SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. FRANCHI

Propriétés des courbes intégrales de champs de vecteurs et estimations ponctuelles d’équation elliptiques dégénérés

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1983-1984), exp. n^{o} 3, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1983-1984____A3_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1983-1984

PROPRIETES DES COURBES INTEGRALES DE CHAMPS DE VECTEURS ET ESTIMATIONS PONCTUELLES D'EQUATION ELLIPTIQUES DEGENERES

par B. FRANCHI

(résultats obtenus en collaboration avec E. Lanconelli)

Exposé n° III

22 novembre 1983

1. Cet exposé sera divisé en deux parties : la première sera consacrée aux motivations de nos techniques et à la présentation des résultats assez complets qu'on a obtenus dans une situation particulière, tandis que, dans la seconde, on cherchera à montrer comment on peut traiter des situations plus générales, même si, dans ces cas, les résultats ne sont pas encore satisfaisants. Il s'agira, en effet plutôt de l'exposition de certains exemples qui semblent, pourtant, assez significatifs

Pour un opérateur elliptique du deuxième ordre sous forme de divergence L dans un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ($L = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i (a_{ij} \partial_j)$, où $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega)$ $i,j = 1,\dots,n$), l'inégalité de Harnack et la continuité höldérienne des solutions faibles sont des résultats classiques, tandis que, pour le cas dégénéré (c'est-à-dire pour le cas où $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geqslant 0$ dans Ω $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$), il y a plusieurs résultats (voir la bibliographie de [6] et [7]) qui supposent pourtant quelque sorte de sommabilité sur la plus petite valeur propre de la matrice $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ -condition qui n'est pas satisfaite en général, même pour des cas très simples.

Supposons alors d'abord que la forme quadratique de L soit équivalente à $\sum_{j=1}^{p} \langle X_j(x), \xi \rangle^2$, où les X_j sont des champs de vecteurs lipschitziens. L'idée est d'exprimer nos conditions en termes des courbes intégrales des champs de vecteurs $X_1,\dots,X_p$. Plus exactement, on suppose que Ω soit <u>localement</u> $(X_1,\dots,X_p)$-<u>connexe</u> , c'est-à-dire que

(1.a) <u>pour tout couple</u> x,y <u>de points de</u> Ω , <u>il existe une courbe continue</u> γ <u>qui joint</u> x <u>et</u> y <u>et qui est</u>, <u>par morceaux</u>, <u>une courbe intégrale d'un des champs de vecteurs</u> $X_1,\dots,X_p$, <u>de façon que</u> γ <u>est proche de</u> x <u>si</u> y <u>est assez proche de</u> x.

En fait, dans le cas C^∞ , cette condition est strictement liée à la condition de Hörmander sur le rang de l'algèbre de Lie engendrée par $X_1,\dots,X_p$ (qui donne aussi l'inégalité d'Harnack : [2]) car, si l'hypothèse de Hörmander est satisfaite, alors, d'après le Théorème de Chow-Hermann ([15], Théorème 7.1), Ω est localement $(X_1,\dots,X_p)$-connexe.

Si Ω est localement $(X_1,\ldots,X_p)$-connexe, alors il y a une distance naturelle d qu'on peut associer à l'opérateur : c'est le plus petit temps qui est nécessaire pour aller d'un point à l'autre par des courbes intégrales par morceaux. Dans le cas C^∞, cette distance a été utilisée par plusieurs auteurs ([3],[4],[11], [14], voir aussi [1] et [8]).

Comme, en fait, la condition (1.a) peut être formulée sans supposer une régularité C^∞ pour le champ $X_1,\ldots,X_p$, cette condition semble une version "faible" de la condition de Hörmander. En plus, il faudra supposer que la métrique d ne soit pas plate quand elle s'annule (cette condition est liée aux résultats de [3], [4] et au fait que, dans le cas C^∞, on peut s'arrêter après un nombre fini de commutateurs).

On va maintenant exposer les résultats de [6] et [7].

