Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

S. Alinhac
G. Métivier

Propagation de l'analyticité locale pour l'équation d'Euler

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1983-1984), exp. n^{o} 16, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1983-1984____A16_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1983-1984

PROPAGATION DE L'ANALYTICITE LOCALE POUR L'EQUATION D'EULER

par S. ALINHAC et G. METIVIER

Exposé n° XVI

15 Mai 1984

1. INTRODUCTION

Cet exposé comprend deux parties : l'une consacrée à l'équation d'Euler, l'autre aux opérateurs pseudo-différentiels analytiques, étant bien entendu que ces deux parties sont étroitement reliées. Soulignons d'abord que tout ce qui touche l'équation d'Euler a été obtenu en collaboration avec S. Alinhac [3].

Les équations d'Euler pour un fluide incompressible, homogène et non visqueux s'écrivent, avec les notations habituelles

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u = \operatorname{grad} p + f \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_o \end{cases}$$

où la variable $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, les inconnues sont $u = (u_1,\ldots,u_n)$ et p, et les données f et u_o.

Le problème est d'étudier la propagation de l'analycité pour une solution de (1.1), dans un domaine où, a priori, elle est assez régulière. Dans [7] [8] et [9], Bardos, Benachour et Zerner ont étudié le problème de l'analyticité globale et on veut ici préciser l'étude en s'attachant à l'analyticité locale des solutions .

(1.1) n'est pas un système différentiel hyperbolique et les résultats de Alinhac-Métivier [1],[2] ne peuvent être directement appliqués. Cependant, comme il est bien connu, la pression p s'exprime en fonction de u par l'intermédiaire des équations :

$$(1.2)\qquad \Delta p = \operatorname{div}(u.\nabla u) - \operatorname{div} f$$

ou encore

$$(1.3)\qquad p = \Delta^{-1}(\operatorname{div}(u.\nabla u) - \operatorname{div} f)$$

On remarque que, grâce à l'équation div u = 0, on a :

(1.4) $$\operatorname{div}(u.\nabla u) = F(u) = \sum_{j,k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} .$$

Notant P l'opérateur grad Δ^{-1} et $f' = f - P \operatorname{div} f$, le système (1.1) prend alors l'allure d'un système hyperbolique pseudodifférentiel non linéaire

(1.5) $$\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u = P\, F(u) + f' .$$

L'objet du travail est alors d'étendre les résultats de [1] à des systèmes du type (1.5).

Avant de poursuivre, notons que P est de degré −1, et que F(u) ne fait intervenir que des dérivées d'ordre 1 en u (cf. (1.4)). Par conséquent l'expression P F(u) est de degré 0 et la partie principale du système (1.5) est tout simplement le système différentiel hyperbolique <u>diagonal</u> :

(1.6) $$\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u = f' .$$

On s'attend donc à ce que la régularité se propage le long des bicaractéristiques de (1.6), c'est-à-dire ici, le long des trajectoires du mouvement du fluide, c'est-à-dire le long des courbes intégrales du champ de vitesses u :

(1.7) $$\frac{dx}{dt} = u(t,x(t)) .$$

Enonçons maintenant un résultat précis : considérons sur un cylindre $[0,T] \times \Omega$ une solution u(t,x) de (1.1) vérifiant :

(1.8) $$\begin{cases} u \in C^0([0,T]\, ;\, H^{\mu+1}(\Omega)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \in C^0([0,T]\, ;\, H^{\mu}(\Omega)) \end{cases}$$

où μ est un entier $> \frac{n}{2}$. Pour des théorèmes d'existence de solutions vérifiant (1.8) on renvoie à Kato [14], Ebin-Marsden [12], Bourguignon-Brezis [11] ou Temam [16].

Fixons $x_o \in \Omega$ et notons $\gamma(t)$ la courbe intégrale de (1.7) issue au temps $t=0$ du point x_o ; d'après (1.8), u est de classe C^1 sur $[0,T]\times\overline{\Omega}$ et on peut supposer γ définie sur $[0,T]$ avec $\gamma(t) \in \Omega$.

