Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

P. Bérard
S. Gallot

Inégalités isopérimétriques pour l'équation de la chaleur et application à l'estimation de quelques invariants

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1983-1984), exp. n° 15, p. 1-34
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1983-1984____A15_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU · 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 · Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 3 - 1 9 8 4

INEGALITES ISOPERIMETRIQUES POUR L'EQUATION DE LA CHALEUR ET APPLICATION A L'ESTIMATION DE QUELQUES INVARIANTS

par P. BERARD et S. GALLOT

Exposé n° XV

22 Novembre 1983

Dans la suite, M désignera une variété compacte, connexe de dimension n. On peut mettre sur M une infinité de métriques riemanniennes g, une telle métrique étant la donnée, en chaque point m de M, d'une forme quadratique définie positive g_m sur T_mM qui dépend de m de manière C^∞. Une variété riemannienne est la donnée d'un couple (M,g) formé d'une variété et d'une métrique. La métrique g permet de définir la norme $g(X,X)^{1/2}$ d'un vecteur tangent X et, par suite, la longueur des courbes de M. Ceci confère à (M,g) une structure d'espace métrique (d(x,y) étant la borne inférieure des longueurs des courbes allant de x à y) et une mesure

$dv_g = \left|\text{dét } g\left(\frac{\partial}{\partial xi}, \frac{\partial}{\partial xj}\right)\right|^{1/2} .dx_1 \ldots\ldots dx_n$ (écriture dans une carte locale, le

théorème de changement de variables dans $\mathbb{R}^n$ assurant l'indépendance de la mesure par rapport au système de cartes choisi). Deux variétés riemanniennes (M,g) et (N,h) seront dites équivalentes s'il existe une isométrie de (M,g) sur (N,h). Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées structures riemanniennes.

Nous noterons d et V le diamètre et le volume de (M,g).

0. MOTIVATIONS GEOMETRIQUES

La courbure est un invariant local qui s'écrit comme une dérivée seconde de la métrique. En (très) gros la courbure est aux variétés riemanniennes ce que l'accélération normale est aux courbes. Pour une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$, la courbure en un point est le produit des inverses des rayons de courbure en ce point (cependant la courbure est un invariant intrinsèque qui ne dépend que de (M,g) et pas du plongement). Une des questions fondamentales de la géométrie riemannienne est la suivante :

La connaissance d'estimées sur la courbure (information locale) donne-t-elle des renseignements sur l'allure globale de la variété ?

a) En dimension 2 :

0.1. Théorème (Gauss-Bonnet cf[SP] tome 3 p 396).- Si la variété M est de dimension 2 alors, pour toute métrique g, l'intégrale de la courbure sur la variété est égale à la caractéristique d'Euler de M multipliée par 2π.

Nous allons énoncer un résultat plus faible mais qui se prête mieux à une généralisation en dimension $n \geq 3$. Notons S_{k,V_o} l'ensemble des variétés riemanniennes de dimension 2 dont la courbure est minorée par le nombre réel k et de volume plus petit que V_o. L'ensemble des variétés M de dimension 2 qui peuvent être munies d'une métrique g telle que $(M,g) \in S_{k,V_o}$ est fini, de plus toutes ces variétés vérifient $b_1(M) \leq 2 - k.V_o/2\pi$.

b) En dimension supérieure ou égale à 3 : Dans le cas général, on ne peut espérer borner la topologie (ou les invariants topologiques) à l'aide de la courbure et du volume seuls, comme le montre l'exemple suivant : Notons (M,g) une variété riemannienne de topologie quelconque. En faisant au besoin une homothétie sur la métrique, on peut toujours supposer que la courbure est bornée (en valeur absolue) par 1 (dans ce cas, le volume de (M,g) peut devenir aussi grand qu'on veut). Considérons la variété $M \times S^1(R)$ où $R = \dfrac{1}{2\pi.\mathrm{Vol}(M)}$ munie de la métrique produit. La courbure de $M \times S^1(R)$ est bornée par 1 et son volume est égal à 1, pourtant sa topologie peut être aussi compliquée qu'on le désire. Ceci explique pourquoi tous les invariants que nous considèrerons seront bornés à l'aide de la courbure et du diamètre.

Une difficulté supplémentaire vient du fait que, si $n \geq 3$, il y a plusieurs notions de courbure. Désignons par R le tenseur de courbure de (M,g), c'est en chaque point un endomorphisme symétrique de $\Lambda^2(T_mM)$. La courbure sectionnelle σ est définie, pour tout 2-plan P de T_mM engendré par les vecteurs X et Y, par $\sigma(X,Y) = \sigma(P) = \dfrac{\langle R_m(X\wedge Y), X\wedge Y\rangle}{||X\wedge Y||^2}$. La donnée de la courbure sectionnelle pour tous les 2-plans donne tout le tenseur R.

La courbure de Ricci est une section r de $T_m^*M \otimes T_m^*M$ définie, pour toute base orthonormée $\{e_i\}$ de T_mM, par

$$r(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R_m(X\wedge e_i), Y\wedge e_i\rangle.$$

Si on pose $e_1 = X$, on a par conséquent :

$$r(X,X) = \sum_{i=2}^{n} \sigma(X,e_i)$$

La courbure scalaire u est une fonction égale à $\sum_{i=1}^{n} r(e_i,e_i)$.

Il est clair que la donnée de la courbure scalaire est une information beaucoup plus faible que la donnée de la courbure de Ricci, qui est elle-même une information beaucoup plus faible que la donnée de la courbure sectionnelle. Il ressort des travaux de Gromov et Lawson (cf [G-L]) que la donnée d'une borne sur la courbure scalaire ne donne pratiquement aucune restriction sur la forme de la variété. Nous nous intéresserons donc uniquement à ce qui se passe lorsque la courbure sectionnelle ou la courbure de Ricci est bornée. Pour cela nous allons donner de ces deux notions des définitions plus accessibles que celles données ci-dessus.

Notons $\overline{M}_k$ la variété simplement connexe de dimension n et de courbure constante k : il s'agit de la sphère de rayon $\frac{1}{\sqrt{k}}$ lorsque $k > 0$, de l'espace euclidien R^n lorsque $k = 0$ et de l'espace hyperbolique muni de la métrique $\frac{1}{|k|}$.can lorsque $k < 0$ (la métrique canonique sur un espace symétrique étant notée can.). La courbure de Ricci de $\overline{M}_k$ est alors $r = (n-1)k.\mathrm{can}$.

0.2. Définition.- On dit que la courbure sectionnelle σ est minorée (resp. majorée) par le nombre réel k - ce que nous noterons $\sigma \geq k$ (resp. $\sigma \leq k$) - ssi, pour tout point m de M , il existe un nombre $\varepsilon > 0$ et un homéomorphisme ϕ d'une boule $\overline{B}_\varepsilon$ de rayon ε dans $\overline{M}_k$ sur la boule $B(m,\varepsilon)$ tel que, pour tous les $x,y \in \overline{B}_\varepsilon$ on ait $d[\phi(x),\phi(y)] \leq d(x,y)$ (resp. $d(\phi(x),\phi(y)) \geq d(x,y)$).

On définit $|\sigma| = \mathrm{Inf}\ \{k / -k \leq \sigma \leq k\}$.

Nous allons définir l'application exponentielle au point m notée $\exp_m$. On appelle géodésique les courbes qui réalisent le plus court chemin d'un point à un autre point assez voisin, i.e. c est une géodésique s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la longueur de la géodésique entre $c(t)$ et $c(t+\varepsilon)$ soit $d[c(t),c(t+\varepsilon)]$.

L'application $\exp_m$ de T_mM sur M est définie par $\exp(t.v) = c(t)$ où $v \in T_mM$ et où c est la géodésique telle que $c'(0) = v$. Remarquons que l'application ϕ dont il est question en 0.2. qui envoie la boule $B(\overline{m},\varepsilon) \subset \overline{M}_k$ sur la boule $B(m,\varepsilon) \subset M$ est $\exp_m \circ \overline{\exp}_{\overline{m}}^{-1}$, où $\overline{\exp}$ est l'application exponentielle sur $\overline{M}_k$.

0.3. Définition.- On dit que la courbure de Ricci est minorée par le nombre ρ (notation $r \geq \rho$) ssi, pour tout point m de M, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que toute partie A mesurable d'une boule de centre $\bar{m}$ et de rayon ε dans $\bar{M}_k$ vérifie $\mathrm{vol}\,[\exp_m \circ \overline{\exp_{\bar{m}}}^{-1}(A)] \leq \mathrm{vol}(A)$. On pose $r_{\min} = \mathrm{Sup}\{\rho / r \geq \rho\}[k = \rho/(n-1)]$

Remarque : On pourrait de même définir une notion de courbure de Ricci majorée, mais cette notion n'aurait pas le même intérêt. En effet, dans le cas de la courbure de Ricci minorée, un théorème de Bishop (cf[B-C]) montre que la propriété 0.3. est vraie globalement, i.e. pour toute partie A mesurable de $\bar{M}_k$ (sans restriction sur sa distance à $\bar{m}$), on a

$$\mathrm{vol}[\exp_m \circ \overline{\exp_{\bar{m}}}^{-1}(A)] < \mathrm{vol}(A).$$

Par contre, dans le cas de la courbure de Ricci majorée l'inégalité $\mathrm{vol}[\exp_m \circ \overline{\exp_{\bar{m}}}^{-1}(A)] \geq \mathrm{vol}(A)$ n'est vraie que pour des parties A incluses dans une petite boule centrée en $\bar{m}$.

Soient X et Y deux sous-espaces métriques d'un même espace métrique Z, on définit $d_Z(X,Y) = \mathrm{Inf}\{\varepsilon / Y$ est inclus dans le ε-voisinage de X et X est inclus dans le ε-voisinage de $Y\}$. Si X et Y sont deux espaces métriques compacts quelconques, on définit la distance de Hausdorff $d_H(X,Y)$ comme la borne inférieure des $d_Z(i(X), j(Y))$ pour tous les espaces métriques Z et tous les plongements isométriques i et j de X et de Y dans Z. L'ensemble des structures riemanniennes compactes est un espace métrique pour la distance d_H. Le théorème suivant donne une première réponse à la question initiale (la partie (i) avait déjà été démontrée par J. Cheeger dans [CH]).

0.4. Théorème (M. Gromov, cf[GR1], chapitre 8).- Notons $\mathcal{M}_{n,k,v,D}$ l'ensemble des structures riemanniennes de dimension n qui vérifient $|\sigma| \leq k$, $d \leq D$ et $V \geq v$. L'ensemble des variétés différentiables M qui admettent une métrique g telle que $(M,g) \in \mathcal{M}_{n,k,v,D}$ est appelé $\mathfrak{D}_{n,k,v,D}$.

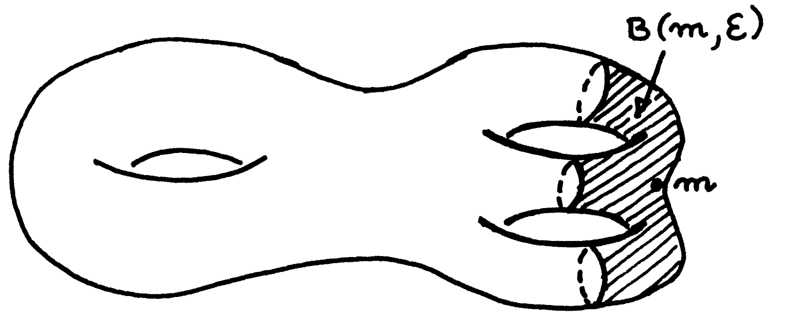
(i) L'ensemble $\mathfrak{D}_{n,k,v,D}$ est fini

(ii) L'ensemble $\mathcal{M}_{n,k,v,D}$ est compact pour la distance de Hausdorff

(iii) L'application $(M,g) \to M$ est localement constante de $\mathcal{M}_{n,k,v,D}$ dans $\mathfrak{D}_{n,k,v,D}$

Remarques :

(1) Ce résultat est d'une portée essentiellement théorique, puisqu'on ignore en général quels sont les éléments de $\mathcal{D}_{n,k,v,D}$. En particulier, si on s'intéresse à borner un invariant topologique $\delta(M)$ (par exemple un des nombres de Betti), une conséquence de 0.4. est qu'il existe une borne théorique de $\delta(M)$ ne dépendant que de n,k,v,D ; cependant on ne pourra jamais la calculer par cette méthode puisqu'un tel calcul exigerait la connaissance de $\delta(M)$ pour tous les $M \in \mathcal{D}_{n,k,v,D}$.



