J. Nourrigat

Approximation des systèmes d'opérateurs pseudodifférentiels

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1983-1984), exp. n° 11, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1983-1984____A11_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 3 - 1 9 8 4

APPROXIMATION DES SYSTEMES D'OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS

par J. NOURRIGAT
(Université de Rennes)

Exposé n°XI

13 Décembre 1983

§ 1. INTRODUCTION.

Depuis les travaux de Grushin [8], on sait que, dans certains cas, l'hypoellipticité d'un opérateur différentiel dans $\mathbb{R}^n$ (ou, plus précisément, une inégalité L^2 entraînant l'hypoellipticité), est équivalente à l'injectivité de certains opérateurs définis globalement dans $R^k (k \leq n)$. Comme l'a remarqué C. Rockland [24], on peut interpréter ces opérateurs à l'aide de certaines représentations d'un groupe de Lie nilpotent.

Les résultats de Grushin concernent notamment des opérateurs qui s'expriment de manière polynômiale par rapport aux champs de vecteurs $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ et $X_j = x_1^k \frac{\partial}{\partial x_j}$ $(2 \leq j \leq n)$, où $k \geq 1$, (voir aussi Bolley-Camus-Helffer [2]). Le cas d'opérateurs qui s'expriment de manière polynômiale par rapport à des champs de vecteurs vérifiant certaines hypothèses de rang constant a été traité dans Folland - Stein [7] , Rothschild - Stein [25] et Rothschild [26]. Dans ces travaux, on définit en chaque point x une loi de composition qui fait de R^n un groupe nilpotent G_x , on associe à P un opérateur P_x , homogène, invariant à gauche, sur G_x , et l'on montre que l'hypoellipticité, (jointe à certaines inégalités) de P au voisinage de x équivaut à l'hypoellipticité de P_x . Un phénomène analogue se produit en théorie spectrale (voir Métivier [21]). L'hypoellipticité de l'opérateur homogène P_x est elle-même équivalente à l'injectivité de ses images par les représentations unitaires irréductibles non triviales du groupe G_x (voir Helffer - Nourrigat [9]). On trouvera des constructions de paramétrixes dans Miller [22], Melin [18],[19],[20] Beals - Greiner [1] et Taylor [27] .

D'autre part, dans les travaux de Hörmander [13],[14],[15], Egorov [5] et Boutet de Monvel - Grigis - Helffer [4], où des inégalités sous-elliptiques concernant un opérateur pseudodifférentiel P sont caractérisées par des conditions géométriques, les phénomènes mentionnés ci-dessus apparaissent encore dans la démonstration : l'étape la plus difficile de celle ci consiste à prouver l'équivalence entre l'inégalité concernant l'opérateur P et des inégalités analogues (ou des propriété d'injectivité) pour certains opérateurs définis globalement dans $R^k (k \leq n)$.

Dans une note en collaboration avec B. Helffer [10] est énoncée une conjecture qui, si elle était démontrée, fournirait la synthèse de la plupart des résultats mentionnés ci-dessus. Plus précisément, cette conjecture établirait dans un cadre général le lien entre une inégalité L^2 entraînant l'hypoellipticité, et l'injectivité de certains opérateurs, définis en termes de représentations de groupes nilpotents.

L'une des implications conjecturées dans [10] est maintenant démontrée (théorème 4 ci-dessous). Dans le cas particulier d'opérateurs exprimés comme polynômes de champs de vecteurs, le résultat analogue avait été annoncé dans [23] et démontré dans [11].

§ 2 . SYSTEMES D'OPERATEURS A SYMBOLES PRINCIPAUX REELS.

On considère dans toute la suite un système $X_1,\dots,X_q$ d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre m dans un ouvert Ω de $R^n (q \geq 1,\ m \in R,\ n \geq 1)$ dont les symboles principaux sont réels. On désigne par $\|\ \|$ la norme de $L^2(R^n)$ ou de $L^2(R^k)$ et par $\|\ \|_s$ celle de $H^s(R^n)$.

<u>Théorème</u> 1. Soient $x_o \in \Omega$ et $\sigma \in [0,1[$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Il existe un voisinage V de x_o et une constante $C > 0$ tels que

$$(1)\qquad \|u\|^2_{m-\sigma} \leq c\Big(\sum_{j=1}^{q} \|X_j u\|^2 + \|u\|^2_{m-1}\Big) \qquad \forall u \in C_o^\infty(V)$$

2) Pour tout $\xi_o \in R^n \setminus \{0\}$, il existe un crochet de Poisson itéré, de longueur $\leq (1-\sigma)^{-1}$, des symboles principaux des opérateurs X_j , qui est non nul en (x_o,ξ_o).