Théorème 1 : Si la donnée u_o est analytique en x_o, et si f est analytique sur γ, alors la solution u est analytique sur γ.

Ce théorème peut être étendu dans différentes directions : on peut considérer d'abord le cas d'un fluide non homogène :

$$(1.9) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\,\nabla u = \dfrac{1}{\rho}\ \mathrm{grad}\ p + f \\[2mm] \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\,.\,\nabla\rho = 0 \\[2mm] \mathrm{div}\ u = 0\,. \end{cases}$$

où les inconnues sont u, ρ et p.

L'opérateur P intervenant dans (1.5) est alors à remplacer par $\frac{1}{\rho}\ \mathrm{grad}.(\mathrm{div}\ \frac{1}{\rho}\ \mathrm{grad})^{-1}$; il dépend donc de l'inconnue ρ.

On peut considérer ensuite le système (1.1) ou (1.9) sur un ouvert borné ; on adjoint alors la condition aux limites

$$(1.10) \qquad u\,.\,n = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega$$

n désignant la normale à $\partial\Omega$.

Ces deux extensions ont été faites par Le Bail. (Travaux en cours de rédaction).

Plus généralement la méthode s'applique à des systèmes qui couplent une partie hyperbolique (en t) et une partie elliptique en x, par exemple du type suivant:

$$(1.11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + F(u,p,\ \partial_x u, \partial_x p) = 0 \\[2mm] A(u,p,\ \partial_x u\,,\ \partial_x p\,,\ \partial_x^2 u\,,\ \partial_x^2 p\,) = 0 \end{cases}$$

A étant elliptique par rapport à p.

2. SCHEMA DE LA DEMONSTRATION

Soit $\omega \subset \Omega$ un petit voisinage de x_o ; soit ω_t son image par le flot de (1.7) et soit $\mathcal{C} = \{(t,x) \in [0,T] \times \Omega \ / \ x \in \omega_t\}$. On suppose u_o analytique sur $\bar{\omega}$, f analytique sur $\bar{\mathcal{C}}$ et on montre que u est analytique sur $\mathcal{C}$. Tout d'abord, en utilisant les résultats de J.M. Bony [10] on vérifie que u est C^∞ sur $\mathcal{C}$.

Pour $\delta > 0$ assez petit on note $\omega_\delta = \{x \in \omega \ / \mathrm{dist}(x,\partial\omega) > \delta\}$ et $\omega_{t,\delta}$ son image par le flot de (1.7). On introduit alors les notations suivantes :

(2.1) $$|u|_{N,t,\delta} = \sup_{|\alpha| = N} \| \partial_x^\alpha u(t.) \|_{H^\mu(\omega_{t,\delta})}$$

(2.2) $$|u|_{N,t} = \sup_{\delta \in]0,\delta_o]} \delta^{N-1} |u|_{N,t,\delta}$$

ε et λ étant des paramètres on pose :

(2.3) $$\|u\|_N = \sup_{1 \leqslant p \leqslant N} \ \sup_{t \in [0,1]} \frac{e^{-\lambda t(p-1)} \varepsilon^{p-1}}{m_{p-1}} |u|_{p,t}$$

où $$m_p = \frac{p!}{(p+1)^2} .$$

On a : $\|u\|_1 \leqslant \|u\|_{C^o([0,T] \ ; \ H^{\mu+1}(\Omega))}$ et la démonstration consiste à montrer par récurrence sur N que

(2.4) $$\forall \ N \geqslant 1 : \ \|u\|_N \leqslant H$$

si les paramètres ε, λ et H sont bien choisis.

