,$$

et comme $V^{\pm}.\tau = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}\,\varphi_x^{\pm}$, en posant $\lambda = \frac{k^-}{k^++k^-}$, il vient :

(3) $$\lambda\varphi_x^- -(1-\lambda)\varphi_x^+ = - c\, u_x \ , \text{ avec } c = - \frac{\rho^- -\rho^+}{k^- +k^+}\, g \ .$$

Notons $\theta = \lambda\varphi_x^- - (1-\lambda)\varphi_x^+$, et exprimons maintenant $\varphi_x^{\pm}$ en fonction de θ .
En remarquant que les noyaux X et Y ne dépendent en fait que de u_x , on notera :

$$N_-(ux) = (-\frac{1}{2} -Y)(\frac{1}{2} H + X)^{-1} \ ,$$
$$N_+(ux) = (-\frac{1}{2} + Y)(\frac{1}{2} H+X)^{-1} \ .$$

En utilisant la relation $N_-(ux).\varphi_x^- = - N_+(ux).\varphi_x^+$ et les formules de Poincaré-Bertrand ci-dessous :

$$(\frac{1}{2} H+X)Y = - Y(\frac{1}{2} H+X) ,$$
$$(\frac{1}{2} H+X)^2 = (\frac{1}{2} -Y)(-\frac{1}{2} - Y) ,$$

on obtient les formules :

(4) $$\begin{cases} \varphi_x^- = (\frac{1}{2} +Y)\ (\frac{1}{2} + \alpha Y)^{-1}\theta \ , \\ \varphi_x^+ = (-\frac{1}{2} +Y)(\frac{1}{2} +\alpha Y)^{-1}\theta \ , \text{ où } \alpha = \frac{k^- -k^+}{k^- +k^+} \ . \end{cases}$$

En utilisant (3), l'équation cinématique (1) donne l'équation d'évolution :

$$\text{(E1)} \qquad \begin{cases} u_t = (\frac{1}{2} H+X)(\frac{1}{2} + \alpha Y)^{-1}(-cu_x) , \\ u(0) = u_o . \end{cases}$$

La forme de cette équation appelle quelques remarques, la première a pour objet l'inversibilité de l'opérateur $\frac{1}{2} + \alpha Y$.

Remarque 1. Pour tout $\zeta \notin \{x \in \mathbb{R} : |x|>1\}$, l'opérateur $\frac{1}{2} + \zeta Y$ est inversible sur L^2 . En effet, Y est un opérateur compact sur L^2 , déterminons son spectre : soit $\mu \neq 0$ et $f \neq 0$ tels que $Yf = \mu f$. Remarquons qu'on a $Z = D\tilde{Z}$ où $\tilde{Z}$ est l'opérateur continu sur L^2 défini par le noyau $\frac{1}{2\pi} \mathrm{Log}(1+ip)$; il s'ensuit que $f \in DL^2$ et qu'il existe une fonction unique g dans H^1 telle que $f = (\frac{1}{2} H+X)^{-1}Dg$.
On a alors :

$$(-\frac{1}{2} - Y)f = (-\frac{1}{2} - Y)(\frac{1}{2} H+X)^{-1}Dg = \sqrt{1+u_x^2}\,\frac{\partial g}{\partial \nu} \quad .$$

Effectuons le produit scalaire par g , il vient :

$$\int_\Gamma \frac{\partial g}{\partial \nu} g \, d\sigma = -(\frac{1}{2} +\mu) < f,g > = +(\frac{1}{2} +\mu)\int_\Gamma (\frac{\partial g}{\partial \nu} + \frac{\partial g}{\partial n}) g \, d\sigma \quad ,$$

en remarquant que $\sqrt{1+u_x^2}(\frac{\partial}{\partial \nu} + \frac{\partial}{\partial n}) = -(\frac{1}{2} H+X)^{-1}D$.

Les deux intégrales étant strictement positives grâce à la formule de Green, il s'ensuit que $\frac{1}{2} + \mu$ est un réel > 0 . En considérant l'opérateur $-\frac{1}{2} + Y$ on obtient que $\frac{1}{2} -\mu$ est un réel > 0 , et donc que le spectre de Y est contenu dans l'intervalle $]-1/2 , 1/2[$.

Remarque 2. Si on linéarise l'équation (E1) au voisinage de $u = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} u_t = - c\Lambda u , \\ u(0) = u_o , \end{cases}$$

où $\Lambda = HD$.
On voit que si $c > 0$ le problème de Cauchy est bien posé par exemple pour u_o dans L^2 . Par contre pour $c < 0$ (cas où le liquide le plus lourd est situé

au départ dans Ω^+) le problème est mal posé dans tout espace de fonctions de régularité finie et même C^∞ ; il n'est bien posé que dans un espace de fonctions analytiques du type $e^{\sigma\Lambda}u$ dans L^2 pour $\sigma > 0$.

Exemple 2. L'instabilité de Rayleigh-Taylor.

On considère le mouvement de deux fluides parfaits incompressibles de densités respectives ρ^+ et ρ^- qui ont un écoulement irrotationnel de part et d'autre d'une ligne de tourbillon Γ_t .

