P-L. Lions

Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre et applications

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1983-1984), exp. n° 6, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1983-1984____A6_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 3 - 1 9 8 4

SOLUTIONS DE VISCOSITE DES EQUATIONS DE HAMILTON - JACOBI DU PREMIER ORDRE ET APPLICATIONS

par P-L. LIONS

dédié à la mémoire de C. Goulaouic

Exposé n° VI

22 Novembre 1983

1. INTRODUCTION

Notre but est de présenter quelques travaux récents sur les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre :

(1) $$H(x,u,\nabla u) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, u est scalaire. La nonlinéarité H-appelée Hamiltonien - est une fonction donnée continue sur $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. L'équation (1) est une formulation générale des équations de Hamilton-Jacobi (HJ en abrégé) qui contient la formulation plus habituelle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F(x,\nabla_x u) = 0 \qquad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^N \times]0,\infty[$$

(on considère alors $y = (x,t)$, $H(y,\nabla_y u) = \frac{\partial u}{\partial t} + F(x,\nabla_x u) \ldots$).

Il est bien connu que (pour des conditions aux limites données) il n'existe pas de solutions globales C^1 de (1) (satisfaisant ces conditions aux limites) même si toutes les données sont analytiques et que les solutions localement Lipschitziennes (vérifiant (1) p.p.) étudiées par W.H. Fleming [9],[10]; S.N. Kruzkov [14],[15], A. Friedman [11], ne sont ni stables ni uniques.

Récemment M.G. Grandall et l'auteur ([4],[5]) ont introduit la notion de solutions de viscosité de (1) dont nous rappelons brièvement la définition et les principales propriétés (tirées de [5] et de M.G. Grandall, L.C. Evans et P-L. Lions [3], P-L. Lions [17]) dans la section II. Cette notion permet d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité très généraux que nous donnons dans la section III : l'unicité découle de M.G. Grandall et P-L. Lions [5], [6] et l'existence de P-L. Lions [17],[18], G. Barles [1], M.G. Grandall et P-L. Lions [6].

Les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre interviennent de manière fondamentale dans les théories du contrôle optimal déterministe et des jeux différentiels : la notion de solutions de viscosité permet alors de justifier ces relations par une adaptation aisée du principe de la programmation dynamique. Cette observation, due à P-L. Lions [17], est rappelé dans la section 3 ainsi que divers résultats reliés adaptés de P-L. Lions et M. Nisio [20].

Enfin la section IV est consacrée à quelques problèmes asymptotiques - intervenant en optique - pour les équations de HJ. Ces problèmes sont résolus dans P-L. Lions, G. Papanicolaou et S.R.S. Varadhan [21] à l'aide de la notion de solutions de viscosité.

2. SOLUTIONS DE VISCOSITE : DEFINITION ET PROPRIETES ELEMENTAIRES

Soient $\varphi \in C(\Omega)$ et $x_o \in \Omega$: on rappelle que le surdifférentiel (resp. sous-différentiel) de φ au point x_o est l'ensemble convexe fermé éventuellement vide donné par :

$$D^+\varphi(x_o) = \{\xi \in \mathbb{R}^N \,/\, \limsup_{y\to x_o, y\in\Omega} \{\varphi(y)-\varphi(x_o)-(\nabla\varphi(x_o),y-x_o)\}|y-x_o|^{-1} \leq 0\}$$

$$(\text{resp. } D^-\varphi(x_o) = \{\xi \in \mathbb{R}^N \,/\, \liminf_{y\to x_o, y\in\Omega} \{\varphi(y)-\varphi(x_o)-(\nabla\varphi(x_o),y-x_o)\}|y-x_o|^{-1} \geq 0\}).$$

Une caractérisation de ces ensembles est donné par le

<u>Lemme 2.1</u> : <u>Soient</u> $\varphi \in C(\Omega)$ <u>et</u> $x_o \in \Omega$ <u>alors</u> $\xi \in D^+\varphi(x_o)$ (<u>resp.</u> $D^-\varphi(x_o)$) <u>si et seulement si il existe</u> $\psi \in C^1(\Omega)$ <u>vérifiant</u> : $\varphi - \psi$ <u>admet au point</u> x_o <u>un maximum global (resp. minimum global) strict</u>.