Pour cela, on reprend la méthode de [1] : dériver l'équation, et utiliser les inégalités d'énergie. Soit $|\alpha| = N \geqslant 2$; posons $v = \partial^\alpha u$; en dérivant (1.1) il vient :

$$(2.5) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + u \, . \, \nabla v = g$$

où g vérifie

$$(2.6) \qquad \| g(t.\ ) \|_{H^\mu(\omega_{t},\delta)} \leqslant C \Big\{ |\text{grad } p|_{N,t,\delta} + N|u|_{N,t,\delta} + $$
$$+ e^{\lambda(N-1)t} \varepsilon^{1-N} \delta^{1-N} N \, m_{N-1} (\| u \|^2_{N-1} + 1) \Big\} .$$

Pour l'équation (2.5) on a les inégalités d'énergie suivantes :

$$(2.7) \qquad \| v(t.\ ) \|_{H^\mu(\omega_{t,\delta})} \leqslant C \Big\{ \| v(0,.\ ) \|_{H^\mu(\omega_\delta)} + \int_0^t \| g(s,\ .\ ) \|_{H^\mu(\omega_{s,\delta})} ds \Big\} .$$

Avec (2.6) multipliant δ^{N-1}, et prenant le sup en δ il vient :

$$(2.8) \qquad |u|_{N,t} \leqslant C \Big\{ |u|_{N,o} + \int_o^t (|\text{grad } p|_{N,s} + N|u|_{N,s}) \, ds + $$
$$+ \varepsilon^{1-N} \frac{e^{\lambda(N-1)t}}{\lambda} m_{N-1} (\| u \|^2_{N-1} + 1) \Big\} .$$

L'ingrédient fondamental est alors le suivant :

<u>Lemme 2</u> : <u>Il existe des constantes</u> C et ε_1 <u>telles que pour tout</u> $N \geqslant 1$, <u>tout</u> $t \in [0,T]$ <u>on ait</u> : pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$

$$|\text{grad } p|_{N,t} \leqslant C \Big\{ |u|_{N,t} + \varepsilon^{1-N} e^{\lambda(N-1)t} m_{N-1} (\| u \|^2_{N-1} + 1) \Big\} .$$

Reportant dans (2.8) et utilisant le lemme de Gronwall on obtient pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2$ une estimation du type

$$(2.9) \qquad \| u \|_N \leqslant \text{Max} \Big\{ \| u \|_{N-1} \ ; \ H_1 + \frac{C \| u \|^2_{N-1} + 1}{\lambda} \Big\} .$$

Il suffit alors de choisir $H = \sup\{\|u\|_1, 2H_1\}$ et $\lambda \geqslant C\,\dfrac{(H^2+1)}{H_1}$ pour que (2.4) ait lieu .

(2.4) exprime l'analycité partielle en x ; l'analycité en t s'en déduit en revenant à l'équation.

Il reste donc à étudier le Lemme 2 ; clairement, dans ce lemme, t est un paramètre qu'on omettra d'écrire dorénavant ; si E est une paramétrix analytique de Δ sur un voisinage de $\overline{\omega}$ on a, plus correctement que (1.3) :

$$p = E(F(u)) + q \tag{2.10}$$

où q est analytique sur $\overline{\omega}$. Le caractère non linéaire de F est secondaire, ce qui importe ici c'est l'action précise de l'opérateur pseudodifférentiel E vis-à-vis des semi-normes introduites.

3. ACTION PRECISEE DES OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS ANALYTIQUES

Plus généralement, considérons un opérateur pseudodifférentiel analytique $A = a(x,D_x)$, défini par un symbole analytique $a(x,\xi)$ sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$ où Ω désigne maintenant un ouvert qui contient le compact $\overline{\omega}$. On peut d'ailleurs ajouter à A un opérateur à noyau $R(x,y)$ analytique sur $\Omega \times \Omega$.

