Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. M. Bony

Interaction des singularités pour les équations de Klein-Gordon non linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1983-1984), exp. nº 10, p. 1-27

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1983-1984____A10_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1983-1984

INTERACTION DES SINGULARITES POUR LES EQUATIONS DE KLEIN-GORDON NON LINEAIRES

par J. M. BONY

Exposé n° X

17 janvier 1984

§ 0. INTRODUCTION

0.1 Description des résultats : Nous nous intéressons à l'équation suivante, en dimension 3 d'espace-temps :

$$\square u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(t,x,y,u) \quad ,$$

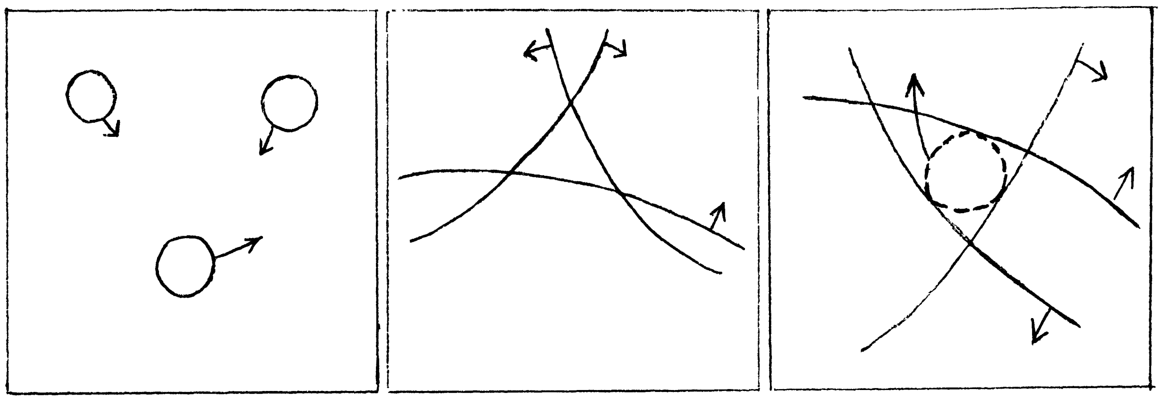
et à la propagation des singularités pour une solution u dont on suppose déjà comme une régularité minimale ($u \in H^s$, $s > 3/2$). Nous supposons connues les singularités de u pour $t < 0$ [ou bien les singularités des traces de u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ en $t = 0$], et cherchons à déterminer la régularité de u pour $t > 0$.

Si on ne s'intéresse qu'à une régularité limitée [appartenance à $H^{s'}$ pour $s' \leqslant 2s - n/2$] , le phénomène est complètement élucidé pour les équations hyperboliques non linéaires les plus générales [2].

Pour aller plus loin, nous nous limiterons à l'étude de solutions n'ayant dans le passé que des singularités portées par un nombre fini d'hypersurfaces Σ_j : u appartient à H^s près des Σ_j, à H^{s+k} en dehors, et une hypothèse supplémentaire (u est une distribution conormale, n° 1.1) décrit ce qui se passe lorqu'on s'approche de Σ_j.

Le cas de l'interaction de 2 singularités est déjà connu (voir [3]). Les singularités se croisent comme dans le cas linéaire et aucun phénomène nouveau n'apparaît (pour une équation semi-linéaire hyperbolique d'ordre > 2, de nouvelles singularités apparaissent [4] ,[5]).

Nous allons étudier ici le cas générique de l'interaction de 3 ondes. La situation peut être décrite par le film suivant, où on a dessiné les courbes à t constant, portant les singularités de u.



t_1 t_2 t_3

Entre l'instant t_1 et l'instant t_2, les singularités n'interagissent que 2 à 2, et rien de géométriquement visible n'apparaît. Entre t_2 et t_3, au moment où les trois singularités se sont croisées, il est né une singularité de u, se propageant en ondes circulaires. La nouvelle singularité de u est moins forte que les singularités incidentes.