A l'aide de ces différentiels généralisés on définit pour $u \in C(\Omega)$:

<u>Définition</u> : u est solution de viscosité de l'équation de HJ (1) si :

(2) $\forall x \in \Omega, \forall \xi \in D^+u(x) \;,\; H(x,u(x),\xi) \leq 0$

(3) $\forall x \in \Omega, \forall \xi \in D^-u(x) \;,\; H(x,u(x),\xi) \geq 0$.

<u>Remarques</u> : i) Si $u \in C^1(\Omega)$ est solution (classique) de (1), u est solution de viscosité de (1).

ii) Si u est solution de viscosité de (1), alors (1) a lieu en tout point de différentiabilité de u . En particulier si u est localement Lipschitzien, l'équation (1) a lieu p.p.

En utilisant le lemme 2.1,on obtient la définition équivalente suivante où $(u \in C(\Omega))$.

<u>Définition équivalente</u> : u est solution de viscosité de (1) si et seulement si on a pour tout $\psi \in C^1(\Omega)$ les propriétés suivantes :

$$(2')\quad \begin{cases} \text{en tout point } x_o \text{ de maximum local de } u-\psi \\ H(x_o,u(x_o)\,,\nabla\psi(x_o)) \leqslant 0 \;; \end{cases}$$

$$(3')\quad \begin{cases} \text{en tout point } x_o \text{ de minimum local de } u-\psi \\ H(x_o,u(x_o)\,,\nabla\psi(x_o)) \geqslant 0 \;. \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : On obtient encore des définitions équivalentes en remplaçant C^1 par C^2 ou C^∞ et (ou) en remplaçant local par local strict, global, global strict.

Ces observations élémentaires impliquent la

<u>Proposition 2.1</u> : <u>Soit</u> $H_n(x,t,p) \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ <u>convergeant uniformément sur tout compact de</u> $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ <u>vers</u> $H(x,t,p)$, <u>soit</u> $u_n \in C(\Omega)$ <u>solution de viscosité de</u> : $H_n(x,u,\nabla u) = 0$ <u>dans</u> Ω. <u>On suppose de plus que</u> u_n <u>converge uniformément vers</u> u <u>sur tout compact de</u> Ω . <u>Alors</u> u <u>est solution de viscosité de (1).</u>

<u>Remarque</u> : De même obtient-on - et ceci justifie la terminologie utilisée - la convergence de la méthode de viscosité évanescente. Par analogie avec la mécanique des Fluides, on appelle méthode de viscosité évanescente la méthode consistant à approcher (1) par :

$$(4)\qquad -\varepsilon\Delta u_\varepsilon + H_\varepsilon(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon) = 0 \qquad \text{dans } \Omega$$

où $\varepsilon > 0$, $H_\varepsilon(x,t,p) \in C(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$ converge uniformément sur tout compact de $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ vers $H(x,t,p)$. L'équation (4) - pour ε fixé - est l'exemple typique d'équations quasilinéaires qui sont assez bien comprises : nous renvoyons le lecteur à D. Gilbarg et N.S. Trudinger [12], O.A. Ladyzenskaya et N.N. Ural'tc·eva [16], J. Serrin [22], P-L. Lions [19] . Sous des hypothèses générales sur H_ε (et pour des conditions aux limites prescrites) on obtient l'existence de $u_\varepsilon \in C^2(\Omega)$. De plus on peut obtenir (cf. P-L. Lions [17] pour plus de détails) des estimations $W^{1,\infty}$ uniformes en ε. Il est donc naturel de supposer qu'il existe $u_\varepsilon \in C^2(\Omega)$ convergeant uniformément sur tout compact de Ω vers u . Alors u est solution de viscosité : en effet il suffit de considérer (par exemple) un point x_o de maximum local strict de $u-\psi$ où $\psi \in C^2(\Omega)$, alors on peut trouver