Nous renvoyons à [4] et [18] pour une présentation physique détaillée de ce phénomène et pour l'établissement de l'équation dynamique obtenue en écrivant l'équation d'Euler dans $\mathbb{R}^2$ au sens des distributions.

Les équations du mouvement s'écrivent (cf[18]) :

$$\begin{cases} u_t = N_-(ux)\varphi_x^- , \\ \theta_t = \partial_x G(u_x, \varphi_x^+, \varphi_x^-, N_-(ux)\varphi_x^-) - \alpha g u_x , \end{cases}$$

où $\theta = \lambda\varphi_x^- - (1-\lambda)\varphi_x^+$ avec $\lambda = \dfrac{\rho^-}{\rho^- + \rho^+}$, et φ_x^- , φ_x^+ s'obtiennent à partir de θ par les relations (4) avec $\alpha = \dfrac{\rho^- - \rho^+}{\rho^- + \rho^+}$.

La fonction G s'explicite de la façon suivante :

$$G = - V_1\theta - \alpha\left(\frac{\omega^2}{8(1+u_x^2)} - \frac{V_1^2+V_2^2}{2}\right) , \text{ où}$$

$$V_1 = \frac{\varphi_x^- + \varphi_x^+}{2(1+u_x^2)} - \frac{u_x}{1+u_x^2} N_-(u_x)\, \varphi_x^- ,$$

$$V_2 = \frac{u_x(\varphi_x^- + \varphi_x^+)}{2(1+u_x^2)} + \frac{1}{1+u_x^2} N_-(u_x)\varphi_x^- ,$$

$\omega = \varphi_x^- - \varphi_x^+$ est la densité de tourbillon.

Dérivant la première équation par rapport à x et posant $v = u_x$, on se ramène finalement au système

$$\text{(E2)} \qquad \begin{cases} v_t = \partial_x(N_-(v)\varphi_x^-) \\ \theta_t = \partial_x G(v, \varphi_x^+ , \varphi_x^- , N_-(v)\varphi_x^-) - \alpha g v \end{cases}$$

La linéarisation au voisinage de O donne :

$$\begin{cases} v_t = \Lambda\theta \ , \\ \theta_t = -\ \alpha g v \ . \end{cases}$$

Pour $\alpha \geqslant 0$ c'est une équation hyperbolique bien posée mais pour $\alpha < 0$ on remarque, comme pour l'exemple précédent, qu'elle ne sera bien posée que dans un espace de fonctions analytiques.

Remarque 3. Le cas $\alpha = 1$, c'est à dire $\rho^+ = 0$, correspond à l'équation des ondes de surface (cf [3] , [8] , [11] ,[12],[13]) ; le cas $\alpha = 0$, i.e. $\rho^+ = \rho^-$, à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (cf [16]).

Remarque 4. Sauf dans le cas $\alpha = 0$, la difficulté sur laquelle on tombe est d'avoir à inverser l'opérateur $\frac{1}{2} + \alpha Y$ dans un espace convenable. Avec les estimations que nous développerons plus loin nous pourrons nous contenter d'inverser cet opérateur sur L^2 sans avoir à introduire de condition impliquant que Y est "assez petit" .

§ 2. UN RESULTAT D'EXISTENCE.

On va énoncer un résultat d'existence pour un problème assez général du type :

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} v_t = \partial_x F(v,\varphi_x^+ ,\varphi_x^- \ , N_-(v).\varphi_x^-) \ , \\ \theta_t = \partial_x G(v,\varphi_x^+ ,\varphi_x^- \ , N_-(v).\varphi_x^-) - cv \ , \\ v(0) = v_0 \ , \ \theta(0) = \theta_0 \ , \end{cases}$$

où F , $G(z_1,z_2,z_3,z_4)$ sont des fonctions analytiques dans la bande $|\mathrm{Im} z_i| < \delta$ $(i=1,2,3,4,\ \delta > 0)$, F et G étant réelles sur les réels. φ_x^+ ,φ_x^- s'obtiennent à partir de θ par les relations (4). On a alors

Théorème Soit $\rho_0 > 0$ et v_0 , θ_0 dans l'espace $H^2_{\rho_0}$, alors il existe $\rho > 0$, $\tau > 0$ et v, θ continûment dérivables de $[0,\tau]$ dans H^2_ρ vérifiant (E). Une telle solution est unique.

Ce résultat améliore les résultats antérieurs (cf[18]) au sens où on ne suppose pas la norme de v_0 dans $H^2_{\rho_0}$ assez petite, de plus F, G sont des fonctions analytiques quelconques, ce qui permet de

traiter dans un même cadre les deux exemples du § 1. On remarquera également que si l'interface initiale est donnée par la fonction u_o , la condition u_{ox} dans $H^2_{\rho_o}$ n'implique pas que u_o soit bornée.
La définition de l'espace H^m_ρ est dans le paragraphe suivant.

§ 3. LES ECHELLES DE FONCTIONS ANALYTIQUES.