Pour tenir compte du décalage des dérivées nous changeons quelque peu les notations du paragraphe 2 et nous posons :

$$[u]_N = \sup_{\delta \in]0,\delta_0]} \ \sup_{|\alpha|=N} \delta^N \|\partial^\alpha u\|_{H^\mu(\omega_\delta)} \tag{3.1}$$

$$|\!|\!| u |\!|\!|_N = \operatorname{Max}\left\{ \|u\|_{H^\mu(\Omega)} \ , \ \operatorname*{Max}_{0<p\leqslant N} \frac{\varepsilon^p}{m_p}[u]_p \right\} . \tag{3.2}$$

$$\|u\|_\varepsilon = \sup_{N \in \mathbb{N}} |\!|\!| u |\!|\!|_N \tag{3.3}$$

<u>Théorème 3</u> : <u>Soit</u> $a(x,\xi)$ <u>un symbole analytique de degré</u> 0 <u>sur</u> $\Omega \times \mathbb{R}^n$ <u>et soit</u> $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ <u>un ouvert contenant</u> $\overline{\omega}$. <u>Il existe</u> $\varepsilon_0 > 0$ <u>et</u> C <u>tels que pour tout</u> $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, <u>tout</u> $N > 0$ <u>et</u> $u \in C_0^\infty(\Omega_0)$ <u>on a</u> :

$$[a(x,D_x)u]_N \leqslant C \, |||u|||_N \; m_N \cdot \varepsilon^{-N} \quad .$$

Compte tenu de (2.10) le lemme 2 est en fait une conséquence quasi-immédiate de ce théorème.

Notons B_ε l'espace des $u \in H^\mu(\Omega)$ analytiques sur ω et tels que $\|u\|_\varepsilon < \infty$; notons aussi B_ε^o l'espace des $u \in B_\varepsilon$ à support dans $\overline{\Omega}_o$. On déduit directement du théorème 3 le corollaire suivant :

Corollaire 4 : A est un opérateur pseudodifférentiel analytique de degré 0 sur Ω, alors il existe ε_o et C tels que pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_o$, A opère de B_ε^o dans B_ε avec une norme majorée par C.

Ce résultat est similaire à ceux qu'ont obtenus Baouendi et Goulaouic lorsque A agit sur une variété compacte sans bord [4] [5].

Donnons maintenant les grandes lignes de la démonstration du théorème 3 ; pour simplifier, supposons que A soit un opérateur de convolution :

(3.4)
$$Au = k * u$$

avec $\hat{k}(\xi) = a(\xi)$ symbole analytique de degré 0 .

On sait que k est analytique sur $\mathbb{R}^n \setminus 0$ et que k vérifie des estimations du type suivant (cf.[6]) :

(3.5)
$$|\partial_x^\alpha k(x)| \leqslant C_1^{|\alpha|+1} \frac{|\alpha|!}{|x|^{n+|\alpha|}} \quad \text{pour} \quad 0 < x \leqslant R$$

avec C indépendant de $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et x .

Introduisons une suite de fonctions de troncatures $\varphi_j \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(j \geqslant 0)$ à support dans $|x| \leqslant 1$, valant 1 pour $|x| \leqslant 1/2$ et vérifiant, avec une constante C_2 convenable :

(3.6)
$$|\partial_x^\gamma \varphi_j(x)| \leqslant (C_2(j+1))^{|\gamma|} \quad \text{pour} \quad |\gamma| \leqslant j+1 \; .$$

Fixons $\delta \in]0,\delta_o]$ et $\alpha > 0$; il nous faut montrer que :

(3.7) $$\| \partial^\alpha A u \|_{H^\mu \, \omega_\delta} \leqslant |||u|||_{|\alpha|} \; m_{|\alpha|} \; \varepsilon^{-|\alpha|}$$

On pose alors $N = |\alpha|$, $r = \frac{\delta}{N+1}$ et

$$\theta_o(x) = \varphi_o(\frac{x}{r})$$

(3.8) $$\theta_j(x) = \varphi_j(\frac{x}{(j+1)r}) - \varphi_{j-1}(\frac{x}{rj}) \quad \text{pour} \quad j = 1,\dots,N-1$$

$$\theta_N(x) = 1 - \varphi_{N-1}(\frac{x}{rN})$$

Enfin, appelons A_j l'opérateur de convolution par $k_j = \theta_j k$.
Par construction on a $A = \sum_{j=0}^{N} A_j$.