Il existe d'excellentes raisons heuristiques (voir [5])permettant de penser que la non-apparition de la nouvelle singularité est un phénomène rarissime. D'autre part Rauch et Reed [9] ont donné un exemple explicite où la nouvelle singularité apparaît. (Voir aussi [7] pour une situation voisine). Nous démontrons ici que, dans tous les cas, u est régulière en dehors des courbes dessinées ci-dessus : théorème A (n° 1.4) et A' (n° 1.7).

0.2 Les méthodes : Nous introduisons d'abord un nouveau calcul symbolique (les opérateurs 2-micro-différentiels, dont les symboles sont singuliers à l'origine) tout à fait analogue à celui développé par Y. Laurent [8] dans le cadre analytique (§§ 2, 3, 4).

On peut alors introduire les opérateurs 2-micro-différentiels Z dont le symbole est celui d'un champ de vecteurs singulier à l'origine, tangent aux 3 surfaces (dans l'espace-temps) portent les singularités initiales, et au cône d'onde Γ . Nous montrerons que les solutions u vérifient des conditions du genre $Z_i u \in H^s$, $Z_i Z_j u \in H^s$... .

Un premier point est de montrer que les espaces de fonctions vérifiant ce type de conditions sont des algèbres. Cela résulte d'une "formule de Leibniz" pour de tels Z (§ 5).

Un second point est de prouver que les fonctions vectorielles $U_1 = (Z_i u)$, $U_2 = (Z_i Z_j u)$.. vérifient des équations $\square U + RU = F$ où R est de bi-ordre inférieur (ordre (2, -1)) (§ 6).

Un troisième point est de montrer l'existence d'opérateurs inversibles E et E' tels que $E(\square + R) = \square E'$. Cela est fait au § 9, en utilisant une 3ème microlocalisation sur Γ , développée au § 7.

Il reste enfin à démontrer un théorème de propagation des singularités (Théorème B, § 8) pour $\square$ puis pour $\square + R$ dans les espaces 2 et 3-microlocaux introduits.

0.3 Extensions : Le lecteur se convaincra que les résultats précédents s'étendent sans difficulté au cas où $\square$ est remplacé par un opérateur strictement hyperbolique d'ordre m, le terme non linéaire ne comportant que des dérivées de u d'ordre $\leqslant m-2$ (voir remarque 6.2).

Le cas où le terme non linéaire contient des dérivées d'ordre $m-1$ nécessite l'introduction d'un savoureux mélange de calcul 2-(3)-microdifférentiel et de calcul paradifférentiels (symboles singuliers sur les conormaux à $\{0\}$ et $\{\Gamma\}$ mais à régularité limitée en dehors), les opérateurs d'ordre inférieur éliminés au § 9 provenant aussi de la partie non linéaire.

En dimension 3 d'espace, pour l'interaction de 3 ondes, il faudra remplacer les microlocalisations en $\{0\}$ et Γ par celles, un peu plus délicates, sur les conormaux de $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3$ et du conoïde engendré. Le cas générique de l'interaction de 4 ondes demandera 2 microlocalisations de plus. Et ainsi de suite !

N.B. Nous venons de recevoir une prépublication de R. Melrose et N. Ritter "Interaction of nonlinear progressing waves" contenant un théorème voisin de notre théorème A.

§ 1. NOTATIONS ET ENONCES

1.1 Espaces de distributions conormales (cas élémentaire)

Nous désignerons par Σ, soit une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^n$, soit la réunion de deux hypersurfaces de $\mathbb{R}^n$ se coupant transversalement (ou plus généralement un diviseur à croisement normaux). Nous noterons $\mathcal{Z}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs C^∞ tangents à Σ, et poserons, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$H_\Sigma^{s,k} = \{u \in H^s \mid Z^I u \in H^s \quad \text{pour } |I| \leqslant k\}$$

en notant $Z^I u = Z_{i_1} \ldots Z_{i_\ell} u$; $Z_i \in \mathcal{Z}$.