(2) Sur une variété riemannienne (M,g), une boule de rayon $\varepsilon > 0$ n'est généralement pas difféomorphe à la boule euclidienne B^n (voir dessin ci-contre). Cependant, il existe un nombre positif $i(M,g)$ (appelé rayon d'injectivité) tel que toute boule de rayon $\varepsilon < i(M,g)$ tracée sur (M,g) soit difféomorphe à B^n. Sur un ensemble de variétés riemanniennes $\mathcal{M}$, la borne inférieure des $i(M,g)$ pour tous les $(M,g) \in \mathcal{M}$ est généralement nulle et ce même si $|\sigma|$ et d sont bornés comme dans l'exemple donné par l'ensemble des variétés $M_\alpha = N \times S^1(\alpha)$ munies de la métrique produit, où N est une variété quelconque et où $S^1(\alpha)$ est le cercle de rayon α (le rayon d'injectivité de M étant au plus $\pi.\alpha$, il tend vers zéro lorsque α tend vers zéro). Par contre on démontre que la borne inférieure ε des $i(M,g)$ pour tous les $(M,g) \in \mathcal{M}_{n,k,v,D}$ est strictement positive. Cette propriété est extrêmement forte puisqu'elle permet par exemple, en recouvrant toute variété de $\mathcal{M}_{n,k,v,D}$ par un nombre borné de boules convexes de rayon $\varepsilon/2$ (dont les intersections sont par conséquent contractiles) de borner (théoriquement) les nombres de Betti des variétés de $\mathcal{M}_{n,k,v,D}$. Ceci nous amène à penser que les hypothèses de 0.4. sont beaucoup trop fortes lorsqu'on s'intéresse seulement à borner des invariants topologiques ou géométriques. On vérifiera en effet (voir le paragraphe 4) que la plupart des invariants topologiques ou géométriques $\delta(M,g)$ peuvent être bornés explicitement en fonction de $n, |\sigma|$ et d. Dans certains cas (par exemple lorsque $\delta(M,g)$ est le 1° nombre de Betti de M ou la i^e valeur propre du laplacien de (M,g) ou le $\hat{A}$-genre de M) on sait borner $\delta(M,g)$ en fonction des seules informations r_{min}, d et n (voir le paragraphe 3). Ceci nous amène à énoncer la conjecture suivante (à laquelle on ne connaît actuellement aucun contre-exemple).

0.5. Conjecture.- Soit $\mathcal{M}'_{n,D,\rho}$ l'ensemble des structures riemanniennes (M,g) de dimension n qui vérifient $r \geq \rho$ et $d \leq D$. Sur $\mathcal{M}'_{n,D,\rho}$, tout invariant topologique ou géométrique $\delta(M,g)$ est borné uniformément.

L'amélioration par rapport à 0.4. serait considérable, non seulement parce qu'on ne fait plus aucune hypothèse sur le volume, mais surtout parce qu'une borne sur la courbure de Ricci est une hypothèse beaucoup plus faible qu'une borne sur la courbure sectionnelle (dans le 1° cas on se contente de majorer localement la mesure tandis que dans le 2° cas on exige de contrôler localement la distance). De plus l'exemple donné au début de ce paragraphe montre que les hypothèses de 0.5. sont les plus faibles qu'on puisse imaginer. Un premier pas conceptuel dans la direction de 0.5. est fait par le

0.6. Théorème (M. Gromov cf[GR1]chapitre 5).- $\mathcal{M}'_{n,D,\rho}$ est précompact pour la distance de Hausdorff.

Ce théorème, s'il éclaire la conjecture 0.5. en lui donnant une sorte de justification philosophique, ne peut être d'aucune utilité pour la démontrer. En effet, la plupart des invariants ne sont pas continus pour la distance de Hausdorff (et a fortiori non uniformément continus). Donnons deux exemples qui prouvent cette non-continuité dans le cas où $\delta(M,g)$ est le second nombre de Betti $b_2(M)$. Le tore $(T^1,\text{can}) \times (T^{n-1}, \varepsilon.\text{can})$ - dont le b_2 est égal à $\binom{n}{2}$ - converge vers le tore (T^1,can) dont le b_2 est égal à zéro. Plus étrange, on ne peut espérer de semi-continuité dans l'autre sens. En effet, considérons la fibration de Hopf $S^{2n+1} \mapsto \mathbb{C}P^n$ à fibre S^1. En multipliant la métrique de la fibre par ε, on obtient des variétés riemanniennes (S^{2n+1},g_ε) - dont le second nombre de Betti est nul - qui convergent vers $(\mathbb{C}P^n,\text{can})$ dont le second nombre de Betti n'est pas nul.

1. UNE METHODE POUR BORNER DES INVARIANTS

Nous allons considérer dans la suite les invariants topologiques ou géométriques qui s'écrivent comme la dimension d'un espace de sections harmoniques d'un certain fibré pour un certain laplacien défini sur les sections de ce fibré. Plus précisement, appelons $\delta(M,g)$ l'invariant considéré (cet invariant, pouvant suivant le cas être soit le $p^{\text{ième}}$ nombre de Betti de M, soit le nombre de valeurs propres du laplacien de (M,g) qui sont inférieures à un nombre donné ,
soit le $\hat{A}$-genre de (M,g), soit la dimension du module des déformations d'Einstein d'une métrique d'Einstein g, etc...).

A tout invariant $\delta(M,g)$ du type ci-dessus on associe un fibré vectoriel $E \to M$ muni d'une métrique $<.,.>$ (où $<.,.>_m$ est un produit scalaire sur E_m) et d'une connexion D compatible avec cette métrique ainsi qu'un laplacien $\tilde{\Delta}$ défini sur les sections C^∞ de E tel que $\delta(M,g) = \dim\{s \in C^\infty(E) : \tilde{\Delta}s = 0\}$. Ce fibré est généralement construit à partir de $\otimes^p(T^*M)$, le produit scalaire et le laplacien $\tilde{\Delta}$ sont généralement canoniques. La forme quadratique associée à $\tilde{\Delta}$ a toujours une expression (dite formule de Weitzenböck) du type

$$\int_M < \tilde{\Delta}s,s > = \tilde{Q}(s) = \int_M [|Ds|^2 + < \mathcal{R}_x(s),s >] dv_g(x)$$

où $\mathcal{R}_x$ est un endomorphisme symétrique de E_x qui dépend de l'invariant considéré mais dont les coefficients matriciels s'écrivent toujours en fonction de la courbure. Le symbole principal de $\tilde{\Delta}$ est donc toujours égal à la métrique et tous ces laplaciens diffèrent entre eux d'un terme en potentiel de degré zéro. Pour une étude générale de ces laplaciens et des formules de Weitzenböck voir [LI1] et [BE1]. Notons $\bar{\Delta}$ le laplacien (dit "laplacien brut") associé à la forme quadratique $s \mapsto \int_M |Ds|^2$. On a $\Delta = \bar{\Delta} + \mathcal{R}$. Posons

$$\mathcal{R}_o(m) = \operatorname*{Inf}_{X \in E_m} \frac{<\mathcal{R}(X),X>}{<X,X>} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{min} = \operatorname*{Inf}_{m \in M} [\mathcal{R}_o(m)].$$

Si $\bar{\lambda}_i$ (resp. $\tilde{\lambda}_i$) sont les valeurs propres de $\bar{\Delta}$ (resp. $\tilde{\Delta}$) -la variété M étant compacte, ces spectres sont discrets- on a pour tout t

$$\text{Trace}(e^{-t\tilde{\Delta}}) = \sum_i e^{-t.\tilde{\lambda}i} \leq e^{-\mathcal{R}_{min}t} . \bar{Z}_E(t),$$

où $\bar{Z}_E(t) = \sum_i e^{-t\bar{\lambda}i}$ est la trace de $e^{-t\bar{\Delta}}$. Notons que $-\mathcal{R}_{min}$ peut toujours se majorer à l'aide de $|\sigma|$ dans les cas les moins favorables et à l'aide de r_{min} dans les cas les plus favorables. Pour borner $\delta(M,g)$ il suffit de calculer en fonction de $\mathcal{R}_{min}$ la valeur t_o telle que $e^{-\mathcal{R}_{min}t_o} \bar{Z}_E(t_o)$ soit minimale, on obtient

1.1. $$\delta(M,g) = \dim(\operatorname{Ker} \tilde{\Delta}) \leq \sum_i e^{-\tilde{\lambda}_i t_o} \leq e^{-\mathcal{R}_{min}t_o} \bar{Z}_E(t_o) .$$

Exemple 1 : $\delta(M,g) = b_p(M)$ (p^e nombre de Betti de M).
Le fibré considéré est $E = \wedge^p(T^*M)$, les sections sont les p-formes différentielles et le laplacien est celui de Hodge, i.e. $\tilde{\Delta} = (\delta + d)^2$ où δ est l'adjoint de la différentielle d pour le produit scalaire intégral (i.e. $\int_M < \delta\alpha, \beta > = \int_M < \alpha , d\beta >$). En écrivant δ et d à l'aide de D et en remarquant que la courbure apparaît à cause du défaut de commutation des dérivées $(D_i D_j - D_j D_i)s$, on obtient (cf [LI1] p. 3)

$$\tilde{\Delta}\alpha = \bar{\Delta}\alpha + \mathcal{R}(\alpha) \text{, où}$$

Notons $R_o(m)$ la plus petite valeur propre du tenseur de courbure R agissant de $\wedge^2(T_m^*M)$ dans lui-même et $R_{min} = \text{Inf } R_o(m)$. On montre (cf [G-M] p. 264) que $\mathcal{R}_o(m) \geq p(n-p)\, R_o(m)$, puis (cf [K]) que, si $\sigma_{min} \leq \sigma \leq \sigma_{max}$, alors

$$R_{min} \geq \frac{1}{2}(\sigma_{min} + \sigma_{max}) - \frac{1}{3}(\sigma_{max} - \sigma_{min})\, [n(n-1)(n+\tfrac{1}{4})]^{1/2} .$$

$$\geq -\frac{2}{3}[n(n-1)(n+\tfrac{1}{4})]^{1/2} . |\sigma| .$$

Le cas p = 1 est plus simple puisque $\mathcal{R}$ est alors le tenseur de courbure de Ricci et $\mathcal{R}_{min} = r_{min}$.

Exemple 2 : $\delta(M,g) = N(\lambda)$ = Nombre de valeurs propres λ_i du laplacien Δ (défini sur les fonctions) inférieures ou égales à λ , où λ est un nombre réel quelconque donné.
Le fibré considéré est $M \times \mathbb{R} \to M$, les sections sont les fonctions de M dans $\mathbb{R}$. Notons Δ le laplacien usuel sur les fonctions, associé à la forme quadratique $f \longrightarrow \int |df|^2$ (ce laplacien a le signe contraire du laplacien des analystes).
Posons $\mathcal{R} = -\lambda$, on a $\tilde{\Delta} = \Delta - \lambda$. Le principe du minimax donne

$$N(\lambda) = \sup \{\dim \mathcal{E} \,/\, \mathcal{E} \text{ sous espace vectoriel de } C^\infty(M) \text{ tel que } \int_M f.\tilde{\Delta}f \leq 0\}$$

Exemple 3 : $\delta(M,g) = \hat{A}(M) = \hat{A}$ genre de M (pour une présentation plus complète voir [BE]).