Considérons des fonctions réelles non négatives en $\mathbb{R}^n$ $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ qui satisfont les conditions suivantes :

(1.b) λ_j <u>est absolument continue en toutes les variables</u>, $j = 1,\ldots,n$;

(1.c) λ_j <u>est lipschitzienne en</u> x_j, <u>uniformément en</u> x_k, $k \neq j$, $k,j = 1,\ldots,n$;

(1.d) <u>il existe des constantes</u> $\rho_{j,k} \geqslant 0$ <u>telles que</u>

$$x_k(\partial_k \lambda_j(x)) \leqslant \rho_{j,k}\, \lambda_j(x) \quad \text{p.p.}$$

$\forall\, j,k = 1,\ldots,n,\ j \neq k.$

(1.e) $\Omega \subseteq \bar{\Omega} \subseteq \Omega_1$ <u>où</u> Ω_1 <u>est un ouvert localement</u> $(\lambda_1\partial_1,\ldots,\lambda_n\partial_n)$<u>-connexe</u>.

Il faut remarquer que la condition (1.d) est "presque nécessaire" ([6], remarque 2.9) et est liée au fait que la métrique d ne soit pas plate quand elle s'annule. En effet, comme on le verra ensuite, les $\rho_{j,k}$ mesurent la régularité - dans le sens des espaces de Sobolev - des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles que $\lambda_j\, \partial_j u \in L^2(\Omega)$, $j = 1,\ldots,n$.

On a alors les résultats suivants :

<u>Théorème 1.1</u> (Inégalité de Harnack [6], Théorème 5.3) : <u>S'il existe</u> $m > 0$ <u>tel que</u>
$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\,\xi_j \geqslant m \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2(x)\, \xi_j^2 \quad \forall\,(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ <u>et si</u> Ω <u>est connexe,</u>

toute solution faible de $Lu = 0$ *est localement bornée et, pour tout compact* $K \subseteq \Omega$, *il existe* $C_K > 0$ *tel que*

$$\sup_K u \leqslant C_K \inf_K u$$

pour toute $u \geqslant 0$ *solution faible de* $Lu = 0$.

(En effet, il est nécessaire d'abord de définir correctement l'espace de solutions faibles, ce qui est fait en [6]).

Théorème 1.2 ([7] , Théorème 4.4) : *Si* $m \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2(x)\xi_j^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant m^{-1} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 (x)\xi_j^2 \quad \forall (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^u$ *et, en plus,*

(1.2.a) $\lambda_j(x) = \lambda_j^{(1)}(x_1)\dots \lambda_j^{(n)}(x_n)$, $j = 1,\dots,n$, *où les* $\lambda_j^{(k)}$ *sont continues non négatives de classe* C^1 *hors de l'origine* ;

(1.2.b) $0 \leqslant t(\lambda_j^{(k)})'(t) \leqslant \rho_{j,k} \lambda_j^{(k)}(t)$ pour $t \neq 0$, $j \neq k$, $j,k = 1,\dots,n$;

(1.2.c) $\lambda_j^{(k)}(t) = \lambda_j^{(k)}(|t|) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$, $j,k = 1,\dots,n$, $j \neq k$.

alors les solutions faibles de $Lu = 0$ *sont localement höldériennes en* Ω .

Pour démontrer 1.1 et 1.2, on prouve d'abord que la forme quadratique $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2(x)\, \xi_j^2$ est localement minorée (dans le cas du théorème 1.2 est localement équivalente) à une forme $\sum_{j=1}^{n} \mu_j^2(x)\xi_j^2$ où les μ_j sont (quitte à renuméroter les variables) du même type que les λ_j du theorème 1.2 et, en plus, $\mu_j(x) = \mu_j(x_1,\dots,x_{j-1})$.
Or, dans ce cas-là, on connaît très bien la structure des boules pour la métrique d ([5]), et on peut chercher à adapter la technique de Moser [9] ou Bombieri-Moser [10] pour l'espace de type homogène (Ω,d).