$\varepsilon_n \underset{n}{\to} 0$, $x_{\varepsilon_n} \underset{n}{\to} x_o$ tels que x_{ε_n} est un point de maximum local de $u_{\varepsilon_n} - \psi$.
D'où, d'après les conditions nécessaires d'extrémalité et (4) :

$$H_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}, u_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}), \nabla\psi(x_{\varepsilon_n})) = \varepsilon_n \Delta u_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}) \leqslant \varepsilon_n \Delta \psi(x_{\varepsilon_n}) \underset{n}{\to} 0$$

et (2') est prouvé ! ∎

Les résultats de cette section sont dûs à M.G. Grandall et P-L. Lions [5] (une présentation plus directe se trouvant dans [3]).

3. EXISTENCE ET UNICITE

Nous ne considérons ici que le cas modèle suivant :

(5) $$H(x,Du) + \lambda u = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N,$$

où $H(x,p) \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $\lambda > 0$; bien que tous les résultats qui suivent s'étendent à des Hamiltoniens généraux $H(x,u,\nabla u)$ ainsi qu'à des problèmes avec conditions aux limites comme par exemple :

(6) $$\frac{\partial u}{\partial t} + H(x,Du) = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0,\infty)$$

et $$u(x,0) = u_o(x) \qquad \text{sur } \mathbb{R}^N, \text{ où } u_o \text{ est donnée.}$$

Dans un premier temps, nous supposerons que "la condition aux limites à l'infini" se traduit par la bornitude des solutions et nous utiliserons les hypothèses :

(7) $$H(x,p) \in BUC(\mathbb{R}^N \times \overline{B}_R) \ , \quad \forall\ R < \infty$$

(8) $$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \{\sup[\,|H(x,p) - H(y,p)| \,/\, |x-y|\,(1+|p|) \leqslant \varepsilon]\} = 0$$

(9) $$H(x,p) \to \infty \qquad \text{quand } |p| \to \infty \text{ , uniformément pour } x \in \mathbb{R}^N .$$

<u>Théorème 3.1</u> : i) <u>Sous les hypothèses</u> (7)(8), <u>il existe une unique solution de viscosité de</u> (5) <u>dans</u> $BUC(\mathbb{R}^N)$.

ii) <u>Sous les hypothèses</u> (7) <u>et</u> (9), <u>il existe une unique solution de viscosité</u> u <u>de</u> (5) <u>dans</u> $C_b(\mathbb{R}^N)$ <u>et</u> $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$.

iii) <u>Soient</u> $u,v \in BUC(\mathbb{R}^N)$ <u>solutions de viscosité de, respectivement,</u> (5) <u>et</u> :(5') $H(x,Dv) + \lambda v = f(x)$ <u>dans</u> $\mathbb{R}^N$.

Si $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$, si on suppose (7) et ou bien (8) , ou bien $u,v \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ alors on a :

$$\sup_{\mathbb{R}^N}(v-u)^+ \leqslant \frac{1}{\lambda} \sup_{\mathbb{R}^N} f^+ . \tag{10}$$

Remarques : i) Bien sûr (10) entraîne l'unicité.

ii) Les résultats d'unicité et de comparaison du type (10) sont dûs à M.G. Grandall et P-L. Lions [5]. L'existence est démontrée dans P-L. Lions [17],[18] dans le cas ii) et dans le cas où (8) est remplacée par l'hypothèse (naturelle pour les applications) :

$$\exists\, C_o, C_1 \geqslant 0, \ |H(x,p)-H(y,p)| \leqslant C_o|p| + C_1 , \ \forall x,y,p \in \mathbb{R}^N \ ; \tag{8'}$$

- voir également P.E. Souganidis [23]. Le cas général est démontré dans G. Barles [1] par une méthode d'approximation élégante utilisant le cas où (8') a lieu.

iii) Si (8') a lieu, on peut démontrer (cf. P-L. Lions [18] que la solution de viscosité u vérifie : $u \in C^{o,\theta}(\mathbb{R}^N)$ avec $\theta = \lambda/_{C_o}$ si $\lambda \in]0,C_o[$, θ quelconque dans $(0,1)$ si $\lambda = C_o$ et $\theta = 1$ si $\lambda > C_o$.