Notons $\mathrm{Spin}(n)$ le revêtement à 2 feuillets de $SO(n)$. On dit qu'une variété riemannienne (M,g) admet une structure spinorielle ssi il existe un $\mathrm{Spin}(n)$ - fibré principal $\tilde{P}$ qui est un revêtement à deux feuillets du $SO(n)$ - fibré principal P formé par les repères tangents orthonormés sur (M,g). En cohomologie, ceci signifie que la classe de $\tilde{P}$ dans $H^1(M, \mathrm{Spin}(n))$ s'envoie sur la classe $[P]$ de P dans $H^1(M, SO(n))$. La suite exacte $0 \to Z_2 \to \mathrm{Spin}(n) \to SO(n) \to 0$ nous amène à caractériser l'existence d'une structure spinorielle par la nullité d'un élément $W_2(M) \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$, cet élément (appelé seconde classe de Stiefel - Whitney) étant l'image de $[P]$ par l'application de $H^1(M, SO(n))$ dans $H^2(M,Z_2)$ découlant de la suite exacte. En faisant le quotient de l'algèbre tensorielle de R^n par l'idéal engendré par les éléments $x \otimes x + ||x||^2.1$, on obtient une algèbre C_n dont le complexifié est noté $\tilde{C}_n$. Posons $p = [n/2]$ et notons V le sous espace de $\tilde{C}_{2p}$ engendré par les $e_{2k-1} - i\, e_{2k}$. La sous-algèbre S de $\tilde{C}_{2p}$ engendrée par V est isomorphe à $\wedge^* V$. Notons S^+ et S^- les sous algèbres isomorphes aux sous algèbres extérieures de degrés respectivement pairs et impairs. Le groupe $\mathrm{Spin}(n)$ admet une représentation canonique sur S notée ρ. Le fibré des spineurs $S(M)$ est le quotient de $\tilde{P} \times S$ par la relation d'équivalence $(p,v) \sim (p.g, \rho(g^{-1})v)$. La fibre - type S de $S(M)$ est de dimension $2^{[n/2]}$. En dimension paire, $S(M)$ se décompose en deux sous fibrés $S^+(M)$ et $S^-(M)$ dont les fibres S^+ et S^- ont toutes deux pour dimension $2^{(n/2)-1}$. La connexion canonique de Levi Cività de TM associée à la métrique g induit une connexion canonique D sur S (il y a en effet une manière unique de relever le sous fibré horizontal de TP en un sous fibré horizontal de $T\tilde{P}$). On définit l'opérateur de Dirac P sur les sections de S par $P\psi = \sum_i X_i \,.\, D_{X_i} \,.\, \psi$, où $\{X_i\}$ est une base orthonormée de l'espace tangent au point considéré de $T_m M$. L'opérateur P est elliptique et auto-adjoint L'espace $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}\, P$ est l'espace des spineurs harmoniques. En dimension paire, notons $\mathcal{H}^+$ et $\mathcal{H}^-$ les intersections de $\mathcal{H}$ avec les sections C^∞ de $S^+(M)$ et $S^-(M)$ respectivement. Le théorème de l'indice (cf [AS]) montre que $\dim(\mathcal{H}^+) - \dim(\mathcal{H}^-)$ est un invariant topologique appelé $\hat{A}$ - genre de M (et noté $\hat{A}(M)$). Par ailleurs, un calcul direct donne, pour toute section s de $S(M)$,

$$\int_M (Ps, Ps) = \int_M |Ds|^2 + \int_M \frac{u}{4} |s|^2$$

où u est la fonction courbure scalaire (voir paragraphe 0). On a donc ici $\mathcal{R}_0 = \frac{u}{4}$ et $\mathcal{R}_{min} = \frac{1}{4} \mathrm{Inf}\, u$.

Exemple 4 : Si (M,g) est une métrique d'Einstein, $\delta(M,g)$ est la dimension de l'espace des déformations infinitésimales d'Einstein de la métrique g.
Si M est une variété différentiable donnée, l'ensemble $\mathcal{M}$ des métriques riemanniennes sur M est un ouvert dans l'espace des sections de $T^*M \odot T^*M$ (symétrisé de $T^*M \otimes T^*M$). Le groupe des difféomorphismes ψ de M agit sur $\mathcal{M}$ par $(\psi,g) \to \psi^*g$. L'ensemble des structures riemanniennes sur M est donc le quotient de $\mathcal{M}$ par l'action du groupe des difféomorphismes. Au voisinage de chaque métrique g , il existe dans $\mathcal{M}$ une tranche $\mathcal{T}_g$ transversale aux orbites du groupe des difféomorphismes qui décrit donc localement l'ensemble des structures riemanniennes voisines de g . Une métrique g est dite d'Einstein si sa courbure de Ricci est proportionnelle à la métrique (ie $r(X,X)/g(X,X)$ est une constante). On ne sait généralement pas décrire (même localement) l'espace des structures riemanniennes d'Einstein sur la variété M (à noter cependant qu'en dimension 2 cet espace est une variété de dimension $3b_1-6$ appelée espace de Teichmüller). Généralement, $\mathcal{E}$ n'a aucune raison d'être une variété, mais on démontre (cf [BE2]) qu'il existe un voisinage U de g dans $\mathcal{M}$ tel que $U \cap \mathcal{T}_g \cap \mathcal{E}$ soit inclus dans une sous-variété analytique de $\mathcal{T}_g$. La dimension de cette sous-variété est appelée dimension du module des déformations d'Einstein et son espace tangent est l'espace des déformations infinitésimales d'Einstein.
En dérivant la condition $\mathrm{Ricci}(g_t) = \mu . g_t$ on obtient que toutes les déformations infinitésimales d'Einstein h sont des sections de $T^*M \odot T^*M$, de trace nulle, qui vérifient, dans une base orthonormée $\{e_i\}$ de T_mM qui diagonalise h ,

$$\int_M |Dh|^2 -2 \sum_{i,j} \sigma(e_i,e_j).h(e_i,e_i).h(e_j,e_j) = 0.$$

On a donc ici $\mathcal{R}_{min} = 2(n\,\sigma_{min} - \frac{u}{n})$.

Historique du Problème :

Notons que $\overline{\Delta}$ est un opérateur positif et que son noyau est formé des sections parallèles du fibré E . Notons ℓ la dimension de la fibre de E , on a donc $\dim[\mathrm{Ker}\ \overline{\Delta}] \le \ell$. En reportant dans 1.1, ceci donne

1.2. Si $\mathcal{R}_{min} > 0$ (resp. $\mathcal{R}_{min} \ge 0$), alors $\delta(M,g) = 0$ (resp. $\delta(M,g) \le \ell$) .

Remarquons que le cas $\delta(M,g) = \ell$ est le cas du fibré trivial.
Initialement, c'est Bochner qui utilisa cette méthode pour montrer que $b_1(M) \le n$ lorsque M admet une métrique vérifiant $r \ge 0$ (cf [B-Y]). Dans [LI1] A. Lichnerowicz montra par la même méthode qu'une variété spinorielle telle que

$u > 0$ (resp $u \geq 0$) vérifie $\hat{A}(M) = 0$ (resp. $\hat{A}(M) \leq 2^{(n/2)-1}$). Pour le démontrer, il suffit d'appliquer 1.2 au cas de l'exemple 3. Par la suite, D. Meyer et S. Gallot (cf [G-M]) montrèrent que $b_p \leq b_p(\mathbb{T}^n)$ dès que $R_{min} \geq 0$ (appliquer 1.2 au cas de l'exemple 1).

Le cas $\mathcal{R}_{min} < 0$ est plus difficile à étudier car il exige un contrôle explicite de $\bar{Z}_E(t)$ pour des $t \in]0, +\infty[$. Dans [LI], P. Li donne une majoration des nombres de Betti à l'aide de R_{min}. Pour cela, il applique une inégalité de Sobolev à toute forme harmonique α, ce qui donne

$$||\alpha||^2_{L^{2\beta}} \leq A.||D\alpha||^2_{L^2} + B.V^{-\frac{2}{n}}||\alpha||^2_{L^2} \leq (B - A\mathcal{R}_{min}).||\alpha||^2_{L^2} ,$$

où $\beta = \frac{n}{n-2}$. Partant de là, un procédé itératif dû à Moser donne une majoration du type $V.||\alpha||^2_{L^\infty} \leq C(B - A\mathcal{R}_{min}).||\alpha||^2_{L^2}$ ce qui induit

1.3. $$b_p(M) \leq \binom{n}{p}.C(B - A.\mathcal{R}_{min}).$$

La difficulté est donc alors de donner des constantes A et B une expression explicite dépendant aussi peu que possible de la variété M et de sa métrique g P. Li en donne une première estimation (via une inégalité isopérimétrique de C.B. Croke) qui n'est pas optimale, puisque les hypothèses nécessaires pour majorer les nombres de Betti sont celles du théorème 0.4. Par la suite S. Gallot (cf [GA1], [GA2], [GA3] et [GA4]) généralise la méthode de P. Li aux autres invariants et donne une estimation optimale des constantes A et B (i.e $B = 1$ et A ne dépend que d'un minorant ρ de r_{min} et d'un majorant D de d). La majoration des nombres de Betti devient alors optimale puisque, en reportant ces estimations dans 1.3, on obtient une constante explicite $\varepsilon(n) > 0$ telle que $b_p(M) \leq b_p(\mathbb{T}^n)$ dès que $|\sigma| .d^2 < \varepsilon(n)$. Plus récemment D. Meyer et B. Maurey ont proposé une variante de cette méthode qui donne de meilleurs résultats du point de vue numérique (cf [M-M]. Dans le même temps, M. Gromov développait une méthode purement géométrique (recouvrement par des boules dont on maîtrise à la fois le nombre et la topologie) pour majorer $b_1(M)$ (cf [GR1]) puis $b_p(M)$ (cf [GR2]). Malheureusement, cette dernière méthode n'est pas généralisable aux autres invariants. C'est pourquoi M. Gromov, cherchant une méthode unique pour borner tous les invariants qui soit plus simple et plus intimement reliée à la nature du problème que celle des inégalités de Sobolev, eut l'idée d'utiliser l'inégalité de Kato qui peut se traduire par le

1.4. Théorème (cf. [H-S-U]).- Notons E_o le fibré trivial $M \times \mathbb{R}^{\ell}$ au dessus de M, de même fibre que E, on a pour tout t

$$\overline{Z}_E(t) \leq \overline{Z}_{E_o}(t) = \ell . Z_M(t) ,$$

où $Z_M(t)$ est la trace de l'opérateur $e^{-t\Delta}$, i.e. $Z_M(t) = \sum_i e^{-\lambda_i t}$.

Preuve : Nous allons comparer les solutions de l'équation de la chaleur sur les fonctions f de M dans $\mathbb{R}$ et sur les sections s du fibré E. Elles s'expriment de la manière suivante

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) f(t,x) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{\Delta}\right) s(t,x) = 0 .$$

De l'inégalité $|d(|s|)|^2 \leq |Ds|^2$, on déduit $|s| . \Delta(|s|) \leq \langle \overline{\Delta}s, s \rangle$, ce qui donne, pour toute solution s de l'équation de la chaleur de $\overline{\Delta}$, $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) |s| \leq 0$. Le principe du maximum permet de conclure que, si $|s(0,x)| \leq f(0,x)$, alors $|s(t,x)| \leq f(t,x)$ pour tout $t > 0$. Ceux qui seraient gênés par le fait que $|s|$ n'est pas dérivable aux points où $s = 0$ peuvent se convaincre du résultat en posant $f_\varepsilon = (|s|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$, on a alors $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) f_\varepsilon \leq 0$ d'où $f_\varepsilon \leq f + \varepsilon$.

Notons k et $\overline{k}$ les noyaux des opérateurs $e^{-t\Delta}$ et $e^{-t\overline{\Delta}}$, i.e. les solutions f et s des équations de la chaleur de Δ et $\overline{\Delta}$ s'écrivent

$$f(t,x) = \int_M k(t,x,y) . f(0,y)\, dy$$

$$s(t,x) = \int_M \overline{k}(t,x,y)\, [s(0,y)]\, dy .$$

Notons $|\overline{k}(t,x,y)| = [\mathrm{Trace}\,({}^t\overline{k} \circ \overline{k})]^{1/2}$ la norme euclidienne de $\overline{k}(t,x,y)$, considéré comme endomorphisme de E_y dans E_x. De ce qui précède et du fait que $|\overline{k}(0,x,y)|^2 = \ell . k(0,x,y)^2$, on déduit $|\overline{k}(t,x,y)| \leq \sqrt{\ell} . k(t,x,y)$ d'où

$$\overline{Z}_E(t) = \int_M \mathrm{Tr}\, \overline{k}(t,x,x)\, dx \leq \ell . \int_M k(t,x,x)\, dx = \ell . Z_M(t) . \qquad \text{Q.E.D.}$$

Par suite l'inégalité 1.1. devient

1.5. $\quad \delta(M,g) \leq \ell \,.\mathrm{Inf}\, [e^{-\,\min . t}\, Z_M(t)]$.