Soit B un espace de Banach de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ ($B = L^2, L^\infty, H^m, C^\sigma,\ldots$), ρ un paramètre > 0 . On considère les espaces :

$B^b_\rho = \{u \in B$; u a un prolongement analytique dans la bande

$$x + iy \ ,\ |y| < \rho \quad \text{et} \quad \sup_{|y|<\rho} |u(.+iy)|_B < +\infty\} ,$$

on note $|u|_{B^b_\rho} = \sup_{|y|<\rho} |u(.+iy)|_B$.

$$B^\#_\rho = \{u \in B \ ;\ D^n u \in B,\ n = 0,1\ldots \ \text{et} \ \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!}|D^n u|_B < +\infty\},$$

$$|u|_{B^\#_\rho} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} |D^n u|_B .$$

B^b_ρ , $B^\#_\rho$ sont des espaces de Banach, on a $B^\#_\rho \subset B^b_\rho$ avec $|u|_{B^b_\rho} \leqslant |u|_{B^\#_\rho}$ mais on n'a pas égalité en général (cf la remarque 5 ci-dessous). Pour la suite, on peut travailler indifféremment dans l'une ou l'autre de ces familles d'espaces que l'on désignera par B_ρ . On a :

pour $0 < \rho' \leqslant \rho$ $B_\rho \subset B_{\rho'}$ avec $|\ |_{\rho'} \leqslant |\ |_\rho$, on dit que B_ρ est une échelle d'espaces de Banach. Les deux propriétés suivantes jouent un rôle essentiel.

. Si la multiplication des fonctions opère de $B' \times B''$ dans B avec $|uv|_B \leqslant |u|_{B'} |v|_{B''}$, alors elle opère de $B'_\rho \times B''_\rho$ dans B_ρ avec $|uv|_{B_\rho} \leqslant |u|_{B'_\rho} |v|_{B''_\rho}$

. Pour $\rho' < \rho$ la dérivation va de B_ρ dans $B_{\rho'}$ avec $|Du|_{\rho'} \leqslant \dfrac{|u|_\rho}{\rho-\rho'}$.

Remarque 5. En prenant $B = L^2$, on peut exhiber un exemple montrant que les espaces B^b_ρ et $B^\#_\rho$ sont distincts. Prenons la fonction u donnée par $\hat{u}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$, il est clair que u appartient à B^b_ρ et $B^\#_\rho$ pour tout $\rho < 1$ et on vérifie facilement que les normes respectives de u dans ces espaces, qui tendent vers l'infini lorsque $\rho \longrightarrow 1$, ne sont pas équivalentes. L'échelle $B^\#_\rho$ a été introduite par Ovsjannikov (cf[11]).
Pour démontrer le théorème, nous utiliserons une version abstraite du théorème

de Cauchy-Kowalewski relatif à la résolution d'une équation différentielle $\frac{dU}{dt} = \mathcal{F}(U)$ dans une échelle d'espaces de Banach.

Proposition 1. Soit B_ρ , $0<\rho\leq\rho_o$, une échelle d'espaces de Banach. Soit $U_o \in B_{\rho_o}$ et $r > 0$. Soit $\mathcal{F}$ une application telle que pour $0 < \rho' < \rho \leq \rho_o$, $\mathcal{F}: \{U \in B_\rho \,\|\, |U-U_o|_\rho \leq r\} \longrightarrow B_{\rho'}$, en vérifiant :

(i) $|\mathcal{F}(U_1) - \mathcal{F}(U_2)|_{\rho'} \leq C \dfrac{|U_1-U_2|_\rho}{\rho-\rho'}$ pour $0 < \rho' < \rho \leq \rho_o$ et $|U_i-U_o|_\rho \leq r$, $i = 1,2$.

(ii) $|\mathcal{F}(U_o)|_\rho \leq \dfrac{C'}{\rho_o-\rho}$.

Alors il existe $a > 0$ et une fonction $U(t)$ unique telle que pour tout ρ , $0 < \rho < \rho_o$, U soit continûment dérivable de l'intervalle $|t| \leq a(\rho_o-\rho)$ dans B_ρ , avec $|U(t)-U_o|_\rho \leq r$ et $\frac{dU}{dt} = \mathcal{F}(U(t))$, $U(0) = U_o$.

Pour la suite, nous n'aurons besoin que de ce résultat tout à fait rustique et de démonstration simple. Le cas $\mathcal{F}(t,U)$ est plus délicat et a fait l'objet de perfectionnements successifs (cf Ovsjannikov [11] , Treves [15] , Nirenberg [9], Nishida [10] et Baouendi-Goulaouic [1]).

§ 4 DEMONSTRATION DU THEOREME.

On met l'équation (E) sous la forme $\frac{dU}{dt} = \mathcal{F}(U)$ en posant $U = (v,\theta)$. On prendra comme échelle $B_\rho = (H^m_\rho)^2$ muni de la norme du sup des composantes. La norme de H^m_ρ sera notée $|\;|_{\rho,m}$.