La méthode de démonstration de la partie existence du théorème est basée sur l'estimation (10), la méthode de viscosité évanescente et divers procédés d'approximation ; et l'unicité (ainsi que (10)) se démontre élémentairement : donnons la démonstration de iii) dans le cas où $u,v \in C_o(\mathbb{R}^N)$.
Elle repose sur le lemme suivant :

Lemme 3.1 : Soient $u,v \in C_o(\mathbb{R}^N)$ tels que $\max_{\mathbb{R}^N}(v-u) > 0$. Alors il existe $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ vérifiant : $x_n , y_n \underset{n}{\to} x_o \in \arg\max(v-u)$ et

$$\exists\, \xi_n \in D^+v\,(x_n) \cap D^-u(y_n) \ ; \quad |\xi_n|\,|x_n-y_n| \underset{n}{\to} 0 .$$

De plus si u ou $v \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$, ξ_n est bornée. ■

Démontrons (10) à partir du lemme : la définition des solutions de viscosité implique que :

$$\begin{cases} H(x_n,\xi_n) + \lambda v(x_n) \leqslant f(x_n) \leqslant \sup f^+ \\ H(y_n,\xi_n) + \lambda u(y_n) \geqslant 0 \end{cases}$$

d'où par soustraction :

$$\lambda\{v(x_n) - u(y_n)\} \leqslant \sup_{\mathbb{R}^N} f^+ + |H(x_n,\xi_n)-H(y_n,\xi_n)|$$

$$\leqslant \sup_{\mathbb{R}^N} f^+ + \sup\{|H(x,p) - H(y,p)| \;/\; |x-y|(1+|p|) \leqslant |x_n-y_n|(1+|\xi_n|)\} .$$

On conclut en faisanttendre n vers l'infini et en utilisant (8) (ou (7)).

Enfin, le lemme 3.1 se démontre en étudiant la fonction :

$w_\varepsilon(x,y) = v(x)-u(y) + 3M\beta_\varepsilon(x-y)$ sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, où

$M = \max(\|u\|_\infty , \|v\|_\infty)\beta_\varepsilon(\xi) = \beta(\xi/\varepsilon)$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\beta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\beta(0) = 1$. ■

Pour les applications au contrôle optimal, aux jeux différentiels et à l'étude des semi-groupes associés à l'équation de Hamilton-Jacobi, il est intéressant de généraliser les résultats qui prédèdent au cas de données non bornées. On utilisera les hypothèses (pas simultanément !) :

(11) $\qquad H \in U\,C(\mathbb{R}^N \times \overline{B}_R)$, $\quad \forall\ R < \infty$

(12) $\qquad \exists\ C_0 \geqslant 0$, $|H(x,p) - H(x,q)| \leqslant C_0|-p-q$. $\quad \forall\ x,p,q \in \mathbb{R}^N$

(13) $\qquad \exists\ C \geqslant 0$, $\exists\ \Theta \in]0,1[$, $|H(x,p)-H(x,q)| \leqslant C|p-q|^\Theta$, $\forall\ x,p,q \in \mathbb{R}^N$.