Pour conclure, il manquait à M. Gromov une majoration explicite de $Z_M(t)$.

Une telle majoration a été trouvée par les auteurs et sera développée dans le paragraphe suivant. On pourra remarquer que cette majoration est optimale et ne dépend que d'un minorant ρ de la courbure de ricci et d'un majorant D du diamètre, entrant ainsi dans le cadre défini par la conjecture 0.5.

2. ESTIMATIONS EXPLICITES DU NOYAU DE LA CHALEUR (cf [B-G])

Dans la suite, une variété riemannienne (M^*, g^*) sera dite de révolution autour du point O s'il existe un point O', un nombre d^*, une fonction $h :]0,d^*[\to]0,+\infty[$ et un difféomorphisme ψ de $]0,d^*[\times S^{n-1}$ sur $M^*\setminus\{0,0'\}$ tels que, au point (s,x), on ait $\psi^* g^* = (ds)^2 + h^2(s).g_{S^{n-1}}$ (notez que la régularité de la métrique aux points O et O' impose $h(0) = h(d^*) = 0$, $h'(0) = 1$ et $h'(d^*) = -1$).

a) Le théorème fondamental

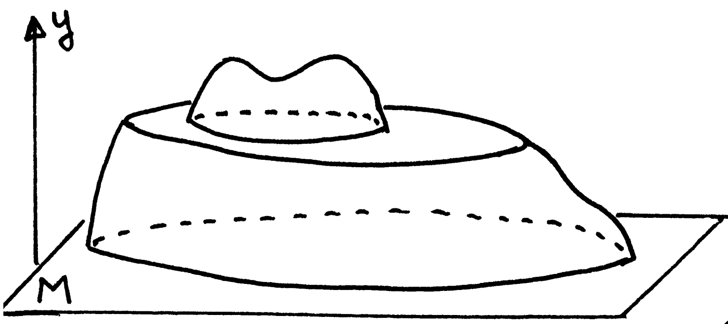
Dans une telle variété, la boule géodésique Ω^* de centre O et de rayon R (privée de O) est l'image par ψ de $]0,R[\times S^{n-1}$. Nous noterons k_M (resp k_{M^*}) le noyau de l'opérateur $e^{-t\Delta}$ sur (M,g) (resp (M^*,g^*)).

2.1. Théorème.- Soit L une fonction de $[0,1] \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Soit (M^*,g^*) une variété de révolution autour du point O, de volume V^*, telle que $\frac{\mathrm{Vol}\,\partial\Omega^*}{V^*} \leq L(\frac{\mathrm{Vol}\,\Omega^*}{V^*}, V^*)$ pour toute boule géodésique Ω^* centrée en O. Soit (M,g) une variété riemannienne quelconque, de volume V, dont tout domaine Ω à bord différentiable vérifie l'inégalité isopérimétrique $\frac{\mathrm{Vol}\,\partial\Omega}{V} \geq L(\frac{\mathrm{Vol}\,\Omega}{V},V)$. Si, pour tout s de $[0,1]$, on a $L(s,V^*)= L(s,v)$, alors

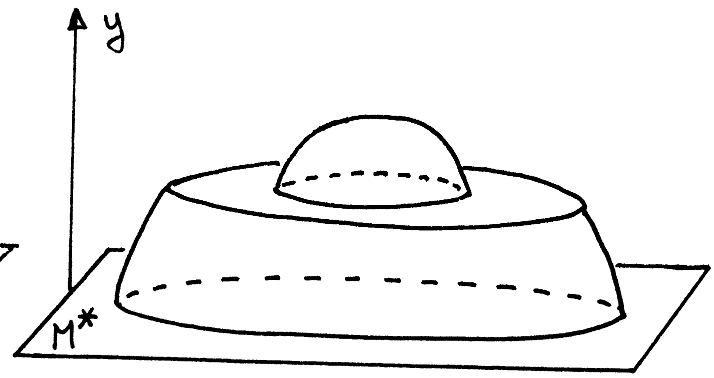
$$Z_M(t) \leq V.\ \sup_x k_M(t,x,x) \leq V^*\ k_{M^*}(t,0,0).$$

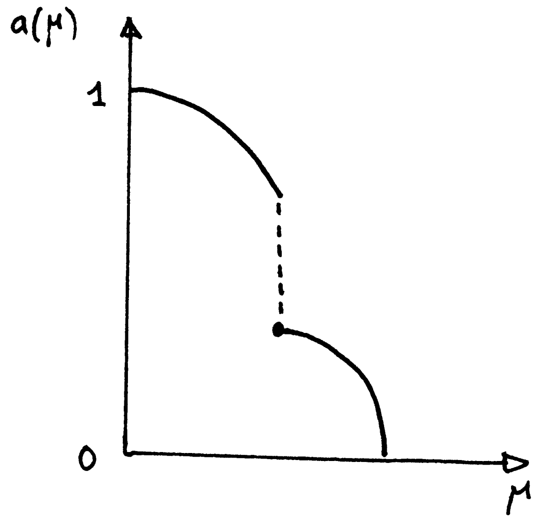
Idée de la preuve On notera $L(s)$ au lieu de $L(s,V) = L(s, V^*)$. (Comparer avec les démonstrations de [TA] et [BA] sur des domaines de $\mathbb{R}^n$). Soit f une fonction C^∞ de M dans $\mathbb{R}$. Notons $D(\mu)$ l'ensemble des y de M tels que $f(y) > \mu$. Posons $a(\mu) = \frac{1}{V}\mathrm{Vol}(D(\mu))$ et $\overline{f}(s) = \mathrm{Inf}\,\{\mu : a(\mu) < s\}$.
On a $\overline{f} \circ a(\mu) = \mu$. (voir figures page suivante).

Graphe de $m \mapsto f(m)$

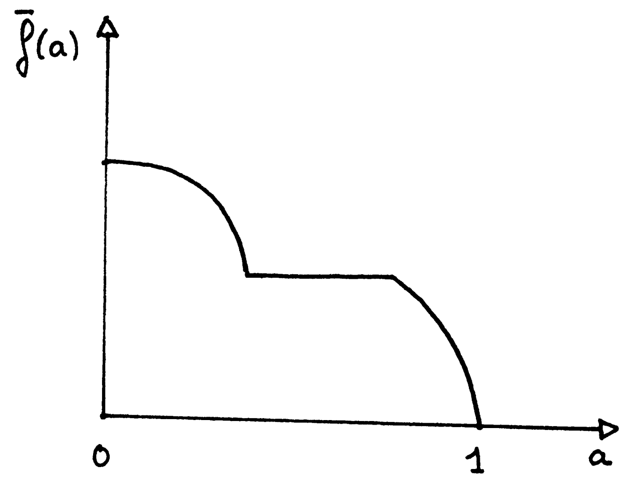


Graphe de $m^* \to f^*(m^*)$





Graphe de $\mu \mapsto a(\mu)$



Graphe de $a \mapsto \bar{f}(a)$

Soit $F(s) = \int_{D(\bar{f}(s))} f(y)\,dy$. Avec Fubini et le changement de variable $dv_g = \frac{1}{|df|} dv_\mu . d\mu$ (où dv_μ est la mesure induite sur l'hypersurface $H(\mu) = \partial D(\mu)$), nous obtenons $V.a'(\mu) = -\int_{H(\mu)} \frac{1}{|df|}.dv_\mu$ si μ n'est pas une valeur critique .

En approximant au besoin par des fonctions de Morse nous en déduisons la formule de la coaire :

$$F(s) = \int_{\bar{f}(s)}^{\bar{f}(0)} \left[\int_{H(\mu)} \frac{f}{|df|}.dv_\mu\right] d\mu = -V\int_{\bar{f}(s)}^{\bar{f}(0)} \mu.a'(\mu).d\mu = V.\int_0^s \bar{f}(u).du$$

En appliquant la formule de Green puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous obtenons

$$\int_{D(\overline{f}(s))} \Delta f = \int_{H(\overline{f}(s))} |df|.dv_{\mu} \geq \mathrm{Vol}_{n-1}\,[H(\overline{f}(s))]^2.\left(\int_{H(\overline{f}(s))} \frac{dv_{\mu}}{|df|}\right)^{-1}$$

Par ailleurs

$$\frac{d^2F}{d^2s} = V.\ \frac{d\overline{f}}{ds} = V.(a'[\overline{f}(s)])^{-1}\ ,$$

ce qui donne, en utilisant l'inégalité isopérimétrique, $\displaystyle\int_{D(\overline{f}(s))} \Delta f \geq -\, L^2(s).\frac{d^2F}{d^2s}$

Sur (M^*,g^*), considérons une fonction f^* qui ne dépend que de la distance au point O . Dans ce cas, les domaines $D^*(\mu)$ associés à f^* sont des boules géodésiques de centre O . Comme $|df^*|$ est constant sur $\partial D^*(\mu)$ l'inégalité de Cauchy ci-dessus devient une égalité, ce qui donne dans ce cas

$$\int_{D^*(\overline{f}^*(s))} \Delta f^* = -\,\mathrm{Vol}_{n-1}\,[H(\overline{f}^*(s))]^2\ .\ \frac{d^2F^*}{d^2s}\ .\ V^{*-2},\ \text{où}$$

$$F^*(s) = \int_{D^*(\overline{f}^*(s))} f^*(y)\,dy\ .$$

L'inégalité isopérimétrique donne alors

$$\int_{D^*(\overline{f}^*(s))} \Delta f^* \leq -\,L^2(s)\ .\ \frac{d^2F^*}{d^2s}$$

Les intégrales partielles du laplacien des fonctions f et f^* ont donc été transformées en un laplacien de dimension 1 appliqué aux intégrales partielles des fonctions f et f^* . Les équations de la chaleur sur M et M^* se transforment en équations de la chaleur de dimension 1 . Plus précisément, soient

$$f_t = k_M(t,x,.) \quad \text{et} \quad f_t^* = k_{M^*}(t,O,.)$$

les noyaux de l'opérateur $e^{-t\Delta}$ sur (M,g) et sur (M^*,g^*) respectivement.

Posons

$$F(t,s) = \int_{\{f_t \geq \overline{f}_t(s)\}} f_t \quad \text{et} \quad F^*(t,s) = \int_{\{f_t^* \geq f_t^*(s)\}} f_t^*\ ,$$

nous obtenons

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,s) = -\int_{\{f_t \geq \bar{f}_t(s)\}} \Delta f_t \leq L^2(s).\frac{\partial^2 F}{\partial^2 s}(t,s)$$

(la première égalité nécessite un calcul non trivial). De même

$$\frac{\partial F^*}{\partial t}(t,s) \geq L^2(s)\frac{\partial^2 F^*}{\partial^2 s}(t,s) \quad .$$

Posons $h = F - F^*$, nous avons

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t,s) - L^2(s)\frac{\partial^2 h}{\partial^2 s}(t,s) \leq 0 \; .$$

Par ailleurs $h(t,0) = 0$ (car nous intégrons alors sur un domaine de volume nul), $h(0,s) = 0$ (car $F(0,s) = F^*(0,s) = 1$, puisque $k_M(0,x,.)$ et $k_{M^*}(0,0,.)$ sont des masses de Dirac). Comme les intégrales de Δf_t et Δf_t^* sur M et M^* respectivement sont nulles, nous avons $\frac{\partial F^*}{\partial t}(t,1) = \frac{\partial F^*}{\partial t}(t,1) = 0$, donc $h(t,1) = h(0,1) = 0$. De plus $k_M(t,x,y)$ tend vers $\frac{1}{V}$ quand t tend vers $+\infty$, par conséquent $F(t,s)$ tend vers s et $h(t,s)$ tend vers zéro. Un principe du maximum permet alors de conclure que h est partout négative ou nulle, donc que $F \leq F^*$.