L'implication 2) $\Rightarrow$ 1) a été démontrée par Rothschild-Stein [25] lorsque les X_j sont des champs de vecteurs, (la condition 2) étant alors équivalente à la condition classique de Hörmander [12]). L'implication 2) $\Rightarrow$ 1) a été étendue au cas pseudodifférentiel par Fefferman - Phong [6] et Bolley - Camus - Nourrigat [3]. L'implication 1) $\Rightarrow$ 2) a été démontrée par B. Helffer dans [11] pour des champs de vecteurs. La preuve de cette implication est un exemple du phénomène mentionné dans l'introduction. En supposant que la condition 2) du théorème n'est pas vérifiée, on montre que l'inégalité (1) implique une inégalité de la forme suivante

$$(2)\qquad \|\psi\|^2 \leq c \sum_{j=1}^{q} \|X'_j \psi\|^2 \qquad \forall \psi \in \mathcal{S}(R^n)$$

où chacun des opérateurs X'_j est de la forme suivante :

$$X_j^1 = A_{j1}\frac{\partial}{\partial y_1} + A_{j2}(y_1)\frac{\partial}{\partial y_2} + \dots + A_{jn}(y_1,\dots,y_{n-1})\frac{\partial}{\partial y_n}$$

où les A_{jk} sont des polynômes réels. L'inégalité (2) est évidemment absurde, et l'implication 1) $\Rightarrow$ 2) s'en déduit. L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) est un cas particulier du théorème 4 ci-dessous.

§ 3 . SYSTEMES D'OPERATEURS A SYMBOLES PRINCIPAUX COMPLEXES.

Le point commun à la plupart des travaux mentionnés dans l'introduction est qu'ils traitent d'opérateurs exprimés de manière "polynomiale" par rapport à un système d'opérateurs $X_1,\dots,X_q$ vérifiant les conditions du théorème 1, (les coefficients pouvant être eux-mêmes des opérateurs pseudodifférentiels). Pour plus de simplicité, nous supposerons que $q = 2p$, et nous nous limiterons à l'étude du système surdéterminé $(L_1,\dots L_p)$ suivant :

$$L_j = X_j + i\,X_{p+j} \qquad (j = 1,\dots p) \tag{3}$$

Etant donné un point x_o de Ω , on se demande à quelle condition il existe un voisinage V de x_o et une constante $C_o > 0$ tels que

$$\sum_{j=1}^{2p} \|X_j u\|^2 \le C_o \left(\sum_{j=1}^{p} \|L_j u\|^2 + \|u\|^2_{m-1} \right) \qquad \forall u \in C_o^\infty(V) \tag{4}$$

Les inégalités (1) et (4) entraînent classiquement l'hypoellipticité du système $(L_1,\dots L_p)$ avec perte de σ dérivées, dans un voisinage de x_o .

L'inégalité (4) est caractérisée dans les différents cas décrits dans l'introduction, et en particulier si les conditions du théorème 1 sont vérifiées avec $\sigma \le \frac{1}{2}$ (dans Hörmander [13]) ou bien si $p = 1$ et si les conditions du théorème 1 sont vérifiées avec $\sigma < 1$ quelconque (dans Egorov [5] et Hörmander [15]).

Examinons plus en détail le premier de ces cas. Tout d'abord, l'inégalité (4) entraîne classiquement :

$$\sum_{j=1}^{2p} X_j(x,\xi)^2 \le C_o \sum_{j=1}^{p} |L_j(x,\xi)|^2 \qquad \forall (x,\xi) \in V \times R^n . \tag{5}$$

(On conviendra dans toute la suite de noter $X_j(x,\xi)$ le symbole principal de X_j) .