Le symbole de A_o est $a * \hat{\theta}_o$ et il est borné dans L^∞ indépendamment de $r \leqslant \delta_o$. Par suite, on a :

(3.9) $$\| A_o v \|_{H^\mu(\omega_\delta)} \leqslant \| v \|_{H^\mu(\omega_{\delta-r})}$$

avec C indépendant de r .

Il résulte de (3.5) et (3.6) que l'on a pour $|\beta| = j \geqslant 1$

$$|\partial_X^\beta k_j(x)| \leqslant C_3^{j+1} \frac{j^j}{|X|^{n+j}} .$$

et comme k_j est à support dans $|x| \geqslant \frac{1}{2} jr$ on a :

$$\| \partial_X^\beta k_j \|_{L^1(|X| \leqslant R)} \leqslant \frac{C_4^{j+1}}{r^j} .$$

On en déduit les majorations suivantes :

$$(3.10)\quad \begin{cases} \|\partial_X^\beta A_j v\|_{H^\mu(\omega_\delta)} \leqslant \dfrac{C_5^{j+1}}{r^{j+1}} \|v\|_{H^\mu(\Omega_\delta-(j+1)r)} & \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant N-1 \\ \|\partial^\beta A_N v\|_{H^\mu(\omega_\delta)} \leqslant \dfrac{C_5^{N+1}}{r^{N+1}} \|v\|_{H^\mu(\mathbb{R}^n)} & . \end{cases}$$

Si $u \in C_o^\infty(\Omega_o)$, écrivant pour tout $j, \alpha = \beta_j + \alpha_j$ avec $|\beta_j| = j$, on a :

$$\partial^\alpha A u = \sum_{j=0}^{N} \partial^{\beta_j} A_j(\partial^{\alpha_j} u) .$$

En utilisant (3.9) et (3.10) on arrive facilement (et classiquement) à (3.7) pourvu que ε soit assez petit.

4. UN THEOREME DE CAUCHY KOWALEWSKI PSEUDODIFFERENTIEL LOCAL

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$(4.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - A(t,X,D_X)u = f \\ u_{t=0} = u \end{cases}$$

où $A(t,X,D_X)$ est un opérateur pseudodifférentiel analytique de degré 1 sur $[-T_o, T_o] \times \Omega$, et où les données u_o et f sont analytiques.

Ce type de problème de Cauchy-Kowalewski a été considéré par Baouendi et Goulaouic [4][5] dans le cas où Ω est une variété compacte sans bord, et aussi par Kajitani [13] dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, (avec des conditions d'uniformité à l'infini). Nous voulons considérer ici le problème local pour répondre à une question posée par C. Goulaouic. L'outil essentiel est une variante du Corollaire 4, que nous décrivons maintenant.

Donnons- nous $\omega \subset\subset \Omega$, ouvert borné régulier (de classe C^1). Pour $\delta > 0$ assez petit ω_δ désigne toujours l'ensemble des points de ω à distance de $\partial\omega$ supérieure à δ. On se donne un paramètre $p \in [0,1/2[$, et pour $\varepsilon > 0$ on note B_ε l'espace des fonctions analytiques u sur ω telles que :

$$(4.2) \qquad \|u\|_\varepsilon = \sup_{|\alpha|\geq 0} \sup_{\delta\in]0,\delta_o]} \frac{(\varepsilon\delta)^{|\alpha|}}{|\alpha|!} \delta^\rho \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\omega_\delta)} < +\infty .$$

On montre facilement que $B_\varepsilon \to L^1(\omega)$, de sorte que, en prolongeant par 0, B_ε s'identifie à un espace de distributions à support compact dans Ω. Ce prolongement permet de faire agir les opérateurs pseudodifférentiels définis sur Ω, sur les fonctions de B_ε.