L'inégalité $V \, . \int_0^a f_t(s)ds \leq V^*. \int_0^a \bar{f}_t^*(s)ds$ est donc vérifiée pour tout $a \in [0,1]$. La convexité de $t \mapsto t^2$ et la 2° formule de la moyenne permettent d'en déduire

$$V^2 \int_0^1 \bar{f}_t(s)^2.ds \leq V^{*2} \int_0^1 \bar{f}_t^*(s)^2.ds$$

Par la formule de la coaire, nous en tirons

$$V \int_M k_M(t,x,y)^2.dy \leq V^* \int_M k_{M^*}(t,0,y)^2.dy$$

La loi de semi-groupe de $e^{-t\Delta}$ donne alors

$$V.\, k_M(2t,x,x) \leq V^*.k_{M^*}(2t,0,0)$$

Q. E. D.

b) <u>Quelques cas particuliers</u> : En général, dès qu'on possède une inégalité isopérimétrique sur un ensemble de variétés riemanniennes, on peut construire la variété de révolution correspondante et appliquer le Théorème 1.1.

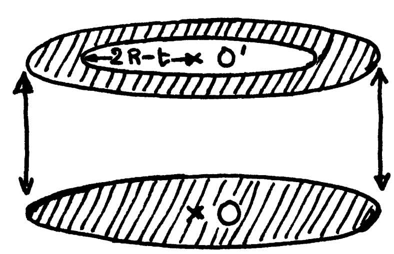
<u>1er exemple</u> : (M^*,g^*) est la sphère canonique $S^n(R)$ de rayon R.
Ce choix de (M^*,g^*) est bien adapté à la comparaison avec toutes les variétés riemanniennes (M,g) dont la courbure de Ricci est minorée par la courbure de Ricci de $S^n(R)$, i.e. par $(n-1)/R^2$. En effet, sous ces hypothèses, M. Gromov a prouvé dans [GR3] que, si Ω est un domaine à bord différentiable de M et si Ω^* est la boule géodésique de $S^n(R)$ telle que $\frac{\mathrm{Vol}(\Omega^*)}{V^*} = \frac{\mathrm{Vol}(\Omega)}{V}$, alors $\frac{\mathrm{Vol}\,\partial\Omega}{V} \geq \frac{\mathrm{Vol}\,\partial\Omega^*}{V^*}$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème 2.1. en définissant la fonction L par $L(\frac{\mathrm{Vol}\Omega^*}{V^*}, V^*) = \frac{\mathrm{Vol}\,\partial\Omega^*}{V^*}$, ce qui donne le

2.2. <u>Corollaire</u>.- Pour toute variété (M,g) dont la courbure de Ricci est minorée par $(n-1)/R^2$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$Z_M(t) \leq V.\ \sup_x k(t,x,x) \leq Z_{S^n(R)}(t) = Z_{S^n}\left(\frac{t}{R^2}\right).$$

<u>2ème exemple</u> : (M^*,g^*) est une galette $G^n(R)$.
Si $B^n(R)$ désigne la boule de rayon R muni de sa métrique euclidienne, la galette $G^n(R)$ est le quotient de $B^n(R) \times \{0,1\}$ par la relation d'équivalence qui identifie $(x,0)$ et $(x,1)$ dès que x appartient au bord de $B^n(R)$. Bien qu'une telle variété soit singulière à l'endroit où se fait le recollement, son noyau de la chaleur existe et son spectre est la réunion des deux spectres de $B^n(R)$ pour les deux conditions de Neumann et de Dirichlet sur le bord (voir 5.1). Notons respectivement 0 et 0' les centres des boules $B^n(R) \times \{0\}$ et $B^n(R) \times \{1\}$. La boule géodésique Ω^* de centre 0 et de rayon t est la boule euclidienne de centre 0 et de rayon t lorsque $t \leq R$, par contre si $t > R$ c'est le complémentaire dans $G^n(R)$ de la boule euclidienne de centre 0' et de rayon 2R-t (voir dessin ci-contre).



Posons

$$C = \inf_{\substack{\Omega\subset M \\ \mathrm{Vol}\Omega\leq V/2}} \left[\frac{\mathrm{Vol}\ \partial\Omega}{(\mathrm{Vol}\Omega)^{1-1/n}} \right] \text{ et } C^* = \frac{\mathrm{Vol}\ S^{n-1}}{(\mathrm{Vol}B^n)^{1-1/n}}$$

Choisissons R de sorte que $\frac{V}{V^*} = \left(\frac{C}{C^*}\right)^n$, ce qui donne $R = \frac{n.2^{-1/n}}{C.V^{-1/n}}$. Nous vérifions aisément que, pour tout domaine Ω de M et pour toute boule géodésique Ω^* centrée en 0 de M^*,

$$\mathrm{Vol}\,\partial\Omega \geq C.\ \mathrm{Inf}(\mathrm{Vol}\Omega,\ V-\mathrm{Vol}\Omega)^{1-1/n}$$
$$\mathrm{Vol}\,\partial\Omega^* = C^*.\ \mathrm{Inf}(\mathrm{Vol}\Omega^*,\ V^*-\mathrm{Vol}\Omega^*)^{1-1/n}$$

Si nous posons $L(s,V) = C.V^{-1/n}.\mathrm{Inf}(s,1-s)^{1-1/n}$, les hypothèses du théorème 2.1. sont satisfaites, ce qui donne le

2.3. Corollaire.- *Pour toute variété riemannienne compacte, définissons R comme ci-dessus. Nous avons alors*

$$Z_M(t) \leq V.\mathrm{Sup}_x\, k_M(t,x,x) \leq V.\left(\frac{C^*}{C}\right)^n.k_{G^n(R)}(t,0,0) = 2.\mathrm{Vol}B^n.k_{G^n(1)}\left(\frac{t}{R^2},0,0\right).$$

Les théorèmes 2.1. et 2.3. s'appliquent également au cas des variétés non compactes, mais 2.3. n'a d'intérêt que pour les variétés telles que $C.V^{-1/n}$ est non nul. Remarquons que le corollaire 2.2. est optimal, l'inégalité devenant une égalité ssi $(M,g) = S^n(R)$. Pourtant, comme 2.2. ne donne des résultats intéressants qu'en courbure de Ricci strictement positive, c'est un résultat beaucoup moins général que 2.3., qui ne suppose, lui, aucune hypothèse sur le signe de la courbure de Ricci. On peut trouver immoral que le corollaire 2.3. soit plus puissant alors que sa démonstration est un simple jeu d'écriture, comparée à la preuve de 2.2. qui nécessite une inégalité isopérimétrique non triviale. L'information géométrique dans le corollaire 2.3. est précisement contenue dans la constante isopérimétrique C, en particulier le résultat serait vide si C était nulle. La principale difficulté est maintenant de majorer R, donc de minorer explicitement $C.V^{-1/n}$.

c) Minoration de $CV^{-1/n}$:

Posons

$$H(\alpha) = \begin{cases} = \alpha^{1/2}\left[\displaystyle\int_0^{\frac{\alpha^{1/2}}{2}} (\cos t)^{n-1}dt\right]^{-1} & \text{si } \alpha>0 \\ = |\alpha|^{1/2}\left[\displaystyle\int_0^{\frac{|\alpha|^{1/2}}{2}} (\mathrm{ch}t)^{n-1}dt\right]^{-1} & \text{si } \alpha<0 \\ = 2 & \text{si } \alpha=0 \end{cases}$$

$$\Gamma(\alpha) = \begin{cases} = 2^{-1/n}\, H(\alpha) & \text{si } \alpha\geq 0 \\ = |\alpha|^{1/2n}\left[\displaystyle\int_0^{|\alpha|^{1/2}} \left(\frac{\mathrm{ch}t}{H(\alpha)} + \frac{|\alpha|^{-1/2}}{n}\mathrm{sh}t\right)^{n-1}dt\right]^{-1/n} & \text{si } \alpha<0 \end{cases}$$

2.4. Théorème (cf [GA2] ou [GA3]).- Sur une variété riemannienne (M,g) vérifiant $r \geq \rho$ et $d \leq D$, on a

$$C.V^{-1/n} \geq \Gamma\left(\frac{\rho.D^2}{n-1}\right).D^{-1}$$

En reportant cette estimation dans 2.3., on obtient le

2.5. Corollaire.- Sur une variété riemannienne (M,g) vérifiant $r \geq \rho$ et $d \leq D$, on

$$Z_M(t) \leq V.\ \operatorname{Sup}_x k_M(t,x,x) \leq 2.\mathrm{Vol}\, B^n.k_{G^n(1)}\left(\frac{2^{2/n}}{n^2}\Gamma\left(\frac{\rho.D^2}{n-1}\right)^2.\frac{t}{D^2},0,0\right)$$

Remarquons que les résultats 2.4. et 2.5. sont bien conformes à la philosophie de la conjecture 0.5.

3. BORNES EXPLICITES POUR DES INVARIANTS

Les résultats donnés dans ce chapitre sont numériquement meilleurs que ceux cités au paragraphe 1. (Voir en appendice).

a) Cas général

Revenons au cas général d'un invariant $\delta(M,g)$ du type défini au paragraphe 1. Posons

$$1 + \xi(\alpha,\eta) = \operatorname{Inf}_{t\in\mathbb{R}^+}\left[e^{-\eta.t}.2.\mathrm{Vol}B^n.k_{G^n(1)}\left(\frac{2^{2/n}.\Gamma(\alpha)^2.t}{n^2},0,0\right)\right]$$

Remarquons qu'il existe une constante $C(n,\alpha)$ telle que

$$\xi(\alpha,\eta) \leq C(n,\alpha).(1+|\eta|)^{n/2}$$

Les théorèmes 1.5. et 2.5. donnent le

3.1. Théorème.- Soient α et η deux nombres réels donnés, pour toute variété riemannienne (M,g) vérifiant $r_{min}.d^2 \geq (n-1)\alpha$ et $R_{min} d^2 \geq \eta$, on a $\delta(M,g) \leq \ell[1+\xi(\alpha,\eta)]$.

Remarquons que $\xi(\alpha,\eta)$ tend vers 0 avec η (il suffit de prendre $t = |\eta|^{-1/2}$ pour s'en convaincre). Notons $\varepsilon(\alpha,\ell)$ un nombre positif tel que $\xi[\alpha,-\varepsilon(\alpha,\ell)] = \frac{1}{\ell}$. Comme $\delta(M,g) < \ell+1$ implique $\delta(M,g) \leq \ell$, nous obtenons le

3.2. Corollaire.- Pour toute variété riemannienne (M,g) vérifiant $r_{min}.d^2 \geq (n-1)\alpha$ et $\mathcal{R}_{min}.d^2 > -\varepsilon(\alpha,\ell)$, on a $\delta(M,g) \leq \ell$.