On définit ensuite les espaces $H^{s,s'}$ pour $s' \in \mathbb{R}$ par dualité et interpolation. On peut également remplacer dans la définition les espaces de Sobolev par les espaces de Hölder, Besov,...

1.2 Remarque : On peut, bien entendu, adopter la même définition lorsque Σ est (une sous-variété avec singularités, voire un fermé) quelconque. On obtient des espaces qui sont des algèbres pour $s > n/2$, mais qui sont "trop gros" en général.

Ainsi, si $\Sigma = \bigcup\limits_1^m \Sigma_j$ $(m \geqslant 3)$ où les Σ_j se coupent 2 à 2 transversalement le long de Δ de codimension 2, la "bonne" définition des $H_\Sigma^{s,k}$ est analogue à la précédente, mais en remplaçant les Z par les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1 dont le symbole principal s'annule sur les conormaux des Σ_j et de Δ (voir [4]). De même, si Σ est réunion de 2 hypersurfaces tangentes le long de Δ les "bons" espaces $H^{s,k}$ sont plus restreints que ceux que donnerait la définition 1.1.

1.3 Revenons à $\square = \partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Soit Ω un voisinage ouvert de l'origine tel que $\Omega^+ = \Omega \cap \{t > 0\}$ soit dans le domaine d'influence du passé : $(\Omega^+ + \Gamma^-) \cap \{t \geqslant -\delta\} \subset \Omega$. On a noté Γ^- le demi-cône d'onde rétrograde.

Soient $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ trois hypersurfaces lisses caractéristiques pour $\square$ se coupant 2 à 2 transversalement dans Ω , et telles que $\{0\} = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3$

1.4 Théorème A : Soit $u \in H^{s}(\Omega)$, $s > 3/2$, solution à valeurs réelles de

$$\square u = f(t,x,y,u)$$

où f est une fonction C^{∞} réelle de 4 variables réelles.

On suppose que, dans $\Omega^{-} = \Omega \cap \{t < 0\}$, on a localement $u \in H^{s,k}_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3}$, avec $k \in \mathbb{N}$ (c'est à dire : $u \in H^{s+k}_{loc}$ dans $\Omega^{-} \setminus \cup \Sigma_j$; $u \in H^{s,k}_{\Sigma_i}$ ou $u \in H^{s,k}_{\Sigma_i \cup \Sigma_j}$ près d'un point de $\Sigma_i \setminus \bigcup_{j \neq i} \Sigma_j$ ou de $\Sigma_i \cap \Sigma_j$ respectivement).

On a alors, dans Ω entier et pour tout $s' < s$

a) $u \in H^{s'+k}_{loc}$ hors de $\cup \Sigma_j \cup \Gamma^{+}$

b) $u \in H^{s',k}_{\Sigma_i}$ près de $\Sigma_i \setminus (\bigcup_{j \neq i} \Sigma_j \cup \Gamma^{+})$

c) $u \in H^{s'+g,k-g}_{\Gamma}$ près de $\Gamma^{+} \setminus (\cup \Sigma_j)$ avec $g = \mathrm{Min}(k, [s-n/2])$.

1.5 Remarques : Le résultat est valable pour un système, à partie différentielle diagonale $\square$, ce qui contient le cas où f et u sont à valeurs complexes.

On obtiendra un résultat legèrement plus précis que l'énoncé près de $\Sigma_i \cap \Gamma^{+} \setminus \{0\}$. On aura alors $Z^{I}u \in H^{s}_{loc}$ si $|I| \leqslant k$, et si les Z_i sont tangents (localement hors de O) à Γ et Σ_i.

Les résultats de M. Beals [1] laissent penser que le gain de régularité g sur Γ doit être du type $\mathrm{Min}(k, 2s - \mathrm{Cte})$.