D'autre part, en tout point $\xi_o \in R^n$ tel que $(x_o,\xi_o) \in \Sigma$, (la variété caractéristique du système), définissons des opérateurs $X'_j (j \leq 2p)$ par

$$(6) \qquad X'_j(y,D_y) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial X_j}{\partial \xi_k}(x_o,\xi_o)\, D_{y_k} + \frac{\partial X_j}{\partial x_k}(x_o,\xi_o) y_k\right)$$

On pose $L'_j = X'_j + i\, X'_{p+j} (j \leq p)$. On montre facilement que l'inégalité (4) entraîne

$$(7) \qquad \sum_{j=1}^{2p} \|X'_j \psi\|^2 \leq C_o \sum_{j=1}^{p} \|L'_j \psi\|^2 \qquad \forall \psi \in C_o^\infty(R^n)$$

Pour le voir, posons $(x_\nu,\xi_\nu) = (x_o, \nu\, \xi_o)$ $(\nu \geq 1)$, et définissons une application symplectique θ_ν dans R^{2n} par

$$(8) \qquad \theta_\nu(y,\eta) = (x_\nu + \frac{y}{|\xi_\nu|^{1/2}}\,,\ \xi_\nu + \eta\, |\xi_\nu|^{1/2}\,)$$

L'opérateur unitaire T_ν correspondant dans $L^2(R^n)$ est défini par :

$$(9) \qquad T_\nu \psi(y) = |\xi_\nu|^{n/4}\, e^{iy.\xi_\nu}\, \psi((y-x_\nu)|\xi_\nu|^{1/2}\,) \qquad \forall \psi \in L^2(R^n)$$

On pose $t_\nu = |\xi_\nu|^{\frac{1}{2}-m}$. On voit facilement que, quand $\nu \longrightarrow +\infty$:

$$(10) \qquad t_\nu\, X_j \circ \theta_\nu(y,\eta) \longrightarrow X'_j(y,\eta) \qquad \forall (y,\eta) \in R^{2n}$$

$$(11) \qquad t_\nu \|X_j\, T_\nu\, \psi\| \longrightarrow \|X'_j \psi\| \quad \text{et} \quad t_\nu \|L_j\, T_\nu\, \psi\| \longrightarrow \|L'_j\, \psi\| \qquad \forall \psi \in C_o^\infty(R^n)$$

$$(12) \qquad \|T_\nu \psi\|_s \sim |\xi_\nu|^s\, \|\psi\|_o \qquad \forall \psi \in \mathcal{C}_o^\infty(R^n) \qquad \forall s \in R\ .$$

L'inégalité (7) se déduit facilement de (4) et de ces remarques.

Si les conditions du théorème 1 sont vérifiées avec $\sigma = \frac{1}{2}$, si l'inégalité (5) est vérifiée dans $V \times R^n$, et si (7) est vérifiée pour tout $\xi_o \in R^n$ tel que $(x_o,\xi_o) \in \Sigma$ (avec la même constante $C_o > 0$ partout), on montre dans [13] que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_ε de x_o et une constante $C_\varepsilon > 0$ tels que l'on ait

$$(13) \qquad \sum_{j=1}^{2p} \|X_j u\|^2 \leq (C_o+\varepsilon) \sum_{j=1}^{p} \|L_j u\|^2 + C_\varepsilon\, \|u\|^2_{m-1} \qquad \forall u \in C_o^\infty(V_\varepsilon)$$

Si les conditions du théorème 1 ne sont plus vérifiées avec $\sigma = \frac{1}{2}$, les conditions (5) et (7) ci-dessus sont encore nécessaires. Nous allons définir d'autres inégalités qui sont alors impliquées par (4). On peut conjecturer que, si les conditions du théorème 1 sont vérifiées avec $\sigma < 1$, ces conditions sont équivalentes à l'inégalité (4).

§ 4 . RAPPELS SUR LES REPRESENTATIONS DE GROUPES NILPOTENTS.

Nous allons rappeler la méthode, dûe à Kirillov [17], qui, à toute forme linéaire ℓ sur une algèbre de Lie nilpotente $\mathcal{G}$, permet d'associer une représentation unitaire irréductible π_ℓ du groupe exp $\mathcal{G}$. Plus précisément, c'est la représentation de $\mathcal{G}$ qui est la différentielle de la précédente que nous allons décrire explicitement.