Tout le problème revient alors à démontrer l'estimation (i). Pour $0 < \rho' < \rho$, on a :

$$|\partial_x F(v_1,\bar{\varphi}_{1x},\ldots)-\partial_x F(v_2,\bar{\varphi}_{2x},\ldots)|_{\rho',m} \leq \frac{1}{\rho-\rho'}|F(v_1,\ldots)-F(v_2,\ldots)|_{\rho,m} .$$

Il nous suffira donc de démontrer l'estimation : (A)

$$|F(v_1,\ldots,N_-(v_1)\bar{\varphi}_{1x}) - F(v_2,\ldots,N_-(v_2)\bar{\varphi}_{2x})|_{\rho,m} \leq C(F,R,m,1/\rho)(|v_1-v_2|_{\rho,m}+|\theta_1-\theta_2|_{\rho,m})$$

pour $|v_i|_{\rho,m} \leq R$, $|\theta_i|_{\rho,m} \leq R$.

Notons que la présence de $1/\rho$ dans la constante n'est pas gênante, il suffira en effet d'appliquer la proposition 1 après avoir fait une translation d'échelle : $\tilde{B}_\rho = B_{\rho+\varepsilon}$. L'estimation (A) s'obtient à partir de quelques lemmes techniques et d'estimations du noyau Z . Pour alléger les démonstrations nous supposerons $\alpha = \pm 1$, l'adaptation à faire pour obtenir le cas général fera l'objet de la remarque 6. Les démonstrations qui suivent utilisent l'échelle $H^m_\rho = H^{m\#}_\rho$.

Lemme 1. Soit $F(z_1,\dots,z_N)$ une fonction analytique dans la bande $|\mathrm{Im} z_i| < \delta$, $\delta > 0$. Alors pour tout $m \geqslant 2$ et tout $R > 0$ on a :

$$|F(f_1,\dots,f_N) - F(g_1,\dots,g_N)|_{\rho,m} \leqslant C(F,R,m)\left(\sum_{i=1}^{N} |f_i - g_i|_{\rho,m}\right) ,$$

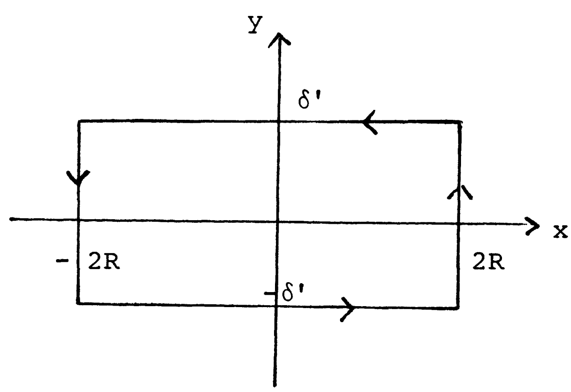
pour toutes f_i , g_i réelles vérifiant $|f_i|_{\rho,m}$, $|g_i|_{\rho,m} \leqslant R$ avec $\rho R \leqslant \delta/2$.

Démonstration. Donnons la démonstration dans le cas de deux variables.

Soit $R > 0$, $\delta/2 < \delta' < \delta$, f, g, h de norme $\leqslant R$ dans H^m_ρ .
En appliquant la formule de Cauchy on a :

$$F(f,h)-F(g,h) = \frac{-1}{4\pi^2}(f-g)\iint_{\gamma\times\gamma} \frac{F(\zeta,z)}{(\zeta-f)(\zeta-g)(z-h)}\,d\zeta dz = (f-g)I(f,g,h),$$

où γ désigne le lacet ci-contre.



Pour $0 \leqslant k \leqslant m$, calculons :

$$D^k(F(f,h)-F(g,h)) = D^k(f-g)I(f,g,h) + \sum_{\beta=1}^{k} \frac{k!}{\beta!(k-\beta)!} D^{k-\beta}(f-g)D^\beta I(f,g,h),$$

d'où en prenant la norme dans L^2_ρ :

$$|D^k(F(f,h)-F(g,h))|_{\rho,o} \leqslant |D^k(f-g)|_{\rho,o}|I|_{\rho,\infty} + \sum \frac{k!}{\beta!(k-\beta)!} |D^{k-\beta}(f-g)|_{\rho,\infty}|D^\beta I|_{\rho,o} ,$$

où on a noté $|\ |_{\rho,\infty}$ la norme dans L^∞_ρ .
Pour majorer les différents termes, on utilise les trois lemmes suivants.

Lemme 2. Soit z un point de γ , f une fonction réelle dans H^m_ρ , $m \geqslant 2$, telle que $|f|_{\rho,m} \leqslant R$ avec $\rho R \leqslant \delta/2$.