1.6 Problème de Cauchy : On suppose cette fois que l'on a $(\Omega^{+} + \Gamma^{-}) \cap \{t \geqslant 0\}$ et $(\Omega^{-} + \Gamma^{+}) \cap \{t \leqslant 0\}$ inclus dans Ω. On se donne, dans le plan $\{t = 0\}$, m courbes se coupant 2 à 2 transversalement à l'origine : $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$. Par chacune d'elles, il passe 2 surfaces caractéristiques Σ_{j1} et Σ_{j2} qu'on supposera lisses dans tout Ω. On notera

$$\Delta = \cup \Delta_j \quad \text{et} \quad \Sigma = \cup \Sigma_{jk} .$$

1.7 Théorème A' : Soit $u \in H^{s}(\Omega)$, $s > 3/2$, solution à valeurs réelles de

$$\square u = f(t,x,y,u).$$

On suppose que les traces de u sur $\{t = 0\}$ vérifient

$$u(0,x,y) \in H^{s,k}_{\Delta} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) \in H^{s-1,k}_{\Delta}(\Omega \cap \{t=0\}),$$

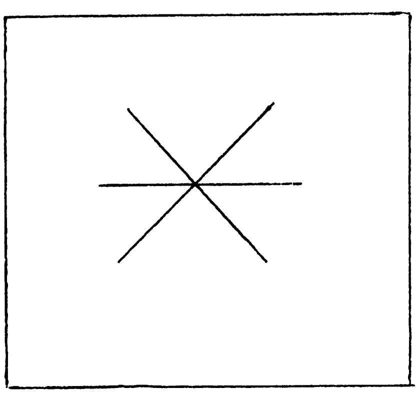
où la définition des $H^{s,k}_{\Delta}$ est rappelée dans la remarque 1.2 (voir [4]).

On a alors dans Ω , et pour tout $s' < s$:

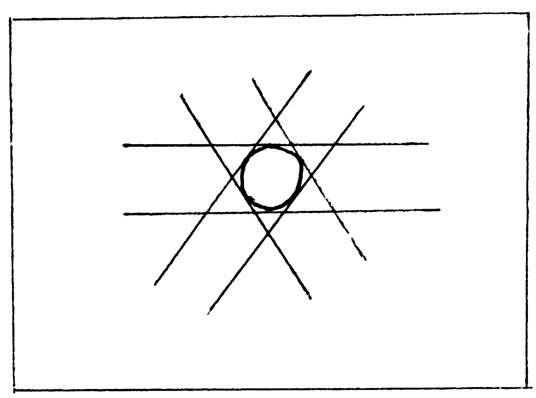
a) $u \in H^{s'+k}$ localement hors de $\Sigma \cup \Gamma$

b) $u \in H^{s',k}_{\Sigma_{ij}}$ localement près de $\Sigma_{ij} \setminus (\bigcup_{(p,q)\neq(i,j)} \Sigma_{pq} \cup \Gamma)$

c) $u \in H^{s'+g,k-g}_{\Gamma}$ localement près de $\Gamma \setminus \Sigma$, $g = \mathrm{Min}(k,[s-n/2])$.



t = 0



t > 0

§ 2. OPERATEURS D'APLATISSEMENT ET DE PARTIE FINIE (RELATIFS A $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$).

Nous noterons ici $H^{s,s'}$ les espaces $H^{s,s'}_{\{0\}}$ définis en 1.1. Pour $s' \in \mathbb{N}$ on a $u \in H^{s,s'} \Leftrightarrow x^{\alpha}u \in H^{s+|\alpha|}$ pour $|\alpha| \leq s'$. On a également $H^{s,-1} = H^s + \sum_1^n x_i H^{s-1}$

2.1 Rappelons brièvement (voir [6]) le principe de la décomposition de Littlewood-Paley. Soit $1 = \psi(\xi) + \sum_0^{\infty} \varphi(2^{-q}\xi)$ une partition de l'unité C^{∞} , avec $\mathrm{Supp}\, \psi \subset \{|\xi| \leq 2\}$ et $\mathrm{Supp}\, \varphi \subset \{0{,}9 \leq |\xi| \leq 2{,}1\}$. On pose, pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

$$u = \psi(D)u + \sum_0^{\infty} \varphi(2^{-q}D)u = u_{-1} + \sum_0^{\infty} u_q .$$

Il n'est pas difficile de voir que l'on a :

$$u \in H^{s,s'} \iff \| 2^{qs}(1 + 2^q|x|)^{s'} u_q \|_{L^2} \leqslant c_q \quad \text{avec} \quad \Sigma\, |c_q|^2 < \infty .$$

(On peut de même définir les espaces de Hölder 2-microlocaux $C^{s,s'}$, caractérisés par $\| 2^{qs}(1 + 2^q|x|)^{s'} u_q \|_{L^\infty} \leqslant$ Cte).