D'après 1.1. et 1.4., nous avons

$$\sum_{\tilde\lambda_j \le \lambda} e^{-(\tilde\lambda_j - \mathcal{R}_{min})t} \le \ell . \sum_k e^{-\lambda_k t}$$

Notons $\tilde N(\lambda)$ le nombre de valeurs propres $\tilde\lambda_j$ de $\tilde\Delta$ qui sont plus petites que λ, on a d'après 2.5.

$$\tilde N(\lambda) \le \ell[1 + \xi(\alpha, -(\lambda - \mathcal{R}_{min})d^2)]$$

Il existe donc un nombre $C(n,\alpha)$ tel que

$$\tilde N(\lambda) \le \ell[1 + C(n,\alpha)(\lambda - \mathcal{R}_{min})^{n/2} d^n]$$

D'où la proposition

3.3. <u>Proposition</u>.- <u>Soit</u> (M,g) <u>une variété riemannienne vérifiant</u> $r_{min}.d^2 \ge (n-1)\alpha$. <u>Soit</u> $\tilde\Delta$ <u>le laplacien défini au paragraphe 1 sur les sections du fibré</u> $E \to M$ <u>de fibre</u> $\mathbb{R}^\ell$. <u>Les valeurs propres de ce laplacien vérifient</u>

$$\tilde\lambda_i d^2 \ge \mathcal{R}_{min}.d^2 + C(n,\alpha)^{-2/n} \left(\frac{i-\ell}{\ell}\right)^{2/n}$$

Notons $\tilde k$ le noyau de l'opérateur $\tilde\Delta$. Notons $\{s_i\}$ une L^2- base orthonormée de l'espace des sections de E formée de sections propres de $\tilde\Delta$ correspondant à la valeur propre $\tilde\lambda_i$. On a

$$\text{Trace } [\tilde k(t,x,x)] = \sum e^{-\tilde\lambda_i t} . |s_i(x)|^2 .$$

Notons k_v le noyau de l'opérateur $e^{-t(\Delta+v)}$, où v est une fonction potentiel sur M. Une démonstration analogue à celle de 1.4. et le théorème 2.5. donnent le

3.4. <u>Théorème</u>.- <u>Soit</u> $\mathcal{R}_o$ <u>la fonction définie au paragraphe 1. Nous avons toujours</u>

$$\sum e^{-\tilde\lambda_i t} . |s_i(x)|^2 \le \ell . k_{\mathcal{R}_o}(t,x,x) \le \ell . e^{-\mathcal{R}_{min} t} . k(t,x,x)$$

<u>De plus, sur toute variété</u> (M,g) <u>vérifiant</u> $r_{min}.d^2 \ge (n-1)\alpha$, <u>nous avons</u>

$$V. \sum_{1 \le j \le i} |s_j(x)|^2 \le \ell . [1 + \xi(\alpha, -(\tilde\lambda_i - \mathcal{R}_{min})d^2)]$$

Ceci signifie qu'on contrôle la norme L^∞ des sections propres à partir de leur norme L^2.

b) Résultats ne dépendant que d'un minorant de la courbure de Ricci et d'un majorant du diamètre

En appliquant 3.1. aux cas des exemples 1,2 et 3 du paragraphe 1, et en remarquant que $u_{min} \geq n.r_{min}$, nous obtenons le

3.5. Théorème.- Soit α un nombre réel donné. Pour toute variété riemannienne (M,g) vérifiant $r_{min}.d^2 \geq (n-1)\alpha$, nous avons

(i) $b_1(M) \leq n[1+\xi(\alpha,(n-1)\alpha)]$

(ii) $N(\lambda) \leq 1 + \xi(\alpha, -\lambda.d^2)$

(iii) $\hat{A}(M) \leq 2^{(n/2)-1}[1+\xi(\alpha,\frac{1}{4}\, u_{min}.d^2)] \leq 2^{(n/2)-1}[1+\xi(\alpha,\frac{n(n-1)}{4}\,\alpha)]$

(iv) la dimension de l'espace des spineurs harmoniques sur (M,g) est majorée par $2^{[n/2]}.[1+\xi(\alpha,\frac{1}{4}\, u_{min}.d^2)]$

REMARQUES :

(1) Ces résultats répondent de manière positive à la conjecture 0.5. dans les cas des invariants considérés. Remarquons qu'ils sont réellement optimaux

- Optimalité de (i) : considérons une surface H_γ de dimension 2, de courbure -1 et de genre γ. Le théorème de Gauss-Bonnet (cf 0.1.) implique que son volume est égal à $4\pi(\gamma-1)$. Notons M_γ le produit riemannien de H_γ avec un tore plat $\mathbb{T}^{n-2}$ de volume $\frac{1}{4\pi(\gamma-1)}$. Nous avons $r_{min} = -1$ et $V = 1$ pour tout γ, par contre $r_{min}.d^2$ tend vers $-\infty$ et $b_1(M_\gamma)$ tend vers l'infini quand γ tend vers l'infini.
- Optimalité de (ii) : Considérons le produit $M_\varepsilon = S^{n-1}(\varepsilon^{1/(n-1)}) \times S^1(\frac{1}{\varepsilon})$ de deux sphères de rayons $\varepsilon^{1/n-1}$ et $\frac{1}{\varepsilon}$, dont le volume est constant et égal à celui de $S^{n-1}(1)\times S^1(1)$. Les valeurs propres de $S^1(\frac{1}{\varepsilon})$ étant de la forme $p^2.\varepsilon^2$ (où $p \in \mathbb{N}$) et de multiplicité 2 pour $p \geq 1$, on a $N_{M_\varepsilon}(\lambda) \geq 2.\#\{p \in \mathbb{N}^*: p^2 \leq \frac{\lambda}{\varepsilon^2}\}$. Donc, pour λ fixé, $N_{M_\varepsilon}(\lambda)$ tend vers l'infini en même temps que le diamètre lorsque ε tend vers zéro. On peut également construire une suite M_n de variétés de diamètre bornés mais telles que $N_{M_n}(\lambda)$ (pour λ fixé) tende vers l'infini lorsque $r_{min}(M_n)$ tend vers $-\infty$ (voir [GA3], contre exemple 1.2.).

- Optimalité de (iii) : Considérons une variété dont le $\hat{A}$ - genre soit non - trivial (par exemple une quartique de $\mathbb{C}P^3$, appelée surface K3). En faisant des sommes connexes de telles variétés, on augmente indéfiniment le $\hat{A}$ - genre. Le recollement entre deux variétés peut se faire de manière à contrôler r_{min}, mais évidemment le diamètre tend alors vers l'infini.

(2) Le résultat (ii) peut s'améliorer. On a en fait

$$N(\lambda) \leq 1 + \operatorname*{Inf}_{t \in \mathbb{R}^+} \left[e^{\lambda d^2 t} (2.\mathrm{Vol}\, B^n .\ k_{G^n(1)} [\frac{2^{2/n} \Gamma(\alpha)^2}{n^2} .\ t, 0, 0] - 1) \right]$$

(3) De même le résultat (i) peut s'améliorer. En effet, si α_i est une 1 - forme fermée propre du laplacien de Hodge $\tilde{\Delta}$ correspondant à une valeur propre $\tilde{\lambda}_i$ non nulle, il existe une fonction propre ψ_i de Δ telle que $\alpha_i = d\psi_i$. ceci implique

$$b_1 + Z_M(t) - b_o \leq \sum e^{-\tilde{\lambda}_i t} \leq \ell . e^{r_{min} t} Z_M(t)$$

d'où $\quad b_1(M) - b_o(M) \leq \operatorname*{Inf}_t [n\ e^{-(n-1)\alpha t} - 1]\ [2\ \mathrm{Vol}\ B^n .\ k_{G^n(1)} (2^{2/n} \Gamma(\alpha)^2 t/n^2, 0, 0)]$

(4) En partant de (ii), un raisonnement analogue à celui de 3.3. donne

3.6. $\quad \lambda_i d^2 \geq C(\alpha,n)^{-2/n} .\ i^{2/n}$.

Un résultat de H. Weyl (cf [B-G-M] p 215)) montre que $\lambda_i . V^{2/n} \sim C . i^{2/n}$ quand i tend vers l'infini. On peut donc se demander si le résultat ci-dessus n'est pas améliorable en une minoration du type $\lambda_i . V^{2/n} \geq C(\alpha,n) i^{2/n}$. En fait, ceci est impossible comme le prouve la famille de contre-exemples $M_\varepsilon = S^{n-1}(\varepsilon^{1/(n-1)}) \times S^1(\frac{1}{\varepsilon})$ déjà utilisés ci-dessus. En effet, pour tout i fixé, $\lambda_i(M_\varepsilon) . V(M_\varepsilon)^{2/n}$ tend vers zéro avec ε alors que $\lambda_i(M_\varepsilon) . d^2(M_\varepsilon)$ est minoré uniformément par $C(0,n) i^{2/n}$. Ceci signifie que la minoration 3.6. est la seule qu'on puisse espérer et que l'estimation asymptotique n'est valable que pour des indices i plus grands qu'un nombre N qui tend vers l'infini avec le diamètre d

(5) Grâce à 3.3., on montre que les valeurs propres $\tilde{\lambda}_i$ du laplacien de Hodge sur les 1-formes sont minorées. En fait, pour toute variété (M,g) vérifiant $r_{min} d^2 \geq (n-1)\alpha$, nous obtenons

$$\tilde{\lambda}_i . d^2 \geq (n-1)\alpha + C(n,\alpha)^{-2/n} (\frac{i-n}{n})^{2/n}$$

(6) Le théorème 3.4. implique, pour toute fonction f vérifiant $\Delta f = \lambda . f$,

$$V.\ ||f||^2_{L^\infty} \leq [1 + \xi(\alpha, -\lambda d^2)]\ ||f||^2_{L^2} \leq [1 + C(n,\alpha)\lambda^{n/2}.d^n]\ ||f||^2_{L^2}$$

on a donc un contrôle de l'amplitude des vibrations en fonction de la fréquence et de l'énergie.

(7) De même le théorème 3.4. implique que, pour toute base L^2-orthonormée $\{\alpha_i\}$ de l'espace des 1 formes harmoniques et pour tout point x de M ,

$$V.\ \sum |\alpha_i(x)|^2 \leq n\ [1 + \xi(\alpha, (n-1)\alpha)].$$

En appliquant 3.2. aux cas des exemples 1 et 3 du paragraphe 1, nous obtenons la

3.7. Proposition.- Soient $\varepsilon_1(n)$, $\varepsilon_2(n)$ et $\varepsilon_3(n,\alpha)$ n'importe quels nombres réels positifs vérifiant

$$\xi[-\varepsilon_1(n),\ -(n-1)\ \varepsilon_1(n)] \leq \frac{1}{n}$$

$$\xi[-\varepsilon_2(n),\ -\frac{n(n-1)}{4}\ \varepsilon_2(n)] \leq 2^{-n/2}\ ,$$

$$\xi(\alpha,\ -\frac{n(n-1)}{4}\ \varepsilon_3(n,\alpha)) \leq 2^{-n/2}\ .$$

(i) Sur toute variété riemannienne (M,g) vérifiant $r_{min} d^2 \geq -(n-1)\ \varepsilon_1(n)$, nous avons $b_1(M) \leq n$

(ii) Sur toute variété riemannienne (M,g) vérifiant $r_{min} d^2 \geq -(n-1)\ \varepsilon_2(n)$, le $\hat{A}$ genre et la dimension de l'espace des spineurs harmoniques sont bornés respectivement par $2^{n/2-1}$ et par $2^{[n/2]}$.

(iii) Sur toute variété riemannienne (M,g) vérifiant $r_{min}.d^2 \geq \alpha$ et $u_{min}.d^2 \geq -n(n-1)\ .\ \varepsilon_3(n,\alpha)$, le $\hat{A}$ genre et la dimension de l'espace des spineurs harmoniques sont bornés respectivement par $2^{n/2-1}$ et $2^{[n/2]}$.

REMARQUES :

- Cette proposition est optimale car $b_1(\mathbb{T}^n)$ est égale à n et la dimension de l'espace des spineurs harmoniques de $\mathbb{T}^n$ est égale à $2^{[n/2]}$.
- Le résultat (iii) est plus fin que le (ii) car $u_{min} \geq n.r_{min}$ (cf. le paragraphe O).
- Ces résultats généralisent ceux de Bochner et de Lichnerowicz cités au paragraphe 1.

Remarquons que, sur la sphère S^n munie de sa métrique canonique, les valeurs propres du laplacien sont les nombres $p(n+p-1)$ pour tous les $p \in \mathbb{N}^*$ (cf [B-G-M] p 159). La multiplicité correspondante sera notée m_p. En particulier $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n+1} = n$ et $\lambda_{n+2} = 2(n+1)$. La proposition suivante montre que cette situtation est un cas limite.

3.7. Proposition.- Il existe une fonction positive explicite $\eta(\varepsilon,n)$, tendant vers zéro avec ε telle que, sur toute variété riemannienne (M,g) à courbure de Ricci minorée par $(n-1)$, la condition $\lambda_{n+1} < n+\varepsilon$ implique $\lambda_{n+2} > 2(n+1) - \eta(\varepsilon,n)$.

Preuve : Le théorème 2.2. donne

$$\sum_{i=1}^{n+2} e^{-\lambda_i t} \leq (n+1)e^{-nt} + m_2\, e^{-2(n+1)t} + \sum_{p\geq 3} m_p .\, e^{-p(n+p-1)t}$$

L'hypothèse implique

$$\lambda_{n+2} \geq 2(n+1) - \frac{1}{t} \,\mathrm{Log}\, [m_2 + (n+1)\, e^{(n+2)t}\, (1-e^{-\varepsilon t}) + \sum_{p\geq 3} m_p\, e^{-[p(n+p-1)-2(n+1)]t}]$$

En choisissant t_o assez grand et ε assez petit par rapport à t_o, on obtient bien

$$\lambda_{n+2} \geq 2(n+1) - \eta(\varepsilon) \quad \text{avec} \quad \lim_{\varepsilon \to 0_+} \eta(\varepsilon) = 0 .$$

Q.E.D.