Ici on voudrait illustrer surtout le premier point de cette technique qui peut expliquer la nature de nos hypothèses. Tout d'abord, on veut montrer que toute solution faible de $Lu = 0$ qui appartient à $L^2_{loc}(\Omega)$ appartient aussi à $L^p_{loc}(\Omega)$, avec p convenable, $p > 2$. Pour cela, nous montrons un résultat plus fort, c'est à dire que, si l'on désigne par $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\mu}(\Omega)$ la fermeture de $C_o^\infty(\Omega)$ relativement à la norme

$$\| u;W_\mu^{1,2}(\Omega)\| = (\| u;L^2(\Omega)\|^2 + \sum_{j=1}^{n} \| \mu_j \partial_j u \; ;L^2(\Omega)\|^2)^{1/2}$$

(ici $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_n)$, alors $\overset{\circ}{W}{}_\mu^{1,2}(\Omega)$ est plongé continuement dans l'espace de Sobolev $W^{\varepsilon,2}(\Omega)$, pour un ε convenable (qui dépend d'une façon explicite des $\rho_{j,k}$). De cela, on tire le résultat désiré par des techniques usuelles et le théorème de Sobolev classique.

Pour prouver ce plongement, on doit estimer des normes du type

$$\text{(1.f)} \qquad \int_0^1 dt\; h^{-1-2\varepsilon} \int dx |u(x+he_j) - u(x)|^2 \;, \qquad j = 1,\ldots,n \;,$$

où $e_j = (\underset{1}{0},\ldots,\underset{j}{1},\ldots \underset{n}{0})$. L'idée est de factoriser la translation euclidienne $x \to x+he_j$ en choisissant le chemin le plus naturel, c'est à dire celui qui réalise (au moins à une équivalence près) la distance $d(x,x+he_j)$. Or, dans le cas qu'on considère, on sait bien ([5]) que cela peut être accompli par une translation $x \to \exp(-\rho Y_1)\exp(-\rho Y_2)\ldots\exp(-\rho Y_{j-1}).\exp(\rho Y_j)\exp(\rho Y_{j-1})\ldots\exp(\rho Y_1)x$, où $Y_j = \mu_j \partial_j$ et $\rho = \rho(x,h)$ (à savoir une translation le long d'une polygonale où le temps est uniformément distribué dans chaque morceau du chemin).

Cette technique est évidemment liée à une connaissance très précise de la géométrie des boules et, en plus, il n'est pas évident de donner des conditions assez explicites sur les champs dans le cas général. D'autre part, si, pour le plongement dans L^p, $p > 2$, cette technique peut être améliorée en substituant aux courbes polygonales d'autres familles de courbes convenables (comme on fait dans la seconde partie de l'exposé), pourtant elle est utilisée aussi pour prouver un des points suivants, c'est à dire l'inégalité de Poincaré, tandis que la technique développée dans la partie suivante n'est pas encore assez raffinée pour traiter cette dernière inégalité dans un cas plus général.

Finalement, nous remarquons que le Théorème 1.2 nous donne la continuité höldérienne des solutions faibles dans le cas très simple de l'équation Lu = 0, où

$$L = \partial_1^2 + \sum_{j=2}^{n} |x_1|^{2\alpha_{j,1}} |x_2|^{2\alpha_{j,2}} \ldots |x_{j-1}|^{2\alpha_{j,j-1}} \partial_j^2$$

($\alpha_{j,k} \in [0,+\infty[$), tandis que, pour cet opérateur, ne sont pas satisfaites, en général, les hypothèses des résultats données dans la littérature précédente, même pour l'inégalité de Harnack.

2. Considérons toujours l'opérateur $\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\partial_j)$ de la première partie et supposons que la forme quadratique $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j$ soit équivalente à la forme quadratique $\langle B(x)\xi,\xi\rangle$, où $B = {}^tB \geqslant 0$ est une matrice de classe C^1 dans Ω; nous cherchons maintenant à prouver une inégalité de plongement du type

(2a) $$\|u;L^p(\Omega)\| \leqslant C(\|B^{1/2}\nabla u\,;(L^2(\Omega))^n\| + \|u;L^2(\Omega)\|),$$

$\forall u \in C_0^\infty(\Omega)$ et pour $p > 2$ convenable.

L'idée est d'adapter une formule de représentation intégrale classique à la situation géométrique dégénérée en substituant à la convolution "euclidienne" une convolution obtenue à partir d'une famille de translations qui sont "presque géodésiques" pour l'opérateur.