Désignons par $2k(\ell)$ le rang de la forme bilinéaire antisymétrique $X,Y \longrightarrow \ell([X,Y])$ sur $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$. Si $k(\ell) = 0$, on définit une représentation scalaire π_ℓ de $\mathcal{G}$ en posant $\pi_\ell(X) = i\ell(X)$ pour tout $X \in \mathcal{G}$. Dans les autres cas, on utilise le théorème suivant :

Théorème 2. (Kirillov [17]). Pour tout $\ell \in \mathcal{G}^*$ telle que $k(\ell) \neq 0$, il existe une représentation π_ℓ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{S}(R^{k(\ell)})$ qui possède les propriétés suivantes :

1) Pour tout $X \in \mathcal{G}$, l'opérateur $\pi_\ell(X)$ est de la forme suivante, (où l'on écrit k au lieu de $k(\ell)$) :

$$(14) \quad \pi_\ell(X) = A_1(X) \frac{\partial}{\partial y_1} + A_2(y_1,X) \frac{\partial}{\partial y_2} + \dots + A_k(y_1,\dots y_{k-1},X) \frac{\partial}{\partial y_k} + i\, B(y,X)$$

où les $A_j(.,X)$ et $B(.,X)$ sont des polynômes à coefficients réels, dépendant linéairement de $X \in \mathcal{G}$.

2) Si on désigne par $\pi_\ell(X)(y,\eta)$ le symbole complet de l'opérateur $\pi_\ell(X)$, alors l'application $X \longrightarrow d_{(y,\eta)}\, \pi_\ell(X)(0,0)$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{S}(R^{2k})$ est surjective.

3) On a $\pi_\ell(X)(0,0) = i\ell(X)$ pour tout $X \in \mathcal{G}$.

De plus, si deux représentations possèdent ces propriétés, pour une même forme linéaire ℓ , elles sont unitairement équivalentes, et la transformation qui réalise l'équivalence est un isomorphisme de $\mathcal{S}(R^k)$. Pour tout $\ell \in \mathcal{G}^*$, π_ℓ est la différentielle d'une représentation unitaire irréductible du groupe exp $\mathcal{G}$ dans $L^2(R^{k(\ell)})$. Réciproquement, si π est une représentation unitaire irréductible du groupe exp $\mathcal{G}$ sa différentielle est scolaire, ou bien de la forme ci-dessus (à une équivalence près).

On utilisera une classe plus générale de représentations, les représentations induites, dans lesquelles la condition 2) est remplacée par la condition suivante, plus générale :

2') Les formes linéaires $X \longrightarrow A_j(0,X)$ sont linéairement indépendantes.

Pour tout entier $r \geq 1$, on désignera par $\mathcal{G}_r$ l'algèbre de Lie nilpotente libre à 2p générateurs notés $\tilde{X}_1, \ldots \tilde{X}_{2p}$, de rang de nilpotence r. On posera $\tilde{L}_j = \tilde{X}_j + i\tilde{X}_{p+j}$ $(j = 1, \ldots p)$. Si $I = (i_1, \ldots i_q)$ est une suite d'entiers compris entre 1 et 2p, on définit un élément X_I de $\mathcal{G}$ en posant

$$\tilde{X}_I = (\mathrm{ad}\ \tilde{X}_{i_1}) \ldots (\mathrm{ad}\ \tilde{X}_{i_{q-1}})\ \tilde{X}_{i_q} \quad \text{et } |I| = q$$

§ 5 . EXPLICATIONS HEURISTIQUES.

Nous allons indiquer la méthode utilisée pour obtenir des inégalités, analogues à (5) et (7), qui sont impliquées par (4). Soit $r \geq 1$. A toute suite (x_ν, ξ_ν) dans R^{2n}, telle que $x_\nu \longrightarrow x_0$ et $|\xi_\nu| \to +\infty$, nous allons faire correspondre une suite (T_ν) d'opérateurs dans $\mathcal{J}(R^n)$, uniformément bornée dans $L^2(R^n)$, généralisant (9), une suite (θ_ν) d'applications symplectiques, généralisant (10), et une suite (t_ν) de réels > 0 telles que des propriétés analogues à (10), (11),(12) soient vérifiées, avec les différences suivantes :

a) Les opérateurs X'_j qui apparaissent dans (12) sont maintenant des opérateurs qui n'agissent que sur les variables $y_1, \ldots y_k$, où k est entier $\leq n$, dépendant de la suite considérée. Si on considère les X'_j comme des opérateurs dans $\mathcal{J}(R^k)$, on peut écrire $X'_j = \frac{1}{i}\,\pi(\tilde{X}_j)$, où $\tilde{\pi}$ est une représentation induite de $\mathcal{G}_r$ dans $\mathcal{J}(R^k)$.

b) Les limites dans (11) et (12) ne concernent qu'une suite extraite de la suite (x_ν, ξ_ν).

c) L'application symplectique θ_ν n'est pas définie globalement dans R^{2k}, mais dans un voisinage V_ν de l'origine, et l'on a $\theta_\nu(0,0) = (x_\nu, \xi_\nu)$.