2.2 <u>Définition</u> : <u>Opérateur d'aplatissement Π</u> .
Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, à support par exemple dans la boule unité. On pose

$$\Pi u = \sum_{0 \leqslant p \leqslant q} \sum \varphi(2^p x) \;\; \varphi(2^{-q}D)\; u$$

a) Si $u \in H^{s,s'}$ avec $s \geqslant 0$, $s' \geqslant 0$, la série converge dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. On peut écrire $u = \Pi u + Eu$ et on a : $Eu \in H^{s,\infty}$; $\Pi u \in H^{s,s'}$ et de plus

$$|x|^{-s}\, \Pi\, u \in L^2, \ldots \; |x|^{-s+\lambda} D^\lambda u \in L^2 \quad \text{pour } |\lambda| \leqslant s + s' .$$

Eu et Πu ressemblent respectivement à la "partie principale" (négligeable de notre point de vue) et au "reste" d'un développement limité de u.

b) Dans tous les cas Πu est défini comme distribution prolongeable dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Si u appartient à $H^{s,s'}$, on a $v = \Pi\, u \in SP(s,s')$: espace de Sobolev à poids (attention à l'indexation inhabituelle) caractérisé par :

$$|x|^{-s+\lambda} D^\lambda u \in L^2 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant s + s' \quad (\text{si } s + s' \in \mathbb{N})$$

$$\|\varphi(x)\;\; u(2^{-p}x)\|_{s+s'} \leqslant C_p\, 2^{-p(s - n/2)} \quad \text{avec} \quad \Sigma |C_p|^2 < \infty \quad (\text{en général}).$$

2.3 <u>Définition</u> : <u>Opérateur de partie finie Pf</u>
Soit $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ une distribution prolongeable. On pose

$$\text{Pf } v = \sum_{0 \leqslant p \leqslant q} \sum \varphi(2^{-q}D) \;\; [\varphi(2^p x) v(x)] \;.$$

L'opérateur Pf applique $SP(s,s')$ dans $H^{s,s'}$.

2.4 Théorème : Dans un voisinage de l'origine, les opérateurs Π et Pf induisent des isomorphismes, inverses l'un de l'autre, des espaces quotients :

$$H^{s,s'} / H^{s,\infty} \underset{\text{Pf}}{\overset{\Pi}{\rightleftarrows}} SP(s,s')/SP(s,\infty)$$

2.5 Remarques : Après passage au quotient, Π et Pf ne dépendent plus du choix de la fonction φ .

Pour s et s' assez petits, l'opérateur Π est en fait inutile (les fonctions ne sont aplaties que dans la mesure où elles sont régulières) et peut être avantageusement remplacé dans le théorème précédent par la restriction à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Par contre, pour s et s' assez grand, c'est Pf qui est inutile et qui peut être remplacé par l'injection naturelle. C'est ce que nous avons fait en écrivant $u = \Pi u + Eu$. D'après le principe d'incertitude, Eu ($= \sum\sum \varphi(2^p x)\ \varphi(2^{-q}D)u$ avec $p > q$) ne peut contenir d'information sérieuse sur u. En fait, on pourra souvent remplacer Πu par n'importe quelle fonction v plate (i.e. dans SP(s,s')) telle que $u \equiv v (\mathrm{mod}\ H^{s,\infty})$.