<u>Lemme 5</u> : <u>Si</u> A <u>est o.p.d. analytique sur</u> Ω <u>de degré</u> 0, <u>il existe</u> $\varepsilon_o > 0$ <u>et</u> C <u>tels que l'opérateur</u> $u \to (A\tilde{u})_{|\omega}$ <u>opère de</u> B_ε <u>dans lui-même avec une norme majorée par</u> C, <u>pourvu que</u> $\varepsilon \leq \varepsilon_o$.

$\tilde{u}$ désigne le prolongement de u par 0.

Lorsque $\rho = 0$ ce lemme est une modification triviale du Théorème 3 : il suffit essentiellement de remplacer dans (3.9) et (3.10) les normes H^μ par les normes L^2. Lorsque $\rho > 0$, la seconde estimation de (3.10) est à remplacer par la suivante :

$$\|\partial_X^\beta A_N v\|_{L^2(\omega_\delta)} \leq \frac{C_5^{N+1}}{C^{N+1}} \delta^{-\rho} \sup_{\tau\in]0,\delta_o]} \{\tau^\rho \|v\|_{L^2(\omega_\tau)}\} .$$

Les détails seront donnés dans [15].

λ et T étant des paramètres vérifiant $\lambda T \leq \frac{1}{2}\delta_o$, on désigne par $\mathcal{C}_{\lambda,T}$ l'ouvert :

$$(4.3) \qquad \mathcal{C}_{\lambda,T} = \{(t,x) \in \mathbb{C}\times\omega / |t| \leq T \quad \text{et} \quad x \in \omega_{\lambda|t|}\} .$$

Pour $\varepsilon > 0$ on désigne par E_ε l'espace des fonctions sur $\mathcal{C}_{\lambda,T}$, holomorphes en t, analytiques en x, et telles que :

$$(4.4) \qquad \|u\|_\varepsilon = \sup_{|t|\leq T} \sup_{\alpha} \sup_{\lambda|t|<\delta\leq\delta_o} \frac{\varepsilon^{|\alpha|}(\delta-\lambda|t|)^{|\alpha|+\rho}}{|\alpha|} \|\partial_X^\alpha u(t.)\|_{L^2(\omega_\delta)} < +\infty .$$

Il revient au même de dire que $u(t) = u(t,.)$ appartient à un espace $B_\varepsilon(\omega_{\lambda|t|})$ et que :

$$(4.5) \qquad \|u\|_\varepsilon = \sup_{|t|\leqslant T} \|u(t)\|_{B_\varepsilon(\omega_{\lambda|t|})} < +\infty \quad .$$

Comme précédemment on fait agir un opérateur $A(t,X,D_X)$ sur une fonction $u \in E_\varepsilon$ en prolongeant celle-ci par 0. On suppose maintenant que le paramètre $\rho \in]0,1/2[$.

Théorème 6 : Soit $A(t,X,D_X)$ un o.p.d. analytique de degré 1 sur $[-T_o,T_o] \times \Omega$. Alors il existe $\varepsilon_o > 0$ $T_1 \in]0,T_o]$ et $\lambda_o > 0$ tels que pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_o$, $\lambda \geqslant \lambda_o/\varepsilon$ et $T \leqslant \mathrm{Inf}\{T_1, \frac{\delta o}{2\lambda}\}$, si $u_o \in B_\varepsilon(\omega)$ et $f \in E_\varepsilon(\mathcal{E}_{\lambda,T})$, il existe $u \in E_\varepsilon(\mathcal{E}_{\lambda,T})$ tel que

$$(4.6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - A(t,X,D_X)\,\tilde{u} = f & \text{sur } \mathcal{E}_{\lambda,T} \\ u_{|t=0} = u_o & \text{sur } \omega . \end{cases}$$