On a alors :

$$\left|\frac{1}{z-f}\right|_{\rho,\infty} \leqslant \max\left(\frac{1}{R}, \frac{1}{\delta'-\delta/2}\right) .$$

Démonstration. On distingue les cas :

. Si z est un point de la forme $\pm 2R + iy$, on a :

$$|f|_{\rho,\infty} \leqslant |f|_{\rho,m} \leqslant R \quad \text{et } 2R \leqslant |z| \text{ , d'où}$$

$$\left|\frac{1}{z-f}\right|_{\rho,\infty} \leqslant \frac{1}{|z|}\sum_{0}^{\infty}\left|\frac{f}{z}\right|_{\rho,\infty}^{n} = \frac{1}{|z|-|f|_{\rho,\infty}} \leqslant \frac{1}{R} .$$

. Si z est un point de la forme $x \pm i\delta'$, on a :

$$\left|\frac{1}{z-f}\right|_{\rho,\infty} = \frac{1}{\delta'}\left|\frac{1}{1\pm i\frac{x-f}{\delta'}}\right|_{\rho,\infty} .$$

On montre par un argument de renormalisation que pour toute fonction u de L_ρ^∞ réelle telle que $|u|^{\cdot}_{\rho,\infty} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!}|D^n u|_\infty < 1$ on a $\left|\frac{1}{1+iu}\right|_{\rho,\infty} \leqslant \frac{1}{1-|u|^{\cdot}_{\rho,\infty}}$.

En effet, on écrit, pour $M > 0$: $1+iu = M(1-(1-\frac{1}{M}-\frac{i}{M}u))$, on a $|1-\frac{1}{M}-\frac{i}{M}u|_\infty = ((1-\frac{1}{M})^2 + \frac{|u|_\infty^2}{M^2})^{1/2}$, et ceci est < 1 pour $M > \frac{1+|u|_\infty^2}{2}$, on a alors $\frac{1}{1+iu} = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{\infty}(1-\frac{1}{M}-\frac{i}{M}u)^k$, d'où $\left|\frac{1}{1+iu}\right|_{\rho,\infty} \leqslant \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{\infty}|1-\frac{1}{M}-\frac{i}{M}u|_{\rho,\infty}^k$,

on a $|1-\frac{1}{M}-\frac{i}{M}u|_{\rho,\infty} = |1-\frac{1}{M}-\frac{i}{M}u|_\infty + \frac{1}{M}|u|^{\cdot}_{\rho,\infty}$ et ceci est < 1 pour M assez grand ; d'où

$$\left|\frac{1}{1+iu}\right|_{\rho,\infty} \leqslant \frac{1}{M-\sqrt{(M-1)^2+|u|_\infty^2}-|u|^{\cdot}_{\rho,\infty}} .$$

Lorsque M tend vers $+\infty$, $M-\sqrt{(M-1)^2+|u|_\infty^2}$ tend vers 1 d'où le résultat.

On en déduit immédiatement :

$$\left|\frac{1}{z-f}\right|_{\rho,\infty} \leqslant \frac{1}{\delta'-|f|^{\cdot}_{\rho,\infty}} ,$$

et comme $|f|^{\cdot}_{\rho,\infty} \leqslant \rho|Df|_{\rho,\infty} \leqslant \rho R \leqslant \delta/2$, le lemme 2 s'en déduit. ∎

Lemme 3. Soit $m \geqslant 2$, f, g, h trois fonctions réelles de H^m_ρ de norme $\leqslant R$ avec $\rho R \leqslant \delta/2$, p, q, r des entiers $\geqslant 1$. On a alors :

$$\left| \int\int_{\gamma\times\gamma} \frac{F(\zeta,z)}{(\zeta-f)^p(\zeta-g)^q(z-h)^r}\, d\zeta dz \right|_{\rho,\infty} \leqslant C(F,R,p,q,r).$$

Démonstration. on a

$$\left|\int\int_{\gamma\times\gamma} \frac{F(\zeta,z)}{(\zeta-f)^p(\zeta-g)^q(z-h)^r}\, d\zeta dz\right|_{\rho,\infty} \leqslant \int\int_{\gamma\times\gamma} \left|\frac{1}{\zeta-f}\right|^p_{\rho,\infty} \left|\frac{1}{\zeta-g}\right|^q_{\rho,\infty} \left|\frac{1}{z-h}\right|^r_{\rho,\infty} |F(\zeta,z)|\,|d\xi|\,|dz|,$$

et le résultat s'obtient immédiatement en appliquant le lemme 2. ∎

Lemme 4. Soit $m \geqslant 2$, f, g, h trois fonctions réelles de H^m_ρ de norme $\leqslant R$ avec $\rho R \leqslant \delta/2$. On a alors :

$$|D^\beta I(f,g,h)|_{\rho,o} \leqslant C(F,R,\beta) \quad , \ \beta = 1,2,\dots m .$$

Démonstration. $D^\beta I$ est une somme de termes de la forme

$$(D^* f)^* (D^* g)^* (D^* h)^* \int\int_{\gamma\times\gamma} \frac{F(\zeta,z)}{(\zeta-f)^p(\zeta-g)^q(z-h)^r}\, d\zeta dz ,$$

où $(D^* f)^* = (Df)^{k_1} \dots (D^\nu f)^{k_\nu}$.