Nous procédons de la façon suivante : si Z appartient à $\bar{V} \subseteq \Omega$, où V est un voisinage d'un point fixé et $y \in \mathbb{R}^n$, on désigne par $x(t,z;y)$ la solution du problème de Cauchy

(2.b) $$\begin{cases} \dot{x} = B(x)y \\ x(0) = z \end{cases}$$

(Nous remarquons que, comme on veut étudier des propriétés locales, on peut toujours supposer $B \in L^\infty(\mathbb{R}^n))$. On a alors le résultat suivant.

<u>Théorème 2.1</u> : <u>Soit</u> $B = {}^tB \geqslant 0$, $B \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$; <u>s'il existe</u> $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $r, C, \alpha \in \mathbb{R}_+$, $t_0 \in]0,1]$ <u>tels que</u> :

i) $\forall z \in \bar{V}$, $\forall t \in]0,t_0]$ <u>l'application</u>

$$y \longrightarrow x(t,z;y)$$

<u>est injective dans</u> $B(y_0,2r)$;

ii) $\forall z \in V$, $\forall y \in B(y_0,2r)$, $\forall t \in [0,t_0]$

$$|\det \frac{\partial x}{\partial y}(t,z;y)| \geqslant Ct^{\alpha},$$

alors $\forall p \in [2, 2\alpha/(\alpha-2)[$ $\exists C_p > 0$ tel que

$$\| u; L^p(V)\| \leqslant C_p(\| \sqrt{B}\, \nabla u; (L^2(\Omega))^n \| + \| u; L^2(\Omega)\|)$$

$\forall u \in C_o^\infty(\Omega)$.

Démonstration : Pour tout $t \in [0, t_o]$ nous posons

$$u(z,t) = \int dy\; u(x(t,z;y))K(y),$$

où $K \in C_o^\infty(B(y_o,r))$ est telle que $K \geqslant 0$ et $\int dy\, K(y) = 1$. Evidemment, $u(z,0) = u(z)$, et donc on peut écrire

$$u(z) = u(z,t_o) - \int_o^{t_o} dt \int dy < B(x(t,z;y))y, \nabla u(x(t,z;y)) > K(y) =$$

$$= I_1 + I_2 .$$

D'abord, nous estimons la norme de I_2. On a :

$$\| I_2 ; L^p(V)\| \leqslant \int_o^{t_o} dt(\int_V dz(\int dy < B(x(t,z;y))\nabla u(x(t,z;y)), \nabla u(x(t,z;y)) >^{1/2} .$$

$$. <B(x(t,z;y))y,y>^{1/2} K(y))^p)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \int_o^{t_o} dt(\int_V dz(\int dy |B^{1/2}(x(t,z;y))\, \nabla u(x(t,z;y)|K(y))^p)^{1/p} =$$

$$= C_1 \int_o^{t_o} dt\; I_3 .$$

Si maintenant on pose $x(t,z;y) = y'$ (ce qui est possible à cause de i) et ii)), et $B(y_o,r) = S$, on a :

$$I_3 = (\int_V dz(\int_{x(t,z;S)} dy' |B^{1/2}(y')\, \nabla u(y')\,|\, K(\rho(t,z;y')).$$

$$. \; |\det \frac{\partial x}{\partial y}(t,z;\, \rho(t,z;y'))|^{-1})^p)^{1/p} ,$$

où $\rho(t,z,.) = (x(t,z,.))^{-1}$. Maintenant nous posons $q = (1/p + 1/2)^{-1}$; on a :

(2.1.a) $$\int_{\mathbb{R}^n} dy'\ K^q(\rho(t,z;y'))\,|\det \frac{\partial x}{\partial y}(t,z;\rho(t,z;y'))|^{-q} \leq$$

$$\leq C_2\ t^{\alpha(1-q)} \quad , \text{ p.p.} \quad \text{pour } z \in V \ ;$$

(2.1.b) $$\int_V dz\ K^q(\rho(t,z;y'))\,|\det \frac{\partial x}{\partial y}(t,z;\rho(t,z;y'))|^{-q} \leq$$

$$\leq C_2 t^{\alpha(1-q)} \quad \text{p.p; } \quad \text{pour } y' \in \mathbb{R}^n$$

(on peut toujours prolonger $K(\rho(t,z,.))$ par zéro hors de $x(t,z;S)$). En effet, l'intégrale en (2.1.a) est égale à

$$\int dy\ K^q(y)\,|\det \frac{\partial x}{\partial y}(t,z;y)|^{1-q} \leq (\text{à cause de ii), car } q \geq 1)$$

$$\leq C_3 t^{\alpha(1-q)} \int dy\ K^q(y) = C_4 t^{\alpha(1-q)} \ .$$

D'autre part, l'inégalité (2.1.a) peut être prouvée d'une façon analogue.