Quand $\nu \longrightarrow \infty$, les V_ν forment une suite exhaustive de compacts, et la limite (10) est prise au sens de la topologie de $C^\infty(R^{2n})$.

d) L'opérateur T_ν n'est plus unitaire.

L'inégalité (7) se déduit alors facilement. Autrement dit, si l'on considère les $X_j' = \pi(\tilde{X}_j)$ comme des opérateurs dans $\mathcal{S}(R^k)$, on a

$$(15) \qquad \sum_{j=1}^{2p} \|\pi(\tilde{X}_j)\psi\|^2 \leq C_o \sum_{j=1}^{p} \|\pi(\tilde{L}_j)\psi\|^2 \qquad \forall\psi \in \mathcal{S}(R^k) .$$

On associe à la représentation induite π une forme linéaire $\ell \in \mathcal{G}_r^*$ en posant $\ell(X) = i^{-1}\pi(X)(0,0)$. Si π_ℓ est la représentation irréductible correspondante, l'inégalité (15) entraîne classiquement :

$$(16) \qquad \sum_{j=1}^{2p} \|\pi_\ell(\tilde{X}_j)\psi\|^2 \leq C_o \sum_{j=1}^{p} \|\pi_\ell(\tilde{L}_j)\psi\|^2 \qquad \forall\psi \in \mathcal{S}(R^{k(\ell)})$$

Indiquons maintenant le lien qui existe entre la forme linéaire ℓ et les symboles principaux des X_j . Si $I = (i_1,\ldots i_q)$ est une suite d'entiers compris entre 1 et 2p , on désigne par $X_I(x,\xi)$ le crochet de Poisson itéré correspondant des symboles principaux :

$$X_I = (\mathrm{ad}\, X_{i_1})\ldots(\mathrm{ad}\, X_{i_{q-1}})\, X_{i_q}$$

C'est donc une fonction sur $\Omega \times R^n\setminus\{0\}$, homogène de degré $|I|(m-1)+1$. On déduit facilement de (10) et de la propriété c) ci-dessus que, quand $\nu \longrightarrow \infty$:

$$(17) \qquad t_\nu^{|I|}\, X_I(x_\nu,\xi_\nu) \longrightarrow \frac{1}{I}\,\pi(\tilde{X}_I)(0,0) = \ell(\tilde{X}_I)$$

(Plus exactement, il faut remplacer la suite (x_ν,ξ_ν) par une suite extraite). Cette relation nous montre comment associer la suite (t_ν) à la suite donnée (x_ν,ξ_ν). Si la condition 2 du théorème 1 est vérifiée avec $\sigma = 1-\frac{1}{r}$, on voit que (17) entraîne que la suite $t_\nu|\xi_\nu|^{m-1+\frac{1}{r}}$ est bornée. Dans les autres cas, on est amené à choisir t_ν tel que cette condition soit encore satisfaite. Il suffit de poser, par exemple :

$$(18) \qquad t_\nu = \left[\sum_{|I|\leq r} |X_I(x_\nu,\xi_\nu|^{\frac{1}{|I|}} + |\xi_\nu|^{m-1+\frac{1}{r}}\right]^{-1}$$

En résumé, nous avons décrit un ensemble de formes linéaires sur $\mathcal{G}_r$ telles que l'inégalité (4) entraîne (16) pour tout ℓ dans cet ensemble.

§ 6. ENONCE DU RESULTAT.