<u>Theorème 3.2</u> : i) <u>Sous les hypothèses</u> (11) <u>et</u> (8), <u>il existe une unique solution de viscosité</u> u <u>de (5) dans</u> $U\,C(\mathbb{R}^N)$. <u>De plus</u> $u + \frac{1}{\lambda} H(x,0) \in BUC(\mathbb{R}^N)$.

ii) <u>Sous les hypothèses</u> (12), (8) <u>et si</u> $f \in C(\mathbb{R}^N)$ <u>vérifie</u> :

(14) $$\int^\infty \sup_{|x| \leqslant t} |f(x)|\ e^{-\lambda t/C_0}\ dt < \infty$$

<u>alors il existe une unique solution de viscosité</u> $u \in C(\mathbb{R}^N)$ <u>de</u>

(15) $$H(x,Du) + \lambda u = f(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N$$

<u>vérifiant</u>

(14') $$\sup_{\mathbb{R}^N} |u(x)|\exp(-\lambda|x|/C_0) \to 0 \qquad \text{quand } |x| \to \infty .$$

iii) <u>Sous les hypothèses</u> (13) (8) <u>et si</u> $f \in C(\mathbb{R}^N)$, <u>il existe une unique solution de viscosité</u> u <u>de (15) dans</u> $C(\mathbb{R}^N)$.

Remarques : i) Il est possible bien sûr de réunir (12) et (13) (i.e. ii) et iii)) dans un même résultat. De plus l'analogue de (10) a toujours lieu.

ii) L'unité dans i),ii) est démontrée par H. Ishii [13]. L'existence et iii) sont dûs à M.G. Grandall et P-L. Lions [6] - où l'unicité pour i),ii) est redémontrée par une méthode plus simple que dans [13].

Pour conclure indiquons que des exemples montrant l'optimalité des résultats et des hypothèses sont donnés dans [5], [17], [6]. Enfin les résultats précédents ainsi que la méthode de démonstration de l'unité sont utiles pour l'approximation numérique des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre : cf. M.G. Grandall et P-L. Lions [7], P.E. Souganidis [23],[24]...

4. APPLICATIONS AU CONTROLE OPTIMAL

On s'intéresse ici au contrôle optimal de systèmes déterministes gouvernées par les équations différentielles ordinaires. L'état du système est donné par la solution $y_x(t)$ de l'équation différentielle :

$$y_x(t) = x + \int_0^t b(y_x(s)\ ,\ \alpha(s))\, ds$$

où x - l'état initial du système - $\in \mathbb{R}^N$, $\alpha(s)$ - le contrôle - est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans A espace métrique - ensemble des valeurs du contrôle - et où le champ $b(x,\alpha)$ défini sur $\mathbb{R}^N \times A$ vérifie (par exemple) :

$$(16) \qquad |b(x,\alpha) - b(x',\alpha)| \leq C_0 |x-x'|\ ,\ |b(x,\alpha) \leq C\ ,\ \forall\ x,x' \in \mathbb{R}^N,\ \forall \alpha \in A.$$

On se donne $f(x,\alpha)$ fonction réelle sur $\mathbb{R}^N \times A$ - f est le coût infinitésimal - et $\lambda > 0$ - λ est le taux d'actualisation. La fonction coût est donnée par :

$$(17) \qquad J(x,\alpha(.)) = \int_0^\infty f(y_x(t),\alpha(t))\ \exp(-\lambda t)\, dt$$

et il s'agit de déterminer le coût minimum - appelé fonction valeur - i.e. :

$$(18) \qquad u(x) = \inf_{\alpha(.)} J(x,\alpha(.))$$

où l'infimum est pris sur tous les contrôles admissibles i.e. toutes les fonctions mesurables sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans A. Pour simplifier on suppose :

(19) $\quad |f(x,\alpha)-f(x'\ \alpha)| \leqslant \varepsilon(|x-x'|)\ ,\ |f(x,\alpha)| \leqslant C\ ,\forall\ x,x' \in \mathbb{R}^N\ ,\ \forall\ \alpha \in A$

où $\varepsilon(t) \to 0$ si $t \to 0_+$.