Le terme le plus dérivé est par exemple de la forme $(D^\nu f)^{k_\nu}$ avec $\nu \geqslant 1$ et $k_\nu \geqslant 1$. On majore alors la norme en prenant $|D^\nu f|_{\rho,o}$ et tous les autres termes en norme $|\ |_{\rho,\infty}$. Il suffit alors d'appliquer le lemme 3. ∎

Il s'ensuit que pour $k = 0,\dots m$, on a

$$|D^k(F(f,h) - F(g,h))|_{\rho,o} \leqslant C(F,R,m)\,|f-g|_{\rho,m} ,$$

d'où

$$|F(f,h)-F(g,h)|_{\rho,m} \leqslant C(F,R,m)\,|f-g|_{\rho,m} .$$

Le lemme 1 s'en déduit en remarquant que

$$|F(f_1,f_2)-F(g_1,g_2)|_{\rho,m} \leqslant |F(f_1,f_2)-F(g_1,f_2)|_{\rho,m} + |F(g_1,f_2)-F(g_1,g_2)|_{\rho,m} . \ ∎$$

Afin d'appliquer le lemme 1 pour obtenir l'estimation (A), nous avons besoin de majorer $|\varphi^{\pm}_{ix}|_{\rho,m}$ et $|N_-(v_i).\varphi^-_{ix}|_{\rho,m}$ lorsque $|v_i|_{\rho,m} \leqslant R$ et

$|\theta_i|_{\rho,m} \leqslant R$. Ces majorations s'obtiennent à partir d'une estimation du noyau Z .

Lemme 5. Pour $m \geqslant 2$, $|v|_{\rho,m} \leqslant R$ et $\rho R \leqslant 1/2$, on a :

$$|Zf|_{\rho,m} \leqslant (2\sqrt{\pi}\,\frac{R}{\sqrt{\rho}} + C(R,m))\,|f|_o$$

pour toute fonction f de L^2 .

Démonstration. Ce lemme s'obtient facilement à partir des lemmes techniques de [7] . ■

Lemme 6. On suppose $\alpha = \pm 1$ et $m \geqslant 2$, alors pour $|v|_{\rho,m} \leqslant R$ et $|\theta|_{\rho,m} \leqslant R$ avec $\rho R \leqslant 1/2$, on a

$$|\varphi_x^{\pm}|_{\rho,m} \leqslant \frac{C_1(R)}{\sqrt{\rho}} + C_2(R,m) \;,$$

même inégalité pour $|N_-(v).\varphi_x^-|_{\rho,m}$.

Démonstration. On a $\varphi_x^- = (\frac{1}{2} + Y)(\frac{1}{2} + \alpha Y)^{-1}\theta$, en écrivant $(\frac{1}{2} + \alpha Y)^{-1} = 2 - 2\alpha Y(\frac{1}{2} + \alpha Y)^{-1}$, il vient $\varphi_x^- = \theta + (1-\alpha)Y(\frac{1}{2} + \alpha Y)^{-1}\theta$, d'où

$|\varphi_x^-|_{\rho,m} \leqslant |\theta|_{\rho,m} + (1-\alpha)\,|Y(\frac{1}{2} + \alpha Y)^{-1}\theta|_{\rho,m}$, comme $|Yf|_{\rho,m} \leqslant |Zf|_{\rho,m}$, il vient :

$$|\varphi_x^-|_{\rho,m} \leqslant R + (1-\alpha)(2\sqrt{\pi}\,\frac{R}{\sqrt{\rho}} + C(R,m))\,\|(\frac{1}{2} + \alpha Y)^{-1}\|_{op}\,|\theta|_o \;,$$

et on majore $\|(\frac{1}{2} + \alpha Y)^{-1}\|_{op}$ au moyen du lemme suivant.

Lemme 7. Si $v \in L^\infty \cap V^{1/2}$, on a les majorations :

$$\|(\frac{1}{2}H + X)^{-1}\|_{op} \leqslant C(|v|_\infty) \;,$$

$$\|(\frac{1}{2} + \alpha Y)^{-1}\|_{op} \leqslant C(|v|_\infty) \;,\; \alpha = \pm 1 \;.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'inégalité de Payne-Weinberger (cf [6]) . ■

D'où l'inégalité du lemme 6 pour $|\varphi_x^-|_{\rho,m}$ en remarquant que $|v|_\infty \leqslant R$.

L'inégalité pour $|\varphi_x^+|_{\rho,m}$ s'obtient de la même façon.

Pour le terme $N_-(v)\varphi_x^-$, écrivons :

$$N_-(v)\varphi_x^- = -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}H+X)^{-1}\varphi_x^- - Y(\frac{1}{2}H+X)^{-1}\varphi_x^- ,$$

le premier terme se traite en écrivant

$$(\frac{1}{2}H+X)^{-1} = -2H + 2HX(\frac{1}{2}H+X)^{-1} \text{ , d'où il vient}$$

$$|N_-(v)\varphi_x^-|_{\rho,m} \leqslant |\varphi_x^-|_{\rho,m} + |X(\frac{1}{2}H+X)^{-1}\varphi_x^-|_{\rho,m} + |Y(\frac{1}{2}H+X)^{-1}\varphi_x^-|_{\rho,m} ,$$

d'où le résultat en utilisant les lemmes 5 et 7 et l'inégalité $|\varphi_x^-|_o \leqslant C(R)$ qui s'obtient en remarquant que

$$\|Y\|_{op} \leqslant |Y(x,y)|_{L^2(dxdy)} \leqslant C|\Lambda^{1/2}v|_o \leqslant CR . \blacksquare$$