Définition 3. Pour tout $r \geq 1$, soit $\Gamma^r_{x_o}$ l'ensemble des formes linéaires $\ell \in \mathcal{G}_r^*$ telles qu'il existe une suite (x_ν, ξ_ν) dans R^{2n} et une suite (t_ν) dans R^+ telles que, quand $\nu \to \infty$

(19) $$x_\nu \longrightarrow x_o \qquad |\xi_\nu| \longrightarrow \infty$$

(20) $$t_\nu^{|I|} \; X_I(x_\nu, \xi_\nu) \longrightarrow \ell(\tilde{X}_I) \quad \text{si } |I| \leq r$$

(21) $$\text{La suite } t_\nu |\xi_\nu|^{m-1+\frac{1}{r}} \text{ est bornée.}$$

Cet ensemble n'est pas vide, ni réduit à $\{0\}$. (On le voit en choisissant t_ν défini par (18)). C'est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{G}_r^*$, stable par les dilatations naturelles δ_t^* (définies par $(\delta_t^*\ell)(\tilde{X}_J) = t^{|I|}\ell(\tilde{X}_I)$ si $\ell \in \mathcal{G}_r^*$, $t > 0$ et $|I| \leq r$). On montre que $\Gamma^r_{x_o}$ est stable par l'action du groupe $\exp \mathcal{G}_r$ dans $\mathcal{G}_r^*$ (représentation coadjointe). L'idée d'attacher à un opérateur pseudodifférentiel un ensemble d'opérateurs dont les coefficients sont les limites de certaines suites est dûe, dans un contexte différent, à Hörmander [14]. Le résultat principal, conjecturé dans [10], est le suivant :

Théorème 4. Soient $X_1, \ldots X_{2p}$ un système d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre m , à symboles principaux réels. Soit $r \geq 1$, et soit $x_o \in \Omega$. Alors chacune des propriétés ci-dessous implique la suivante :

A) Il existe un voisinage V de x_o et une constante $C_o > 0$ tels que l'inégalité (4) soit vérifiée pour tout $u \in C_o^\infty(V)$

B) Pour tout $\ell \in \Gamma^r_{x_o}$ et pour tout $\psi \in \mathcal{S}(R^{k(\ell)})$, l'inégalité (16) est vérifiée.

C) Pour tout $\ell \in \Gamma^r_{x_o} \setminus \{0\}$, on a l'implication suivante :

(22) $$\left.\begin{array}{l} \psi \in \mathcal{S}(R^{k(\ell)}) \\ \pi_\ell(\tilde{L}_j)\psi = 0 \quad j = 1, \ldots p \end{array}\right\} \Longrightarrow \psi = 0$$

On peut conjecturer que, pour tout entier $r \geq 1$ les conditions B) et C) sont équivalentes. (C'est démontré dans [11] si $r \leq 3$). On peut aussi conjecturer que, si les conditions B) ou C) sont vérifiées pour un entier r , et si les conditions du théorème 1 sont vérifiées avec $\sigma = 1 - \frac{1}{r}$, alors la condition **A** est vérifiée. Cette conjecture est démontrée dans les cas mentionnés dans l'introduction, et aussi lorsque $(L_1, \ldots L_p)$ est le système de Cauchy-Riemann induit sur une hypersurface de C^n (dans le livre [11] en collaboration avec B. Helffer, où un résultat analogue pour le $\Box_b$ est aussi démontré).

§ 7. OPERATEURS SOUS-ELLIPTIQUES.

Les conditions B ou C du théorème 4 peuvent sembler peu explicites. Cependant on peut les expliciter lorsque $r \leq 2$ (Hörmander [13], [16], lorsque $(L_1, \ldots L_p)$ est le système de Cauchy-Riemann induit sur une hypersurface de C^n , (voir [11]), et lorsque $p = 1$. Dans ce dernier cas, nous allons montrer comment ces conditions sont liées à la condition de sous-ellipticité de Egorov [5] et Hörmander [15].

On considère un entier $r \geq 1$ tel que les conditions du théorème 1 soient vérifiées avec $\sigma = 1 - \frac{1}{r}$. On a vu que cette condition est nécessaire pour le sous-ellipticité de l'opérateur $L = X_1 + i X_2$.

On désigne toujours par la même lettre opérateurs et symboles principaux. Pour tout $(x,\xi) \in \Omega \times R^n \setminus \{0\}$, pour tout $z \in C$ tel que la différentielle de $Re(z L)$ soit non nulle en (x,ξ), désignons par $t \longrightarrow \Phi_z(t,x,\xi)$ la bicaractéristique de $Re(zL)$ qui passe par (x,ξ). Soit Σ l'ensemble caractéristique de L .