L'argument de la programmation dynamique de R. Bellman donne alors l'identité suivante valide pour tout $T > 0$:

(20)
$$u(x) = \inf_{\alpha(.)} \left\{ \int_0^T f(y_x(t),\alpha(t)) \exp(-\lambda t)dt + u(y_x(T)) \exp(-\lambda T) \right\} .$$

On en déduit alors (cf. P-L. Lions [17]) le :

<u>Théorème 4.1</u> : <u>Sous les hypothèses (16) et (19)</u>, u <u>est l'unique solution de viscosité dans</u> $BUC(\mathbb{R}^N)$ <u>de (15) où H est donné par</u>

(21)
$$H(x,p) = \sup_{\alpha \in A} \{-b(x,\alpha).p - f(x,\alpha)\} .$$

<u>Remarques</u> : i) Il est bien connu que si u est différentiable en x^o alors (15) (avec H donné par (21)) a lieu en x^o : on retrouve ici ce fait comme sous-produit de la notion de solution de viscosité. De plus l'unicité permet la détermination effective de u .

ii) (16) et (19) entraînent (7) et (8'). En fait en utilisant le théorème 3.2, on peut considérablement relâcher (19).

<u>Démonstration du Théorème 4.1</u> : L'unicité découle du Théorème 3.1 et on vérifie que $u \in BUC(\mathbb{R}^N)$ en démontrant que $J(.,\alpha(.))$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^N$ uniformément en $\alpha(.)$. Vérifions maintenant que u est solution de viscosité de (15) : soit par exemple $\psi \in C_b^1(\mathbb{R}^N)$ tel que $u - \psi$ a un minimum global en un point $x_o \in \mathbb{R}^N$. On peut supposer sans restreindre la généralité que : $u(x_o) = \psi(x_o)$. On déduit alors de (20) :

$$\psi(x_o) \geqslant \inf_{\alpha(.)} \{ \int_0^T f(y_{x_o}(t),\alpha(t)) \exp(-\lambda t)dt + \psi(y_{x_o}(T)) \exp(-\lambda t) \}$$

ou également

$$\sup_{\alpha(.)} \left\{ \frac{1}{T}[\psi(x_o) - \psi(y_{x_o}(T)) \exp(-\lambda T)]\ x - \frac{1}{T} \int_0^T f(y_{x_o}(t),\alpha(t) \exp(-\lambda t)dt \right\} \geqslant 0\ x.$$

En utilisant (16),(19) et la différentiabilité de ψ en x_o, on en déduit :

$$\sup_{\alpha(.)}\left\{-\nabla\psi(x_o)\cdot\frac{1}{T}\left[\int_o^T b(x_o,\alpha(s))ds\right]-\frac{1}{T}\int_o^T f(x_o,\alpha(s))ds\right\}+\lambda\psi(x_o)\geq-\varepsilon(T)$$

où $\varepsilon(T)\to 0$ si $T\to 0_+$. Et on conclut en faisant tendre T vers 0_+. ∎

Le théorème précédent ainsi que sa démonstration au cas de jeux différentiels déterministes (cf. Souganidis [24]; L.C. Evans and P-E. Souganidis [8]; Barron, L.C. Evans et R. Jensen [2]...). En fait les relations entre programmation dynamique et solutions de viscosité sont contenues dans la remarque suivante - adaptée de P-L. Lions et M. Nisio [20] - :
soit $H(x,t,p)\in C(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$.

Théorème 4.2 : Soit $S(t)$ un semi-groupe sur une partie $\mathcal{C}$ de $C_b(\mathbb{R}^N)$ contenant $C_b^\infty(\mathbb{R}^N)$. On suppose que $S(t)$ vérifie :

(22) $$u(x,t)=[S(t)u](x)\in C(\mathbb{R}^N\times]0,\infty[)\ ,\quad\forall\ u\in\mathcal{C}$$

(23) $$S(t)u\leq S(t)v\ \text{ sur }\mathbb{R}^N\ ,\ \forall\ t\geq 0\ ,\ \text{si}\ \ u\leq v\ \text{ sur }\mathbb{R}^N\ ,\ u,v\in\mathcal{C}$$