Lorsque (M^*, g^*) est une variété de révolution autour de O comme au début du paragraphe 2, nous noterons λ_1^* la première valeur propre non triviale de la forme quadratique $f \longmapsto \int_{M^*} |df|^2$ restreinte aux fonctions qui ne dépendent que de la distance au point O . En faisant tendre t vers l'infini dans 2.1. puis en prenant, $M^* = G^n(R)$ nous obtenons

3.8. Proposition.- Pour toute variété riemannienne (M,g) et toute variété de révolution (M^*,g^*) vérifiant les hypothèses de 2.1, nous avons $\lambda_1(M,g) \geq \lambda_1{}^*$.

En particulier, si $r_{min}.d^2 \geq (n-1)\alpha$, on a $\lambda_1(M,g).d^2 \geq \frac{2^{2/n}}{n^2} . \Gamma(\alpha)^2.\lambda_1(B^n)$.

Si Ω est un domaine à bord $\partial\Omega$, notons $\lambda_1(\Omega)$, k_Ω et $Z_\Omega(t)$ respectivement la première valeur propre de Δ , le noyau de $e^{-t\Delta}$ et la trace de $e^{-t\Delta}$ sur Ω lorsqu'on met sur le bord $\partial\Omega$ la condition de Dirichlet. Une démonstration analogue à celle de 2.1. donne le

3.9. Théorème.- Soient (M,g) et (M^*,g^*) des variétés vérifiant les hypothèses de 2.1. Soit Ω un domaine quelconque de M . Alors

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*)$$

$Z_\Omega(t) \leq \mathrm{Vol}\Omega^* k_{\Omega^*}(t,0,0)$ pour tout t , où Ω^* est la boule géodésique de M^* centrée en 0 et vérifiant $\frac{\mathrm{Vol}\Omega^*}{V^*} = \frac{\mathrm{Vol}\Omega}{V}$.

En particulier, en prenant $M = G^n(R)$ on montre que, si $r_{min}.d^2 \geq (n-1)\alpha$, alors $\lambda_1(\Omega)(\mathrm{Vol}\Omega)^{2/n} \geq \lambda_1(B^n).n^{-2} . \Gamma^2(\alpha) \frac{V^{2/n}}{d^2}$ (cf [GA3]). En prenant $M^* = S^n(R)$ on retrouve le théorème 5 de [B-M].

Remarque : Ce théorème implique en particulier que $\lambda_1(\Omega).(\mathrm{Vol}\Omega)^{2/n}$ est minoré en fonction de M indépendamment de Ω .

c) Résultats ne dépendant que d'un majorant de $|\sigma| .d^2$

En appliquant 3.1. et 3.2. au cas du 1° exemple du paragraphe 1, nous obtenons le

3.10. Théorème.- Soit K un nombre réel positif donné. Toute variété riemannienne (M,g) telle que $|\sigma|.d^2 \leq K$ vérifie

$$b_p(M) \leq \binom{n}{p} . [1 + \xi(-K, p(n-p) R_{min}.d^2)]$$

$$\leq \binom{n}{p} . [1 + \xi(-K, -\frac{2}{3} p(n-p) [n(n-1)(n+\tfrac{1}{4})]^{1/2} K)] .$$

<u>En particulier, si</u> $|\sigma|.d^2 \leq \varepsilon(n)$ <u>et si</u> $\varepsilon(n)$ <u>vérifie</u>

$$\xi(-\varepsilon(n), -\frac{2}{3}p(n-p)[n(n-1)(n+\frac{1}{4})]^{1/2}\varepsilon(n)) \leq \binom{n}{p}^{-1},$$

<u>alors</u> $b_p(M) \leq b_p(\mathbb{T}^n)$.

En appliquant 3.1. et 3.2. au cas du 4° exemple du paragraphe 1, nous obtenons le

3.11. <u>Théorème</u>.- <u>Soit</u> η <u>un nombre réel donné</u>. Pour toute variété <u>d'Einstein</u> (M,g) <u>vérifiant</u> $(n.\sigma_{min} - \frac{u}{n})d^2 \geq \eta$, <u>la dimension</u> N(M,g) <u>du module des déformations d'Einstein au voisinage de</u> (M,g) <u>est majorée par</u> $\frac{(n-1)(n+2)}{2}.[1+\xi(\eta,2\eta)]$. <u>En particulier si</u> $(n.\sigma_{min} - \frac{u}{n})d^2 \geq -\varepsilon(n)$, <u>où</u> $\varepsilon(n)$ <u>est défini par</u>

$\xi(-\varepsilon(n), -2\varepsilon(n)) \leq \frac{2}{(n-1)(n+2)}$, <u>alors</u> $N(M,g) \leq \frac{(n-1)(n+2)}{2}$.

<u>REMARQUES</u> :

(1) Le résultat 3.11. est optimal car le module des déformations plates du tore $\mathbb{T}^n$ est précisément de dimension $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ (à partir d'une métrique plate du tore, on obtient une autre métrique plate non isométrique en ajoutant à g une forme bilinéaire symétrique constante de trace nulle).

(2) L'hypothèse $(n\sigma_{min} - \frac{u}{n})d^2$ bornée inférieurement est équivalente à l'hypothèse $|\sigma|.d^2$ bornée supérieurement. En effet, on a $r_{min} = \frac{u}{n} \geq (n-1)\sigma_{min}$, $r_{min}.d^2 \leq (n-1)\pi^2$ et $(\sigma_{max} - \frac{u}{n}) \leq (n-1)(\frac{u}{n} - \sigma_{min})$ d'après le paragraphe O . L'hypothèse $(n\,\sigma_{min} - \frac{u}{n})\,d^2 \geq \eta$ implique (calcul direct)

$$\sigma_{min}d^2 \geq \eta \quad \text{et} \quad \sigma_{max}.d^2 \leq \frac{(n^2-n+1)(n-1)}{n}\pi^2 - (\frac{n-1}{n})\eta .$$

Réciproquement

$$\sigma_{min} - (n-1)(\sigma_{max} - \sigma_{min}) \leq n\,\sigma_{min} - \frac{u}{n} \leq \sigma_{min} .$$

(3) Le théorème 3.4. implique que, pour toute base L^2-orthonormée $\{\alpha_i\}$ de l'espace des p-formes harmoniques et pour tout point x de M ,

$$V . \sum|\alpha_i(x)|^2 \leq \binom{n}{p}\left[1 + \xi(-K, -\frac{2}{3}p(n-p)[n(n-1)(n+\frac{1}{4})]^{1/2}K)\right].$$

dès que $|\sigma|.d^2 \leq K$ (l'égalité étant atteinte pour les tores plats).

4. GENERALISATION DE L'INEGALITE DE KATO

Une submersion $p : M \to B$ est dite riemannienne si les métriques $\tilde{g}$ et g de M et B (respectivement) vérifient, pour tout couple de vecteurs X, Y orthogonaux à la fibre $p^{-1}(b)$

$$\tilde{g}(X,Y) = g(p_*(X), p_*(Y)).$$

La fibre est dite totalement géodésique si toute géodésique tangente à la fibre est entièrement contenue dans la fibre. Dans ce cas toutes les fibres sont isométriques à une même fibre-type (F, g_o). Par exemple si $\pi : E \to B$ est un fibré vectoriel et si $U(E)$ est son fibré unitaire, l'application π est une submersion à fibres totalement géodésiques R^ℓ (resp. $S^{\ell-1}$) de E (resp. $U(E)$) sur B. L'inégalité 1.4. se généralise de la manière suivante.

4.1. Théorème.- *Soit $p : (M,\tilde{g}) \to (B,g)$ une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques compactes. Notons (F,g_o) la fibre-type. Notons respectivement Z_M, Z_B, Z_F et $Z_{B\times F}$ la trace de l'opérateur $e^{-t\Delta}$ sur $(M,\tilde{g})$, sur (B,g), sur (F,g_o) et sur $(B\times F, g\times g_o)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, nous avons*

$$Z_M(t) \leq Z_{B\times F}(t) = Z_B(t) \,.\, Z_F(t) \,,$$

l'égalité étant atteinte si et seulement si p est la submersion triviale $B \times F \to B$.

Ce théorème nous a été suggéré par M. Gromov. Pour une autre démonstration voir [BN]

Idée de la preuve : Désignons par Δ_F le laplacien de F et par $E(\lambda)$ l'espace propre de Δ_F associé à la valeur propre λ. On désigne par Δ_v le laplacien vertical de M défini, pour tout point m de M, par

$$\Delta_v f(m) = \Delta_{F_{p(m)}} (f/F_{p(m)}) (m),$$

où $F_b = p^{-1}(b)$ et où f/F_b est la restriction de f à F_b.

On définit le laplacien horizontal Δ_h par $\Delta_M = \Delta_v + \Delta_h$. La submersion étant à fibres totalement géodésiques, les opérateurs Δ_M, Δ_v et Δ_h commutent, on a donc une diagonalisation simultanée de Δ_M et Δ_v. Le spectre de Δ_v est discret et c'est celui de Δ_F. Notons $C^\infty_\lambda(M)$ l'ensemble des fonctions f sur M qui vérifient $\Delta_v f = \lambda f$. Nous construisons un fibré $H(\lambda)$ de fibre-type $E(\lambda)$ dont les sections C^∞ sont les applications $b \to f/F_b$ pour toutes les $f \in C^\infty_\lambda(M)$. Les changements de cartes $U_i \cap U_j \times F \to U_i \cap U_j \times F$ de M induisent des isométries γ_{ij} sur F ; les changements de cartes de $H(\lambda)$ sont obtenus en associant, à toute fonction ψ de $E(\lambda)$, la fonction $\psi \circ \gamma_{ij}^{-1}$. Sur chaque fibre de $H(\lambda)$ nous mettons le produit scalaire de $L^2(F)$. Pour toute section s de $H(\lambda)$, notons f_s l'élément correspondant de $C^\infty_\lambda(M)$. Si X^* est un champ de vecteur sur B, notons X le champ de vecteur sur M, orthogonal à la fibre et tel que $p_*(X) = X^*$. Nous définissons la connexion par $D_{X^*}s = X.f_s$. Elle est compatible avec la métrique ci-dessus (dérivation sous une intégrale). Notons $\overline{\Delta}_\lambda$ le laplacien brut de $H(\lambda)$, on a $\overline{\Delta}_\lambda s = \Delta_h f_s$. Le laplacien de M restreint à $C^\infty_\lambda(M)$ étant noté Δ_λ, on a $\Delta_\lambda = \overline{\Delta}_\lambda + \lambda.\mathrm{id}$. Notons Z_{Δ_λ} et $Z_{\overline{\Delta}_\lambda}$ les traces de $e^{-t\Delta_\lambda}$ et de $e^{-t\overline{\Delta}_\lambda}$, nous avons

$$Z_M(t) = \sum_\lambda Z_{\Delta_\lambda}(t) = \sum_\lambda Z_{\overline{\Delta}_\lambda}(t) . e^{-\lambda t} .$$

L'inégalité 1.4. donne $Z_{\overline{\Delta}_\lambda}(t) \le \dim\,[E(\lambda)] . Z_B(t)$, d'où

$$Z_M(t) \le \sum e^{-\lambda t} . \dim[E(\lambda)] . Z_B(t) = Z_F(t) . Z_B(t) .$$

Q. E. D.

5. ILLUSTRATIONS NUMERIQUES

5.1. Reprenons le deuxième exemple du paragraphe 2 : la galette $G^n(1)$ obtenue comme $B^n(0,1)\times\{0\} \cup B^n(0,1)\times\{1\}$, réunion disjointe de deux exemplaires de la boule euclidienne de rayon 1 centrée en 0 de R^n, où l'on identifie les points $(x,0)$ et $(x,1)$ quand x est dans $S^{n-1}(0,1)$. On note $0_1 = (0,0)$ et $0_2 = (0,1)$. On considère la paramétrisation suivante

$$\psi :]0,2[\times S^{n-1} \to G^n(1)\setminus\{0_1,0_2\}$$

définie par

$$\psi(r,\theta) = \begin{cases} r\theta & \text{si } 0 < r \le 1 \\ (2-r)\theta & \text{si } 1 \le r < 2 \end{cases}$$

la métrique g^* sur $G^n(1)$ est donnée par

$$\psi^* g^* = dr^2 + \alpha^2(r)\,d\theta^2$$

où $d\theta^2$ est la métrique sur S^{n-1} et où $\alpha(r) = \begin{cases} r & \text{si } 0 \le r \le 1 \\ 2-r & \text{si } 1 \le r \le 2 \end{cases}$

On ne s'intéresse ici qu'à la partie radiale (c.à.d invariante par l'action de $0(n)$) du noyau de la chaleur sur $G^n(1)$.