On peut alors utiliser une inégalité de Young généralisée (voir [13] , Théorème 4.1.2) pour obtenir l'estimation

$$I_3 \leq C_5\ t^{\alpha(1-q)/q}\ (\int_\Omega |B^{1/2}(y)\ \nabla u(y)|^2)^{1/2} \ ,$$

et donc $\int_o^{t_o} dt\ I_3 \leq C_6\ \|B^{1/2}\ \nabla u;(L^2(\Omega))^n\|$, car $\alpha(1-q)/q = \alpha(1/q - 1/2) > -1$.

Finalement, I_1 peut être estimé d'une façon analogue.

<u>Remarque 2.2</u> : Il est facile de voir qu'on peut utiliser le théorème 2.1 dans le cas considéré dans la première partie de l'exposé. Comme on considère des estimations dans L^p, on peut toujours se ramener au cas où $V \subseteq (]0,+\infty[)^n$. En ce cas, on a évidemment

$$x(t,z;y) = (z_1 + ty_1, z_2 + \int_o^t \mu_2^2(z_1 + sy_1)y_2\ ds, \ldots)$$

et donc i) est satisfaite. D'autre part, si y appartient à $B(1,\ldots,1),1/2)$, ii) est satisfaite, car

$$\det \frac{\partial x}{\partial y}(t,z;y) = \prod_{k=1}^{n} \int_0^t \mu_k^2(z_1 + sy_1, z_2 + \int_0^s \mu_2^2(z_1 + s_1y_1)ds_1y_2, \dots)ds$$

$$\geqslant \prod_{k=1}^{n} \int_0^t \mu_k^2(sy_1, \int_0^s \mu_2^2(s_1y_1)ds_1y_2, \dots)ds$$

$$\geqslant \prod_{k=1}^{n} \int_0^t \mu_k^2(sy_1, c_2 s^{2\rho_{2,1}+1}, \dots)ds$$

$$\geqslant c_0 \prod_{k=1}^{n} t^{1+2\rho_{k,1} + 2\rho_{k,2}(2\rho_{2,1}+1)+\dots},$$

car, d'après (1,d), $\mu_k(x_1,\dots, \theta x_i,\dots,x_{k-1}) \geqslant \theta^{\rho_{k,i}} \mu_k(x)$ si $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Nous remarquons aussi que la constante α est déterminée explicitement à partir des $\rho_{j,k}$.

Remarque 2.3 : Si la matrice B est diagonale, la condition ii) peut être formulée d'une façon plus explicite. Soit $W = B((1,\dots,1), 1/2)$; supposons alors que $\langle B(x)\xi,\xi\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2(x)\, \xi_j^2$, où $x \to \lambda_j^2(x)$ est de classe C^1. Si nous posons $u_j = \frac{\partial x}{\partial y_j}(t,z;y)$, on a :

$$|\det(u_1,\dots,u_n)| = (\det{}^t(u_1,\dots,u_n)(u_1,\dots,u_n))^{1/2} = (\det(\langle u_i,u_j\rangle)_{i,j=1,\dots,n})^{1/2}$$

D'autre part, la k-ème valeur propre de $(\langle u_i,u_j\rangle)_{i,j=1,\dots,n}$ est égale à

$$\min_{\dim V=k} \max_{\xi\in V\cap S^{n-1}} Q(\xi), \text{ où } Q(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle u_i,u_j\rangle\xi_i\xi_j = \left|\frac{\partial}{\partial\lambda} x(t,z;y+\lambda\xi)\Big|_{\lambda=0}\right|^2 = |v|^2$$

et il est bien connu que le vecteur v est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot v = C(t)v + B(t)\xi \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

où $C(t) = \frac{\partial}{\partial x} B(x)y \Big|_{x=x(t,z;y)}$ et $B(t) = B(x(t,z;y))$.