Démonstration : On peut écrire :

$$A = \sum_{j=1}^{n} D_{X_j} A_j + A_o$$

où les A_j $(j=0,\ldots,n)$ sont de degré 0. Il résulte du lemme 5 (à paramètres) que les opérateurs $\tilde{A}_j : u \to (A_j\,\tilde{u})_{|\mathcal{E}_{\lambda,T}}$ sont bornés de E_ε dans lui-même avec une norme majorée indépendamment de ε, λ et T pourvu que $\varepsilon \leqslant \varepsilon_o$ et $T \leqslant \mathrm{Inf}\{\, T_1, \frac{\delta_o}{2\lambda}\,\}$. Introduisant l'opérateur

$$H v(t,X) = \int_{[0,t]} v(s,x)\,ds$$

on met l'équation (4.6) sous la forme :

$$(4.7) \qquad u - H\tilde{A}_o u - \sum_{j=1}^{n} H D_{X_j} \tilde{A}_j u = u_o + H f \quad .$$

Les estimations suivantes résultent directement de la définition (4.4) :

Lemme 7 : Les opérateurs H et $H\,D_{X_j}$ sont bornés de E_ε dans lui-même, de norme majorée respectivement par T et $\frac{1}{\varepsilon\lambda\rho}$.

En choisissant T assez petit et $\varepsilon\lambda$ assez grand, il est alors clair que $H\widetilde{A}_o + \sum_{j=1}^{n} H\,D_{X_j}\widetilde{A}_j$ est borné de E_ε dans lui-même de norme < 1, et l'équation (4.7) possède alors une solution dans E_ε .

Pour terminer cet exposé, signalons que ce Théorème 6 admet des versions non linéaires, que l'on obtient en modifiant les définitions (4.2) et (4.4) des espaces B_ε et E_ε de manière à en faire des algèbres. On renvoie pour cela à [15].

REFERENCES

[1] S. Alinhac, G. Métivier : Propagation de l'analyticité des solutions de systèmes hyperboliques non linéaires ; Invent. Math. 75 (1984), 189-204.

[2] S. Alinhac, G. Métivier : Propagation de l'analycité des solutions d'équations non linéaires de type principal ; Comm. in Partial Diff. Equ. , à paraître.

[3] S. Alinhac, G. Métivier : Propagation de l'analycité locale pour les solutions de l'équation d'Euler ; Arch. Rat. Mec. Analysis, à paraître.

[4] M.S. Baouendi, C. Goulaouic : Cauchy problems for analytic pseudo-differential operators ; Comm. in Partial Diff. Equ., 1 (1976) 135-189.

[5] M.S. Baouendi, C. Goulaouic : Sharp estimates for analytic pseudo-differential operators and application to Cauchy problems ; J. Diff. Equ. 48 (1983) 241-268.

[6] M.S. Baouendi, C. Goulaouic, G. Métivier : Kernels and symbols of analytic pseudodifferential operators ; J. Diff. Equ. 48 (1983) 227-240.

[7] C. Bardos : Analyticité de la solution de l'équation d'Euler dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$; C.R. Acad. Sc. Paris, t. 283 (1976), 255-258.

[8] C. Bardos, S. Benachour, M. Zerner : Analyticité des solutions périodiques de l'équation d'Euler en dimension deux ; C.R. Acad. Sc. Paris, t. 282 (1976), 995-998.

[9] S. Benachour : Analyticité des solutions périodiques de l'équation d'Euler en dimension trois ; C.R. Acad. Sc. Paris, t. 283 (1976), 107-110.

[10] J.M. Bony : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires ; Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 14 (1981), 209-240.

[11] J.P. Bourguignon, H. Brezis : Remarks on the Euler Equation ; J. Funtional Analysis 15 (1974), 341-363.

[12] D.G. Ebin, J. Marsden : Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid ; Ann. of Math. 92 (1970), 102-163.

[13] K. Kajitani : Nonlinear Cauchy Kowalewski theorem for pseudodifferential operators ; Comm. in Partial Diff Equ. 8 (1984), 1487-1520.

[14] T. Kato : Nonstationnary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbb{R}^3$; J. Functional Analysis 9 (1972), 296-305.

[15] G. Métivier : Un théorème de Cauchy Kowalewski pseudodifferentiel local ; preprint.

[16] R. Temam : On the Euler equations of incompressible perfect fluids ; J. Functional Analysis 20 (1975), 32-43.