§ 3. OPERATEURS 2-MICRODIFFERENTIELS (RELATIFS à $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$)

Les opérateurs pseudo-différentiels opèrent sur les espaces $H^{s,s'}$, tandis que les multiplications par les (bonnes) fonctions singulières en 0 opèrent que les SP(s,s'). En utilisant les isomorphismes Π et Pf, on peut donc soit faire opérer les opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Sobolev à poids, soit faire opérer les multiplications singulières sur les $H^{ss'}$. C'est ce second point de vue que nous allons développer, les opérateurs 2-micro-différentiels constitueront la plus petite algèbre (raisonnable) d'opérateurs sur les $H^{s,s'}$ contenant à la fois les opérateurs pseudo-différentiels et ces multiplications singulières.

3.1 Paramultiplications : Soit a(x) définie dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, de classe C^∞ , et vérifiant pour tout λ :

$$|D^\lambda a(x)| \leqslant C_\lambda |x|^{\alpha - |\lambda|} \quad , \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

(exemple type : a homogène de degré α , de classe C^∞ hors de 0). On pose

$$T_a u = \text{Pf}\ (a.\ \Pi u).$$

L'opérateur T_a applique $H^{s,s'}$ dans $H^{s+\alpha,s'-\alpha}$. Si on choisit une autre fontion φ au § 2, l'opérateur T_a est modifié par un opérateur appliquant $H^{ss'}$ dans $H^{s+\alpha,\infty}$.

3.2 Remarque : Pour $\alpha > -n$, on obtient le même opérateur (à un opérateur appliquant $H^{s,s'}$ dans $H^{s+\alpha,\infty}$ près) en prenant la définition de T_a que nous avons donnée dans [2] :

$$T_a u = \sum_q [\psi(2^{-q+N_o} D)a][\varphi(2^{-q}D)u].$$

Pour a homogène de degré α non entier négatif, la même définition conviendrait, en remplaçant a par sa partie finie (classique).

3.3 Symboles 2-micro-différentiels : Soit $p(x,\xi)$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$. On dit que $p \in \Sigma^{m,m'}_{\{0\}}$ (ou $\Sigma^{m,m'}$ en abrégé) si on a

$$|D^\alpha_\xi D^\beta_x p(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha\beta} (\sqrt{1+|\xi|^2})^{m-|\alpha|+|\beta|} (\sqrt{1+|x|^2|\xi|^2})^{m'-|\beta|}$$

En fait, p pourra m'être défini que pour $|\xi| \geqslant C$ et $|x||\xi| \geqslant C$, et être prolongé arbitrairement à $\mathbb{R}^{2n}$.

En particulier, on a $a(x) \in \Sigma^{-\alpha,\alpha}$ pour a homogène de degré α , et $p(x,\xi) \in \Sigma^{m,o}$ pour un symbole pseudo-différentiel classique $p \in S^m_{1,0}$.

3.4 Opérateurs 2-micro-différentiels : Soit $p(x,\xi) \in \Sigma^{m,m'}$. Les méthodes de Coifman-Meyer (voir [6] , n° II.9) permettent de décomposer p en une série $p = \Sigma q_k$ rapidement convergente de symboles réduits du type

$$q = \Sigma c_j(x) \phi(2^{-j}\xi)$$

avec $\phi \in C^\infty$, Supp $\phi \subset \{0,9 \leqslant |\xi| \leqslant 2,1\}$

$$|D^\beta c_j(x)| \leqslant C_\beta 2^{j(m+m')}|x|^{m'-|\beta|} \quad \text{pour } |x| \geqslant 2^{-j}$$

L'opérateur Q de symbole q est alors défini par

$$Q = \sum_j \mathrm{Pf} \circ M_{c_j} \circ \Pi \circ \phi(2^{-j}D)$$

en notant M_c l'opérateur de multiplication par c ou, ce qui revient au même modulo un opérateur négligeable (appliquant $H^{s,s'}$ dans $H^{s-m,\infty}$) par $Qu = \Sigma\, Q_j u$

$$Q_j u = \mathrm{Pf}\Big(\sum_{p \leqslant j} \varphi(2^p x)\, c_j(x)\, \phi(2^{-j} D) u(x)\Big)$$

la partie finie pouvant être omise (modulo un opérateur négligeable) si l'espace d'arrivée est assez régulier.