Proposition 5. Avec les notations ci-dessus, la condition B) du théorème 4 entraîne la suivante

(Ψ) Pour tout $\xi_o \in R^n \setminus \{0\}$ tel que $(x_o,\xi_o) \in \Sigma$, pour tout $z \in C$ tel que la différentielle de $Re(zL)$ soit non nulle en (x_o,ξ_o), il existe un voisinage V de (x_o,ξ_o) tel que, pour tout $(x,\xi) \in V \cap \Sigma$, la fonction $t \longrightarrow (Im zL)(\Phi_z(t,x,\xi))$ ne passe pas du signe + au signe - à l'origine quand t croit.

Cette condition (Ψ) entraîne elle-même la condition C) du théorème 4.

Nous allons seulement esquisser la preuve de l'implication (Ψ) $\Rightarrow$ C). Soit $\ell \in \Gamma^r_{x_o} \setminus \{0\}$. Soient (x_ν,ξ_ν) et (t_ν) des suites vérifiant (19),(20), (21). Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que

(23) $$\frac{\xi_\nu}{|\xi_\nu|} \longrightarrow \frac{\xi_o}{|\xi_o|}$$

où $\xi_o \in R^n \setminus \{0\}$. Le cas le plus difficile est celui où $(x_o, \xi_o) \in \Sigma$. Pour simplifier l'écriture, nous supposerons que la condition (Ψ) est vérifiée en (x_o, ξ_o), avec $z = 1$. Il existe des applications symplectiques θ_ν, comme dans le point C) du §5, et une représentation induite π de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{S}(R^k)$ (où $k \leq n$) telles que

(24) $$t_\nu X_j \circ (\theta_\nu(y,\eta)) \longrightarrow \frac{1}{i} \pi(X_j)\ (y,\eta) \quad (j = 1,2)$$

dans le sens précisé au point C) du §5. La différentielle de X_1 est non nulle en (x_o, ξ_o), et la construction des θ_ν (que nous n'avons pas esquissée) montre que le coefficient $A_1(\check{X}_1)$ dans (14) est non nul. Quitte à faire une nouvelle transformation, on peut supposer que

(25) $$\pi(\check{X}_1) = \frac{\partial}{\partial y_1}$$

$$\pi(\check{X}_2) = A_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + A_2(y_1) \frac{\partial}{\partial y_2} + \ldots + A_k(y_1, \ldots y_{k-1}) \frac{\partial}{\partial y_k} + iB(y)$$

La condition (Ψ) et le point (24) montrent que l'opérateur $\pi(\tilde{L})$ vérifie l'analogue global de la condition (Ψ) : Pour tout $(y_2, \ldots y_k, \eta_2, \ldots \eta_k)$, la fonction

(26) $$y_1 \longrightarrow \sum_2^k A_j(y, \eta_j) + B(y)$$

ne passe pas du signe + au signe − quand y_1 croît. On en déduit facilement que, si $j \geq 3$, $A_2 \frac{\partial A_j}{\partial y_1} - A_j \frac{\partial A_2}{\partial y_1} \equiv 0$. Par conséquent, il existe un polynôme $\Phi_j(y_2, \ldots y_{j-1})$ tel que $A_j(y) = A_2(y_1)\ \Phi_j(y)$. Si $k \geq 3$, c'est en contradiction avec le point 2') de la définition d'une représentation induite. Par conséquent $k(\ell) \leq k \leq 2$. On montre ensuite que, si la fonction (26) satisfait la condition ci-dessus, alors l'opérateur $\pi_\ell(L)$ est injectif dans $\mathcal{S}(R^{k(\ell)})$. Examinons le cas le plus difficile où $k(\ell) = k = \ell$ (et $\pi = \pi_\ell$). On peut écrire

(27) $$\pi_\ell(\tilde{L}) = \frac{\partial}{\partial y_1} + i\, [A_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + A_2(y_1) \frac{\partial}{\partial y_2} + iB(y_1, y_2)]$$

La condition de signe sur la fonction (26) signifie que A_2 est d'un signe constant, que $B = A_2 H$, où H est une fonction C^∞ sur R^2, et que $\frac{\partial H}{\partial y_1}$ est du même signe que A_2. Par une transformation qui conserve ces conditions, on se ramène au cas où $A_1 = 0$. Soit alors $\psi \in \mathcal{S}(R^2)$ tel que $\pi_\ell(\check{L})\psi = 0$ et $\psi \not\equiv 0$. En utilisant les conditions ci-dessus sur les coefficients A_2 et B, on voit que l'ensemble

$$M = \{ a \subset R^2 \quad |\psi(a)| = \sup_{y \in R^2} |\psi(y)| \}$$

est ouvert. (Par un changement de variable, on se ramène à l'opérateur de Cauchy-Riemann, et comme dans Trépreau [28], on applique le principe du maximum à une fonction singulière). Il y a évidemment contradiction, ce qui prouve l'injectivité de $\pi_\ell(\check{L})$.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] BEALS - GREINER : Pseudodifferential operators associated to hyperplane bundles. Preprint 1983.