Pour étudier l'opérateur correspondant, $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - (n-1)\frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)}\frac{\partial}{\partial r}$, on est amené

à étudier l'opérateur $\quad - \frac{d^2}{dr^2} - (n-1)\frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)}\frac{d}{dr}$ sur $L^2([0,2],\alpha^{n-1}(r)dr)$.

Compte tenu de la symétrie naturelle $r \to 2-r$, on se ramène à étudier sur $L^2([0,1], r^{n-1}dr)$ pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann en 1. On reconnait alors la partie radiale (c.à.d invariante par l'action de $O(n)$) du Laplacien de $B^n(0,1)$.

Posons maintenant

$$(5.2)\begin{cases} m = \dfrac{n-2}{2} \\ \tilde{J}_m(r) = \Gamma(m+1) \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(r/2)^{2k}}{k!\Gamma(k+m+1)} \end{cases}$$

On obtient alors facilement les résultats suivants

5.3. <u>Proposition</u> <u>Les valeurs propres de l'opérateur</u> $= -\frac{d^2}{dr^2} - (n-1)\frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)}\frac{d}{dr}$ <u>dans</u> $L^2([0,2], \alpha(r)^{n-1}dr)$ <u>sont les nombres</u>

$$p_o^2 = 0 < j_1^2 < p_1^2 < \ldots < j_k^2 < p_k^2 < \ldots$$

où j_k <u>est le $k^{\text{ième}}$ zéro positif de</u> $\tilde{J}_m \quad k \geq 1$

p_k <u>est le $k^{\text{ième}}$ zéro positif de</u> $\tilde{J}'_m \quad k \geq 1$

<u>Une base orthonormée dans</u> $L^2([0,2],\alpha(r)^{n-1}dr)$ <u>de fonctions propres associées est donnée par</u>

$$U_k(r) = \left.\begin{cases} a_k \tilde{J}_m(p_k r) & 0 \leq r \leq 1 \\ a_k \tilde{J}_m(p_k(2-r)) & 1 \leq r \leq 2 \end{cases}\right\} \text{ \underline{pour} } k \geq 0$$

$$V_k(r) = \left.\begin{cases} b_k \tilde{J}_m(j_k r) & 0 \leq r \leq 1 \\ -b_k \tilde{J}_m(j_k(2-r)) & 1 \leq r \leq 2 \end{cases}\right\} \text{ \underline{pour} } k \geq 1$$

<u>où les constantes de normalisation</u> a_k <u>et</u> b_k <u>sont données par</u>

$$a_k = \left(2\int_0^1 \tilde{J}_m^2(p_k r)\, r^{n-1}dr\right)^{-1} \quad , \ k \geq 0$$

$$b_k = \left(2\int_0^1 \tilde{J}_m^2(j_k r)\, r^{n-1}dr\right)^{-1} \quad , \ k \geq 1$$

La proposition 5.3. permet de donner une expression de la fonction $Z^*(t) = \mathrm{Vol}G^n(1)\ k_{G^n(1)}(t,0_1,0_1)$ qui intervient aux paragraphes 3 et 4 dans la majoration des invariants géométriques.

5.4. <u>Corollaire</u> <u>On peut écrire</u>

$$Z^*(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \exp(-p_k^2 t) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \exp(-j_k^2 t)$$

<u>où</u>

$$\alpha_k = \frac{2}{n} a_k = \frac{1}{2^{n-3} n\Gamma(\frac{n}{2})^2} \frac{j_k^{n-2}}{J_{n/2}^2(j_k)}$$

$$\beta_k = \frac{2}{n} b_k = \frac{1}{2^{n-3} n\Gamma(\frac{n}{2})^2} \frac{p_k^{n-2}}{J_{\frac{n-2}{2}}^2(p_k)}$$

5.5. <u>Remarques</u> 1) L'expression de α_k et β_k provient des propriétés des fonctions de Bessel usuelles J_ν ([A-N] chap.9)

2) Pour le calcul numérique, et en vue d'utiliser les tables existantes, on remarque que j_k est aussi le $k^{\text{ième}}$ zéro positif de $J_{(n-2)/2}$, que $J_{n/2}^2(j_k) = J'^2_{(n-2)/2}(j_k)$, que p_k est aussi le $k^{\text{ième}}$ zéro positif de $J_{n/2}$ et que $J_{(n-2)/2}^2(p_k) = J'^2_{n/2}(p_k)$ ([A-N] chap. 9).

5.6. <u>Proposition</u> <u>Soit</u> (M,g) <u>une variété riemannienne compacte, sans bord, de dimension n telle que</u> $\mathrm{Ricci}\ (M,g) \geq -(n-1)a^2 g$.

$$H(a) = a/\int_0^{a/2} (\mathrm{ch}t)^{n-1}dt \quad \text{et}$$

$$\Gamma(a) = \left[a/\int_0^a \left(\frac{\mathrm{ch}t}{H(a)} + \frac{\mathrm{sh}t}{na}\right)^{n-1}dt\right]^{1/n}$$

Alors, on a

$$b_1(M) \leq 1 + \inf_{t>0} [(n \exp((n-1)a^2t)-1)Z^*(\frac{2^{2/n}}{n^2} \Gamma^2(a)t)]$$

En particulier, si

$n = 2 \quad a^2 \leq 0,3$ alors $b_1(M) \leq 2$

$n = 3 \quad a^2 \leq 0,06$ alors $b_1(M) \leq 3$

$n = 4 \quad a^2 \leq 0,02$ alors $b_1(M) \leq 4$

Preuve. On reprend essentiellement ce qui a été vu au paragraphe 3 et en particulier les théorèmes 3.1. et 3.5., en remarquant cependant que $\mathrm{Spec}(\Delta^\circ)\setminus\{0\} \subset \mathrm{Spec}(\Delta^1)$ (où Δ^p est le Laplacien sur les p-formes) ce qui améliore un peu l'estimée par rapport au théorème 3.5. : voir la remarque 3 qui suit le théorème 3.5.

Les cas particuliers résultent d'un calcul numérique explicite : comme $b_1(M)$ est un entier, on cherche à réaliser

$$\inf_{t>0} [(n \exp((n-1)a^2t)-1)Z^*(\frac{2^{2/n}}{n^2} \Gamma^2(a)t)] < n$$

On a opéré par balayage sur les valeurs de a et sur t. Les remarques 5.5. permettent d'utiliser les tables de [A-N] chap 9 pour le calcul explicite de Z^*, l'asymptotique des fonctions de Bessel et de leurs zéro ([A-N] chap 9) permet de savoir où tronquer les séries.

5.7. Remarques. On observe une nette détérioration des estimées quand la dimension augmente. En "première approximation", on a à résoudre

$$\exp((n-1)a^2t)Z^*(\frac{2^{2/n}}{n^2} \Gamma^2(a)t) < \frac{n+1}{n}$$

La détérioration provient donc à la fois de $\frac{n+1}{n}$ qui tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et du facteur $(n-1)$ dans $\exp((n-1)a^2t)$. C'est en fait surtout cette exponentielle qui détériore les estimées. Elle provient de l'inégalité de Kato (voir théorème 1.4.).

Une méthode de comparaison de solutions d'équations elliptiques, qui résulte mutatis mutandis de la méthode développée au paragraphe 2, permet aussi d'estimer certains invariants géométriques. Pour le cas du premier nombre de Betti $b_1(M)$, elle conduit semble-t-il à de meilleures estimées que celle de la Proposition 5.6. (voir [NG]).

BIBLIOGRAPHIE

[A-N] ABRAMOWITZ, M. et STEGUN, I. Handbook of mathematical functions, Dover 1965

[A-S] ATIYAH, M.F. et SINGER, I.M., The index of elliptic operators, III, Annals of Math. 87 (1968), 546-604

[BA] BANDLE, C., Isoperimetric inequalities and applications, Pitman 1980.

[B-C] BISHOP, R. et CRITTENDEN, R. Geometry of manifolds, Academic Press 1964.

[BE1] BESSE, A.L., Séminaire sur les variétés de dimension 4, Cedic-Nathan 1981.

[BE2] BESSE, A.L., Einstein manifolds, en préparation.

[B-G] BERARD, P. et GALLOT, S., Remarques sur quelques estimées géométriques explicites, C.R. Acad. Sc. 297 (1983), 185.

[B-G-M] BERGER, M. - GAUDUCHON, P. - MAZET, E., Le spectre d'une variété riemannienne, Lect. Notes n° 194 Springer 1970.

[B-M] BERARD, P. et MEYER, D., Inégalités isopérimétriques et applications, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 15 (1982), 513-542.

[BN] BESSON, G., Inégalité de Kato pour certaines submersions riemanniennes, prépublication Institut Fourier 1984.

[B-Y] BOCHNER, S. et YANO, K., Curvature and Betti numbers, Annals of Math. Studies n° 32 Princeton U. Press 1953.

[CH] CHEEGER, J., Finiteness theorems for Riemannian manifolds, Amer. J. Math. 92 (1970), 61-74.

[GA1] GALLOT, S., Estimées de Sobolev quantitatives sur les variétés et applications, C.R. Acad. Sc. 292 (1981), 375.

[GA2] GALLOT, S., A Sobolev inequality and some geometric applications, Actes du Séminaire Franco-Japonais Kyoto 1981, Kaigai Publ., à paraître.

[GA3] GALLOT, S., Inégalités isopérimétriques, courbure de Ricci et invariants géométriques I, C.R. Acad. Sc. 296 (1983), 333.

[GA4] GALLOT, S., Inégalités isopérimétriques, courbure de Ricci et invariants géométriques II, C.R. Acad. Sc. 296 (1983), 365.

[G-L] GROMOV, M. et LAWSON, B., Spin and scalar curvature in the presence of a fundamental group, Ann. of Math. 111 (1980), 209-230 et The classification of simply-connected manifolds of positive scalar curvature, ibid 423-434.

[G-M] GALLOT, S. et MEYER, D., Opérateur de courbure et Laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne, J. Math. Pures et Appliquées 54 (1975), 259-284.

[GR1] GROMOV, M., Structures métriques pour les variétés riemanniennes, rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu, Cédic F. Nathan 1981.

[GR2] GROMOV, M., Curvature, diameter and Betti numbers, Comment. Math. Helv. 56 (1981), 179-195.

[GR3] GROMOV, M., Paul Levy's isoperimetric inequality, prétirage I.H.E.S. 1980.

[H-S-U] HESS, H. - SCHRADER, R. - UHLENBROCK, D.A., Kato's inequality and the spectral distribution of Laplacians on compact Riemannian manifolds, J. Diff. Geom. 15 (1980), 27-38.

[K] KARCHER, H., Pinching implies strong pinching, Comment. Math. Helv. 46 (1971), 124-126.

[LI] LI, P., On the Sobolev constant and the p-spectrum of a compact Riemannian manifold, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 13 (1980), 451-469.

[LI1] LICHNEROWICZ, A., Géométrie des groupes de transformations, Dunod 1958.

[M-M] MAUREY, B. et MEYER, D., Sur un lemme de géométrie hilbertienne, pre tirage U. Paris 7, 1982.

[NG1] GAMARA, N., Thèse de 3° cycle en préparation, Université de Savoie, Chambéry.

[SP] SPIVAK, M., A comprehensive introduction to Differential Geometry, Tome III Publish or Perish Inc.

[TA] TALENTI, G. Elliptic equations and rearrangements, Ann. Scuola Normale Sup. Pisa 3 (1976), 697-718.

P. BERARD et S. GALLOT,
UNIVERSITE DE SAVOIE
BP 1104 - 73011 CHAMBERY cédex