Maintenant, si $U(t)$ est l'opérateur d'évolution associé à $C(t)$, $v(t) = U(t)\int_0^t U^{-1}(s)B(s)\,\xi ds$ et, d'après nos hypothèses, on peut supposer toujours $C_1^{-1} \leqslant |U(s)| \leqslant C_1$, $C_1^{-1} \leqslant |U^{-1}(s)| \leqslant C_1$,

$$|(U(s)^{-1})'| \leq C_1 \quad \forall s \in [0,t_o] \ , \ \forall z \in V \ , \ \forall y \in W.$$

Donc, on a :

$$|v(t)| \geq C_1^{-1} \left|\int_o^t U^{-1}(s)B(s)\,\xi\, ds\right| \geq C_1^{-1}\Big(\left|U^{-1}(t)\int_o^t B(s)\xi\, ds\right| -$$

$$- \left|\int_o^t (U^{-1}(S))'\Big(\int_o^s B(\sigma)\,\xi\, d\sigma\Big)dS\right|\Big) \geq C_1^{-1}\Big(C_1^{-1}\left|\int_o^t B(s)\,\xi\, ds\right| - C_1\int_o^t\left|\int_o^s B(\sigma)\,\xi\, d\sigma\right|ds\Big).$$

Si nous prouvons maintenant que, pour t suffisamment proche de zéro et pour tout $(z,y) \in V \times W$, on a

$$\text{(2.3.a)} \qquad \int_o^t\left|\int_o^s B(\sigma)\,\xi\, d\sigma\right|ds \leq (2C_1^2)^{-1}\left|\int_o^t B(s)\xi\right|,$$

on peut conclure que $|v(t)| \geq C_2\left|\Big(\int_o^t B(s)ds\Big)\xi\right|$ et donc ii) est satisfaite si $t^{\alpha_j} \leq C_3\int_o^t \lambda_j^2(x(s,z;y))ds$, à savoir si

$$\text{ii')} \qquad t^{\alpha_j} \leq C_4(x_j(t,z;y) - z_j) \qquad (\alpha_j \geq 1)$$

$$\forall t \in [0,t_o] \ , \ \forall (z,y) \in V \times W, \ j = 1,\dots,n.$$

D'autre part

$$\int_o^t \left|\Big(\int_o^s B(\sigma)d\sigma\Big)\xi\right| ds \leq \sum_{j=1}^n \int_o^t\Big(\int_o^s \lambda_j^2(x(\sigma,z;y))d\sigma\Big)\,|\xi_j|$$

$$\leq t\sum_{j=1}^n\Big(\int_o^t \lambda_j^2(x(\sigma,z;y))d\sigma\Big)\,|\xi_j| \leq C_5 t\left|\Big(\int_o^t B(\sigma)d\sigma\Big)\xi\right| \quad ,$$

et donc (2.3.a) est démontrée.

Remarque 2.4 : Soient $n = 2$ et B diagonale. Si ii') est satisfaite, on peut supposer toujours $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. En plus, $b(x(.,z;y))$ ne peut s'annuler identiquement près de zéro (à cause de ii')). Donc, $\forall (z,y) \in V \times W$ la fonction $\frac{\partial x_2}{\partial y_2}(.,z;y)$ (qui est solution du problème de Cauchy $\dot{u} = \partial_2 b(z_1 + ty_1, x_2(t,z;y))u + b(x(t,z;y))$, $u(0) = 0$) est non négative. Alors i) est satisfaite, car ii) est satisfaite et les mineurs principaux de $\frac{\partial x}{\partial y}$ sont négatifs.

Donnons maintenant un exemple très simple qui montre pourtant comment on peut, par cette méthode, traiter des situations géométriques différentes de celles de la première partie de l'exposé.