En adjoignant à ces opérateurs les classes $\mathrm{Op}(\Sigma^{m,-\infty})$ des opérateurs négligeables, on obtient le résultat suivant.

3.5 <u>Théorème</u> : Il existe une algèbre bigraduée $\mathrm{Op}(\Sigma^{m,m'})$ d'opérateurs, et une application σ de $\mathrm{Op}(\Sigma^{m,m'})$ dans $\Sigma^{m,m'}$ tels que :

a) $\mathrm{Op}(\Sigma^{m,m'})$ opère de $H^{s,s'}$ dans $H^{s-m,s'-m'}$.

b) σ est surjectif de $\mathrm{Op}(\Sigma^{m,m'})$ dans $(\Sigma^{m,m'}/\Sigma^{m,-\infty})$ et son noyau est $\mathrm{Op}(\Sigma^{m,-\infty})$.

c) σ est un homomorphisme pour la loi de composition habituelle des symboles. Si $P_j \in \mathrm{Op}(\Sigma^{m_j,m'_j})$, $j = 1,2$, on a

$$\sigma(P_1 . P_2) \sim \sum_{\alpha} 1/\alpha!\ \partial_\xi^\alpha\, p_1 . D_x^\alpha\, p_2$$

le terme général de la série appartenant à $\Sigma^{m_1+m_2,\, m'_1+m'_2-|\alpha|}$ et la série convergeant au sens habituel dans le quotient

$$\Sigma^{m_1+m_2,\, m'_1+m'_2} / \Sigma^{m_1+m_2,\, -\infty}$$

d) Adjoints et inverses...

3.6 La démonstration ne présente aucune difficulté théorique. Par la méthode de Coifman-Meyer, chaque symbole est décomposé en une série double de symboles du type $c_j(x)\ \phi(2^{-j}\xi)$ auxquels sont associés les opérateurs pseudo-différentiels <u>classiques</u> Q_j définis au n° 3.4. Ces derniers se composent selon les formules habituelles. Il reste à regrouper les termes et à vérifier que les séries convergent, ce qui est aussi facile que fastidieux (et réciproquement).

3.7 <u>Définition</u> : <u>2ème spectre singulier</u> : Soit u appartenant à $H^{s,-\infty}$ microlocalement en $(0,\xi_0)$, et soit $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On dit que u appartient à $H^{s,s'}$ 2-microlocalement en $(0,\xi_0,\tilde{x}_0)$ si on a $T_a u \in H^{s,s'}$, où $a(x)$ est homogène de degré 0,

C^∞ hors de 0, et non nulle en $\tilde{x}_o$.

3.8 Remarque : Le calcul symbolique introduit ici est exactement le même que le calcul 2-micro-différentiel introduit par Y. Laurent [8] (dans le cas particulier où la variété involutive qu'il considère est le conormal de l'origine), aux différences inévitables près entre calculs de types analytique et C^∞. De même, les difféomorphismes singuliers que nous allons introduire sont analogues à des cas particuliers des transformations bicanoniques quantifiées de [8].

Il est plus que vraisemblable que les deux calculs coïncident (en appliquant les opérateurs à des 2-microfonctions provenant d'éléments de $H^{s,s'}$), et qu'ils s'accordent également à la présentation de la 2e microlocalisation donnée par Sjöstrand [10] .

§ 4. INVARIANCE PAR DIFFEOMORPHISMES SINGULIERS ET DESINGULARISATION

4.1 Soit χ un difféomorphisme C^∞, homogène de degré 1, de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sur lui-même (au voisinage de O). On pose

$$\chi^* u = \mathrm{Pf}(\Pi u \circ \chi) \qquad \text{pour } u \in H^{s,s'}$$
$$\chi^*(P) = \chi^* \circ P \circ (\chi^{-1})^* \qquad \text{pour } P \in \mathrm{Op}(\Sigma^{m,m'}).$$