<u>Revenons à l'estimation (A)</u> et considérons le terme

$$|F(v_1,\ldots N_-(v_1)\varphi_{1x}^-) - F(v_2,\ldots N_-(v_2)\varphi_{2x}^-)|_{\rho,m} .$$

Soit $m \geqslant 2$, $R > 0$ et $|v_i|_{\rho,m}$, $|\theta_i|_{\rho,m} \leqslant R$, on a alors :

$$|\varphi_{ix}^{\pm}|_{\rho,m} , |N_-(v_i)\varphi_{ix}^-|_{\rho,m} \leqslant \frac{C(R)}{\sqrt{\rho}} + C(R,m) ,$$

Soit $R_1 = \max(R, \frac{C(R)}{\sqrt{\rho}} + C(R,m))$, pour ρ assez petit $(\rho<\rho_1)$, on aura $\rho R_1 \leqslant \delta/2$. L'application du lemme 1. donne :

$$|F(v_1,..)-F(v_2,..)|_{\rho,m} \leqslant C(F,R,m,1/\rho) \Big[|v_1-v_2|_{\rho,m} + |\varphi_{1x}^+ - \varphi_{2x}^+|_{\rho,m} +$$
$$+ |\varphi_{1x}^- - \varphi_{2x}^-|_{\rho,m} + |N_-(v_1)\varphi_{1x}^- - N_-(v_2)\varphi_{2x}^-|_{\rho,m}\Big]$$

Pour obtenir (A) il faut maintenant estimer les quantités $|\varphi_{1x}^{\pm} - \varphi_{2x}^{\pm}|_{\rho,m}$ et $|N_-(v_1)\varphi_{1x}^- - N_-(v_2)\varphi_{2x}^-|_{\rho,m}$.

<u>Lemme 8</u>. Pour $m \geqslant 2$, $R > 0$ et $\rho R \leqslant 1/2$, on a :

$$|\varphi_{1x}^{\pm} - \varphi_{2x}^{\pm}|_{\rho,m} \leqslant C(R,m,1/\rho) \ (|v_1-v_2|_{\rho,m} + |\theta_1-\theta_2|_{\rho,m}) ,$$

dès que $|v_i|_{\rho,m}$, $|\theta_i|_{\rho,m} \leq R$, $i = 1,2$.

Même inégalité pour $|N_-(v_1)\varphi_{1x}^- - N_-(v_2)\varphi_{2x}^-|_{\rho,m}$.

Démonstration. Ecrivons $\varphi_{ix}^- = (1 + 2\alpha Y_i)^{-1}\theta_i + Y_i(\frac{1}{2} + \alpha Y_i)^{-1}\theta_i$, d'où

$$\varphi_{1x}^- - \varphi_{2x}^- = 2\alpha(1+2\alpha Y_1)^{-1} (Y_2-Y_1) (1+2\alpha Y_2)^{-1}\theta_1 + (1+2\alpha Y_2)^{-1}(\theta_1-\theta_2) +$$

$$(Y_1-Y_2) (\frac{1}{2} +\alpha Y_1)^{-1}\theta_1 + Y_2(\frac{1}{2} +\alpha Y_2)^{-1}(\theta_1-\theta_2) + \alpha Y_2(\frac{1}{2} +\alpha Y_1)^{-1}(Y_2-Y_1)(\frac{1}{2} +\alpha Y_2)^{-1}\theta_1$$

Le résultat découle alors de l'expression

$$(1+2\alpha Y_i)^{-1} = 1 - 2\alpha Y_i(1+2\alpha Y_i)^{-1}$$

et du lemme suivant

Lemme 9. Soit $m \geq 2$, $R > 0$ et $\rho R \leq 1/2$, on a

$$|(Z_1-Z_2)f|_{\rho,m} \leq C(R,m,1/\rho) |v_1-v_2|_{\rho,m}|f|_o ,$$

pour $|v_i|_{\rho,m} \leq R$, $i = 1,2$ et $f \in L^2$.

Démonstration. Ce résultat est une forme affaiblie du théorème 1 de [7] . ■

Les calculs sont tout à fait analogues pour le terme

$$N_-(v_1)\varphi_{1x}^- - N_-(v_2)\varphi_{2x}^- = (N_-(v_1)-N_-(v_2))\varphi_{1x}^- + N_-(v_2)(\varphi_{1x}^- -\varphi_{2x}^-) ,$$

le premier morceau se traite en écrivant :

$$N_-(v_1)-N_-(v_2) = (Y_2-Y_1)(\frac{1}{2} H+X_2)^{-1} + Y_1(\frac{1}{2} H+X_2)^{-1}(X_1-X_2)(\frac{1}{2} H+X_1)^{-1}$$

$$+ 2HX_2(H+2X_2)^{-1}(X_1-X_2) (\frac{1}{2} H + X_1)^{-1} + H(X_2-X_1)(\frac{1}{2} H+X_1)^{-1} ,$$

en appliquant les lemmes 5, 7, 9 et l'inégalité élémentaire

$$\|Z_1 - Z_2\|_{op} \leq C(|\Lambda^{1/2}(v_1-v_2)|_o + |\Lambda^{1/2}v_2|_o|v_1-v_2|_\infty) \leq C(R)|v_1-v_2|_{\rho,m} .$$