(24) $$\frac{1}{t}[\{S(t)[\varphi+t\mu]\}(x)-\varphi(x)\underset{t\to 0_+}{\to}\mu-H(x,\varphi,D\varphi(x))\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}^N$$

pour tous $\mu\in\mathbb{R}$, $\varphi\in C_b^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Alors pour tout $u\in\mathcal{C}$, $u(x,t)=[S(t)u](x)$ est solution de viscosité de :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+H(x,u,\nabla_x u)=0\qquad\text{dans }\mathbb{R}^N\times]0,\infty[\ .$$

5. QUELQUES PROBLEMES ASYMPTOTIQUES

La propagation des rayons lumineux dans un milieu non homogène conduit à différents problèmes de type homogénéisation dont le prototype est le suivant : on se donne $H(x,p)$ un Hamiltonien ($\in C(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$) vérifiant (9) et périodique par rapport à x, i.e. :

(25) $$H(\hat{x},p)=H(x,p)\quad\forall\ p\in\mathbb{R}^N,\ \forall x,\hat{x}\in\mathbb{R}^N\quad\text{tel que}\quad x-\hat{x}\in\mathcal{R}$$

où $\mathcal{R} = (\mathbb{Z}T_1) \times \ldots \times (\mathbb{Z}T_N)$, et $T_1, \ldots, T_N > 0$ sont fixés. Dans ce qui suit toutes les fonctions périodiques auront la même période que ci-dessus.

On considère u_ε l'unique solution de viscosité de : $u_\varepsilon \in BUC(\mathbb{R}^N \times [0,T])\ (\forall T)$

(26) $$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + H\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla_x u_\varepsilon\right) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times]0,\infty[\ , u_\varepsilon|_{t=0} = u^o \text{ sur } \mathbb{R}^N$$

où $u^o \in BUC(\mathbb{R}^N)$. Le résultat suivant est tiré de P-L. Lions, G. Papanicolaou et S.R.S. Varadhan [21] :

<u>Théorème 5.1</u> : <u>La solution de viscosité</u> u_ε <u>de (26) converge uniformément sur</u> $\mathbb{R}^N \times [0,T]$ $(\forall T \to \infty)$ <u>vers la solution de viscosité dans</u> $BUC(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ $(\forall T < \infty)$ <u>de</u> :

(27) $$\frac{\partial u}{\partial t} + F(\nabla_x u) = 0 \qquad \underline{\text{dans}}\ \mathbb{R}^N \times]0,\infty[\ , u|_{t=0} = u^o \ \underline{\text{sur}}\ \mathbb{R}^N$$

<u>où l'Hamiltonien</u> F <u>est déterminé par le problème ergodique défini comme suit.</u> <u>Pour tout</u> $p \in \mathbb{R}^N$, $F(p)$ <u>est l'unique réel</u> λ <u>tel qu'il existe</u> $v \in C(\mathbb{R}^N)$, <u>périodique</u>, <u>solution de viscosité de</u> :

(28) $$H(y, p + \nabla_y v) = \lambda \qquad \underline{\text{dans}}\ \mathbb{R}^N .$$

<u>Remarques</u> : i) Si H est convexe par rapport à p, F est convexe.

ii) Si $H(x,p) = |p|^m - V(x)$, où $m > 0$, $N = 1$, V est périodique de période T et $\min V = 0$ (on peut toujours se ramener à ce cas) ; alors $F(p)$ est donné par

$$\begin{cases} F(p) = 0 \text{ si } |p| \leq L , \text{ si } |p| \geq L , \lambda = F(p) \text{ est l'unique réel vérifiant} \\ |p| = \frac{1}{T}\int_o^T (V(x)+\lambda)^{1/m} , \quad \lambda \geq 0 \end{cases}$$

où $L = \frac{1}{T}\int_o^T V(x)\,dx$.