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |\rho(x_1) - x_2|^\gamma \end{pmatrix}$, où $\gamma > 1$, $\rho \in C^{m+1}$,

$\rho(0) = \rho'(0) = \ldots = \rho^{(m-1)}(0) = 0$, $\rho^{(m)}(0) \neq 0$. Nous prouverons que ii') est satisfaite dans un voisinage de l'origine, avec $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = m\gamma + 1$. Il suffit évidemment de vérifier ii') pour x_2 ; si nous posons $\omega = x_2 - z_2$, ω est solution du problème de Cauchy

$$\dot{\omega} = |\rho(z_1 + ty_1) - z_2 - \omega|^\gamma y_2 , \quad \omega(0) = 0 ,$$

où $(y_1,y_2) \in B(1,1),1/2)$. D'autre part, il existe $C_\gamma > 0$, $S = S(t) \in]0,t[$ tels que, $\forall (z,y) \in V \times W$,

$$\omega(t) \geq \frac{1}{2\gamma} | \sum_{k=o}^{m} \rho^{(k)}(z_1)(ty_1)^k/k! - z_2| - C_\gamma |(ty_1)^{m+1} \rho^{(m+1)}(z_1 + sy_1)/(m+1)$$

$$- \omega|^\gamma \geq \frac{1}{2\gamma} | \sum_{k=o}^{m} \rho^{(k)}(z_1)(ty_1)^k/k! - z_2|^\gamma - C_1\omega - C_2 t^{(m+1)\gamma}$$

$\forall\, t \leq t_o$, où $C_i = C_i(t_o,\gamma,V,W)$, $i = 1,2$; alors $(\omega(s) \leq \omega(t)$ si $t \leq s)$

$$\omega(t) \geq c_3 \int_0^t | \sum_{k=o}^{m} \rho^{(k)}(z_1)(sy_1)^k/k! - z_2|^\gamma d^\gamma s - C_4 t^{\gamma(m+1)+1} =$$

$$= C_5\, t^{m\gamma+1} \left(\int_o^1 | \sum_{k=o}^{m-1} \rho^{(k)}(z_1) \frac{(sy_1)^k}{k!} t^{k-m} - z_2 t^{-m} + \frac{1}{m!} \rho^{(m)}(z_1) s^m|^\gamma\, ds - \right.$$

$$\left. - C_6 t^\gamma \right) \geq C_7 t^{m\gamma+1}$$

si t_o est convenable et $0 < C_o \leq \rho^{(m)}(Z) \leq C_o$ en V, car $\int_o^1 | \sum_{k=0}^{m-1} \xi_k s^k + \xi_m s^m|^\gamma ds$ est inférieurement bornée par une constante positive si $(\xi_o,\ldots,\xi_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ et $C_o/m! \leq \xi_m \leq C_o/m!$

Nous remarquons explicitement que, dans ce cas, le champ ∂_1 qui permet de "sortir" de la courbe de dégénération peut être tangent à cette courbe à l'origine.

Remarque 2.5 : Le théorème 2.1 peut s'appliquer aussi à des situations où une des valeurs propres de la matrices B est identiquement nulle (ce qui est donc tout à fait différent du cas diagonal). En effet, soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & |x_1|^{2\gamma} & |x_1|^{\gamma} \\ 0 & |x_1|^{\gamma} & 1 \end{pmatrix}$$

(ce qui correspond à l'opérateur $\partial_1^2 + (|x_1|^{\gamma}\partial_2 + \partial_3)^2)$, $\gamma > 1$.

Soit toujours $y \in S((1,1,1),1/2)$; ici $x(t,z;y) =$
$= (x_1,x_2,x_3) = (z_1 + ty_1,\ z_2 + \int_0^t |z_1 + sy_1|^{2\gamma} ds\ y_2 + \int_0^t |z_1 + sy_1|^{\gamma} ds\ y_3\ ,$
$z_3 + \int_0^t |z_1 + sy_1|^{\gamma} ds\ y_2 + ty_3)$. L'hypothèse i) est satisfaite, car
$(\int_0^t |z_1 + sy_1|^{\gamma} ds)^2 < t \int_0^t |z_1 + sy_1|^{2\gamma} ds$. D'autre part,

$$\frac{\partial x}{\partial y}(t,z;y) = t(t\int_0^t |z_1 + sy_1|^{2\gamma} ds - (\int_0^t |z_1 + sy_1|^{\gamma} ds)^2) =$$
$$= (t^{3+2\gamma}/y_1^{2\gamma})(\int_0^1 |z_1/ty_1 + s|^{2\gamma} ds - (\int_0^1 |z_1/ty_1 + s|^{\gamma} ds)^2) \geqslant ct^{3+2\gamma},$$
car $\inf_{a \in \mathbb{R}} \int_0^1 |a+s|^{2\gamma} ds - (\int_0^1 |a + s|^{\gamma} ds)^2 > 0$.