Pour le deuxième morceau, on écrit, en reprenant un calcul déjà fait :

$$|N_-(v_2)(\varphi_{1x}^- -\varphi_{2x}^-)|_{\rho,m} \leq |\varphi_{1x}^- -\varphi_{2x}^-|_{\rho,m} + |X_2(\frac{1}{2} H+X_2)^{-1}(\varphi_{1x}^- -\varphi_{2x}^-)|_{\rho,m}$$

$$+ |Y_2(\frac{1}{2} H+X_2)^{-1}(\varphi_{1x}^- -\varphi_{2x}^-)|_{\rho,m} ,$$

d'où le résultat. ■

Résumons en une proposition l'estimation obtenue.

Proposition 2. Pour tout $m \geq 2$ et $R > 0$, il existe $\rho_1 > 0$ (dépendant de δ, R et m) tel que pour $\rho \leq \rho_1$ et $|v_i|_{\rho,m}$, $|\theta_i|_{\rho,m} \leq R$, on ait :

$$|F(v_1,\dots N_-(v_1)\varphi_{1x}^-)-F(v_2,\dots N_-(v_2)\varphi_{2x}^-)|_{\rho,m} \leq C(F,R,m,1/\rho)\,(|v_1-v_2|_{\rho,m}+|\theta_1-\theta_2|_{\rho,m}) .$$

Grâce à cette estimation, on peut appliquer la proposition 1 dans l'échelle $(H^2_\rho)^2$, on obtient ainsi le théorème.

Remarque 6. Comme annoncé, nous avons occulté le problème posé par la majoration de $\|(\frac{1}{2}+\alpha Y)^{-1}\|_{op}$ pour $\alpha \in [-1,+1]$. La question de savoir si $\|(\frac{1}{2}+\alpha Y)^{-1}\|_{op} \leq C(|v|_\infty)$ n'étant pas résolue, on peut remarquer qu'il suffit de travailler au voisinage de l'opérateur Y_o correspondant à la condition initiale v_o, en écrivant :

$$(\frac{1}{2}+\alpha Y)^{-1} = (1+\alpha(\frac{1}{2}+\alpha Y_o)^{-1}(Y-Y_o))^{-1}(\frac{1}{2}+\alpha Y_o)^{-1} ,$$

d'où $\|(\frac{1}{2}+\alpha Y)^{-1}\|_{op} \leq \dfrac{C}{1-|\alpha| C\|Y-Y_o\|_{op}}$, où $C = \|(\frac{1}{2}+\alpha Y_o)^{-1}\|_{op}$,

et comme $\|Y-Y_o\|_{op} \leq C(R)\,|v-v_o|_{\rho,m}$ pour tout $m \geq 2$ et tout $\rho > 0$, il suffit d'appliquer la proposition 1 avec r assez petit.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M.S. Baouendi, C. Goulaouic, Comm. Part. Diff. Eq. 2, 1977, 1151-1162.

[2] K.I. Babenko, V.U. Petrovich, Sov. Phys. Dokl. 24, 1979, 161-163.

[3] Bui An ton, Nonlinear Analysis, Theory Methods and Applications 6, 1982, 335-347.

[4] S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford, Clarendon Press, 1961.

[5] J.R. Chan Hong, D. Hilhorst, C.J. Van Duyn, J. Van Kester, Numerical study of simultaneous flow of salt and fresh ground water in horizontally

extended aquifers. A paraître.

[6] J. Duchon, R. Robert, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire, 1, 1984, 361-378.

[7] J. Duchon, R. Robert, Estimation d'opérateurs intégraux du type de Cauchy dans les échelles d'Ovsjannikov et application. A paraître aux Annales de l'Institut Fourier.

[8] V.I. Nalimov. Dolk. Akad. Nauk. SSSR 189, 1969, 45-48.

[9] L. Nirenberg, J. Diff. Geometry 6, 1972, 561-576.

[10] T. Nishida, J. Diff. Geometry 12, 1977, 629-633.

[11] L.V. Ovsjannikov, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 200, 1971, 789-792.

[12] J. Reeder, M. Shinbrot, Indiana Univ. Math. J., 25, 1976, 1049-1071.

[13] M. Shinbrot, Indiana Univ. Math. J.,25, 1976, 281-300.

[14] Y. Meyer, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1982-83, exposé n°5.

[15] J.F. Treves, Trans. Amer. Math. Soc. 150, 1970, 77-92.

[16] C. Sulem, P.L. Sulem, C. Bardos, U. Frisch, Comm. Math. Phys. 80, 1981, 485-516.

[17] C. Sulem, Thèse, Université Paris-Nord, 1983.

[18] C. Sulem, P.L. Sulem, Finite time analyticity for the two and three dimensional Rayleigh-Taylor instability. A paraître T.A.M.S.

*
* *
*