Si $N \geq 2$, sous des hypothèses générales sur V , on vérifie que $F \equiv 0$ sur un voisinage de 0. Or, si $F \equiv 0$ sur $\overline{B}_L$, on voit que pour tout u^o vérifiant : $\|\nabla_x u^o\|_\infty \leq L$, la solution limite u de (27) est donnée par : $u(x,t) = u^o(x)$, $\forall\, t \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$. En d'autres termes, dans ce cas-là, à la limte, il n'y a plus de propagation !

*

* *

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. BARLES : Existence results for first order Hamilton-Jacobi equations. In These 3e cycle, Univ. Paris IX-Daphine, 1983. A paraître dans Trans. Amer. Math. Soc.

[2] E.N. BARRON, L.C. EVANS et R. JENSEN : Viscosity solutions of Isaac's equations and differential games with Lipschitz controls. A paraître dans J. Diff. Eq.

[3] M.G. GRANDALL, L.C. EVANS et P-L. LIONS : Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. A paraître dans Trans. Amer. Math.Soc

[4] M.G. GRANDALL et P-L. LIONS : Conditions d'unicité pour les solutions généralisées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre : C.R.A.S. Paris, 292 (1981), p. 183-186.

[5] M.G. GRANDALL et P-L. LIONS : Viscosity solutions of Mamilton-Jacobi equations. Trans. Amer. Math. Soc., 277 (1983), p. 1-42.

[6] M.G. GRANDALL et P.L. LIONS : Solutions de viscosité non bornées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre. C.R.A.S. Paris 1984 ; et article détaillé en préparation.

[7] M.G. GRANDALL et P-L. LIONS : Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations. Maths. Comp., à paraître.

[8] L.C. EVANS et P.E. SOUGANIDIS : Differential games and representations formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations. MRC Report #2452, Univ. of Wisconsin-Madison, 1983.

[9] W.H. FLEMING : The Cauchy problem for degenerate parabolic equations. J. Math. Mech., 13 (1964), p. 987-1008.

[10] W.H. FLEMING : The Cauchy problem for a nonlinear first order partial differential equation. J. Diff. Eq. , 5 (1969), p. 515-530.

[11] A. FRIEDMAN : The Cauchy problem for first order partial differential equations Ind. Univ. Math. J., 23, (1973), p. 27-40.

[12] D. GILBARG et N.S. TRUDINGER : Elliptic partial differential equations of second order. Springer, Berlin, 1977.

[13] H. ISHII ; Uniqueness of unbounded viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. Preprint.

[14] S.N. KRUŽKOV : Generalized solutions of nonlinear first order equations and of several variables. I, Mat. Sb., 70(112) (1966), p. 394-415 ; II, Math. USSR Sbornik, 1 (1967), p. 93-116.

[15] S.N. KRUŽKOV : Generalized solutions of the Hamilton-Jacobi equations of Eikonal type. I, Math. USSR Sbornik, 27 (1975), p. 406 - 446.

[16] O.A. LADYZENSKAYA et N.N. URAL'TSEVA : Linear and quasilinear elliptic equations. Academic Press, New-York, 1968.

[17] P-L. LIONS : Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations. Pitman, Londres, 1982.

[18] P-L. LIONS : Existence results for first order Hamilton-Jacobi equations. Ric. Mat., 1983.

[19] P-L. LIONS : Résolution de problèmes quasilinéaires. Arch. Rat. Mech. Anal., 74 (1980), p. 335-354.

[20] P-L. LIONS et M. NISIO : A uniqueness result for the semigroup associated with the Hamilton-Jacobi-Bellman operator. Proc. Japan Acad., 58 (1982), p. 273-276.

[21] P-L. LIONS, G. PAPANICOLAOU et S.R.S. VARADHAN : travail en préparation.

[22] J. SERRIN : The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables. Philos.Trans.Roy.Soc,London,Ser.A, 264 (1969), p. 413-496.

[23] P.E. SOUGANIDIS : Existence of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. J. Diff. Eq., à paraître.

[24] P.E. SOUGANIDIS : Thesis, Univ. of Wisconsin-Madison, 1983.

*

* *

*