Remarque 2.6 : Pour appliquer la technique de Moser, il suffit que p soit plus grand que 2. Pour cela donc, le théorème 2.1 nous donne un résultat suffisant, même si les valeurs qu'on obtient ne sont pas optimales. Cela, d'une part, parce qu'on n'obtient pas la valeur maximale, même dans le cas elliptique, mais surtout parce que la valeur même de α n'est pas optimale, car elle dépend du choix particulier de la famille des courbes $x(.,z;y)$. En fait, dans le cas de la remarque 2.2, si $n=2$ et si $\rho_{2,1} = \rho > 0$, d'après nos estimations des normes du type (1.f) et les théorèmes de plongement pour les espace de Sobolev anisotropes de Nikol'skiĭ ([12] , chapitre 6), on peut voir que, en effet, on a le plongement de $\overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{1,2}$ dans L^p, avec $p < 2(2+\rho)/\rho$, tandis que $2\alpha/(\alpha - 2) = 2(1 + \rho)/\rho$. Supposons maintenant que la matrice $B^{1/2}$ soit assez régulière (ce qui arrive, par exemple, si les μ_j satisfont les conditions de la première partie de l'exposé). On peut alors répéter la démonstration du Théorème 2.1 en utilisant la famille $x^*(.,z;y)$ qui est solution du problème de Cauchy (2.b) où B a été substituée par $B^{1/2}$. On obtient alors $2\alpha/(\alpha-2) = 2(2+\rho)/\rho$. On peut faire des considérations analogues aussi dans le cas de la remarque 2.4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Azencott et al : Géodésiques et diffusions en temps petit, Astérisque 84-85 (1981).

[2] J. M. Bony : Principe de maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 19 (1969), 277-304.

[3] C. Fefferman et D. Phong : Pseudodifferential operator with positive symbols. Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz (1981), n°23.

[4] C. Fefferman et D. Phong : Subelliptic eigenvalue problems, Conference on Harmonic Analysis (Chicago 1981), W. Beckner et al. ed. Wadsworth (1981), 590-606.

[5] B. Franchi et E. Lanconelli : Une métrique associée à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, actes du colloque "Linear partial and pseudodifferential operators", Torino (1982), Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec., Torino, à paraître.

[6] B. Franchi et E. Lanconelli : An embedding theorem for Sobolev spaces related to non-smooth vector fields and Harnack inequality, à paraître.

[7] B. Franchi et E. Lanconelli : Hölder regularity theorem for a class of linear non uniformly elliptic operators with measurable coefficients. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, à paraître.

[8] B. Gaveau : Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents. Acta Math. 139 (1977), 95-153 ;

[9] J. Moser : A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. Pure Appl. Math., 13 (1960), 457-468.

[10] J. Moser : On a pointwise estimate for parabolic differential equation, Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), 727-740.

[11] A. Nagel, E. M. Stein et S. Wainger : Boundary behavior of functions holomorphic in domains of finite type, Proc Nat. Acad. Sci. U.S.A. 78 (1981), 6596-6598.

[12] S. M. Nikol'skiĭ : Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. Springer, Berlin-Heidelberg-New-York, 1975.

[13] G. O. Okikiolu : Aspects of the theory of bounded integral operators in L^p-spaces. Academic Press, London-New York, 1971.

[14] P. Pansu : Une inégalité isopérimétrique sur le groupe de Heisenberg. C. R. Acad. Sc. Paris, Ser. A, 295 (1982), 127-130.

[15] H. J. Sussmann : Orbits of families of vector fields and integrability of distribution. Trans. Amer. Math. Soc., 180 (1973), 171-188.

* * *