[2] BOLLEY-CAMUS-HELFFER : Remarques sur l'hypoellipticité. C.R. Ac. Sc. 283 (1976), 979-982.

[3] BOLLEY-CAMUS-NOURRIGAT : La condition de Hörmander-Kohn pour les opérateurs pseudodifférentiels. Comm. in P.D.E. 7 (2) (1982), 197-221.

[4] BOUTET DE MONVEL-GRIGIS-HELFFER : Paramétrixes d'opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples. Astérisque 34-35 (1976).

[5] EGOROV : Subelliptic operators. Russian Math. Survey 30 (2)(1975) 59-118 et 30 (3) (1975) 55-105.

[6] FEFFERMAN-PHONG : The uncertainty principle and sharp Gårding inequality. C.P.A.M. 34 (3) (1981) 285-331 .

[7] FOLLAND-STEIN : Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group. C.P.A.M. 27 (1974) 429-522.

[8] GRUSHIN : On a class of hypoelliptic operators. Math. Sbornik 83 (125) (1970) 456-473.

[9] HELFFER-NOURRIGAT : Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes invariants à gauche sur un groupe de Lie nilpotent gradué. Comm. in P.D.E. 3(8) (1978) 643-743 et 4(8) (1979) 899-958.

[10] HELFFER-NOURRIGAT : Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs. C.R. Ac. Sc. 289 (1979) 775-778.

[11] HELFFER-NOURRIGAT : Livre en préparation.

[12] HÖRMANDER : Hypoelliptic second order differential equations Acta. Math. 119 (1967) 147-171.

[13] HÖRMANDER : Pseudodifferential operators and non elliptic boundary value problems. Ann. of Math. 83 (1966) 129-269.

[14] HÖRMANDER : Hypoelliptic operators with double characteristics. Math. Annalen 217 (2) (1975) 165-188.

[15] HÖRMANDER : Subelliptic operators, dans : Seminar on singularities of solutions of linear partial differential equations. Ann. of Math. Studies 91, Princeton, 1978.

[16] HÖRMANDER : Subelliptic test estimates. (PAM 33(3) (1980) 339-363.

[17] KIRILLOV : Unitary representations of nilpotent Lie groups Russian Math. Survey 17 (1962) 53-104.

[18] MELIN : Parametrix constructions for some classes of right invariant differential operators on the Heisenberg group. Comm. in P.D.E. 6 (12) (1981) 1363-1405.

[19] MELIN : Parametrix constructions for right invariant differential operators on nilpotent groups. Preprint,1981. A paraître dans : Annals of global analysis and geometry.

[20] MELIN : Lie Filtrations and pseudodifferential operators. Preprint 1982

[21] METIVIER : Fonction spectrale et valeurs propres d'une classe d'opérateurs non elliptiques. Comm. in P.D.E. 1 (1976) 467-519.

[22] MILLER : Parametrixes for hypoelliptic operators on step two nilpotent Lie groups. Comm. in P.D.E. 5 (11) (1980) 1153-1184.

[23] NOURRIGAT : Hypoellipticité maximale pour le système de Cauchy-Riemann induit. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1981-82, exposé X.

[24] ROCKLAND : Hypoellipticity on the Heisenberg group, representation theoretic criteria, Trans. A.M.S. 240 (1978), 1-52.

[25] ROTHSCHILD-STEIN : Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. Acta Math. 137 (1976) 247-320.

[26] ROTHSCHILD : A criterion for hypoellipticity of operators constructed from vector fields. Comm. in P.D.E. 4 (6) (1979), 546-699.

[27] TAYLOR : Non commutative microlocal analysis (I) Preprint 1983

[28] TREPREAU : Sur l'hypoellipticité analytique microlocale des opérateurs de type principal. Preprint.

*
* *
*