4.2 Théorème : χ^* applique $H^{s,s'}$ dans lui-même et $\mathrm{Op}(\Sigma^{m,m'})$ dans lui-même. Le symbole principal de $\chi^*(P)$ (dans $\Sigma^{m,m'}/\Sigma^{m,m'-1}$) se déduit de celui de P par la formule habituelle. Enfin, χ^* et $(\chi^{-1})^*$ induisent des isomorphismes inverses l'un de l'autre de $H^{s,s'}/H^{s,\infty}$ sur lui-même et de $\mathrm{Op}(\Sigma^{m,m'})/\mathrm{Op}(\Sigma^{m,-\infty})$ sur lui-même.

Là encore, on se ramène aux symboles réduits $\Sigma\, c_j(x)\, \Phi(2^{-j}\xi)$. L'action de χ^* sur c_j est triviale, et on n'a à regarder l'action sur $\phi(2^{-j}D)$ que pour $|x| \geqslant C\, 2^{-j}$, où χ est régulier. Il reste bien sûr à montrer la convergence des séries obtenues.

4.3 <u>Passage aux coordonnées polaires</u> : Indiquons brièvement - nous ne l'utiliserons pas dans la suite - comment on peut transformer des équations 2-micro-différentielles (en x, D_x) en des équations 2-microdifférentielles (r,θ,D_r,D_θ).

Si V est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, on peut 2-microlocaliser soit sur la variété lagrangienne T_V^* conormale à V (cas isomorphe au précédent par transformation canonique), soit sur la variété involutive $\{(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n \mid x \in V\}$. Ce dernier cas est une adaptation simple de ce que nous avons fait jusqu'ici, avec ses opérateurs d'aplatissement $\widetilde{\Pi}$ sur V et de partie finie, établissant des isomorphismes entre les $H^{s,s'}$ ad hoc et les espaces de Sobolev à poids. Par exemple :

$$\widetilde{\Pi}u = \sum_{0 \leqslant p \leqslant q}\sum \varphi(2^p x')\,\varphi(2^{-q}D)u \quad \text{(si } V \text{ est définie par } x' = 0)$$

$$u \in H^{s,s'} \Longleftrightarrow x'^{\alpha'} u \in H^{s+|\alpha'|} \quad \text{pour } |\alpha'| \leqslant s' \qquad (\text{si } s' \in \mathbb{N}).$$

On peut en particulier considérer

$$\widetilde{\mathbb{R}}^n = \{(r,\theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}\} \,/\, [(r,\theta) \sim (-r,-\theta)]$$

et $\widetilde{O}$ la sous-variété d'équation $r = 0$, et définir les opérateurs $\widetilde{\Pi}$ et $\widetilde{Pf}$ associés. En notant χ le difféomorphisme de $\widetilde{\mathbb{R}}^n - \widetilde{O}$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, les opérateurs $u \rightsquigarrow \widetilde{Pf}(\Pi u \circ \chi)$ et $v \rightsquigarrow \widetilde{Pf}(\widetilde{\Pi} v \circ \chi^{-1})$ rendent isomorphes le calcul 2-micro-différentiel en (x,D_x) et le calcul 2-micro-différentiel en (r,θ,D_r,D_θ).

§ 5. FORMULE DE LEIBNIZ ET APPLICATIONS

5.1 Nous supposerons dans tout ce paragraphe $s > n/2$ et $s + s' > n/2$, auquel cas $H^{s,s'}$ est une algèbre. L'espace $SP(s,s')$ s'identifie alors à un sous-espace (en fait un idéal) de $H^{s,s'}$ et la décomposition

$$u = \Pi u + Eu$$

du n° 2.2 est l'unique (modulo $SP(s,\infty)$) écriture de $u \in H^{s,s'}$ comme élément de $SP(s,s') + H^{s,\infty}$.

5.2 Champs de vecteurs singuliers : Nous désignerons ainsi un opérateur $Z \in Op(\Sigma^{o,1})$ dont le symbole est de la forme

$$(x,\xi) = \Sigma\, a_j(x)(\xi_j)$$

avec $a_j(x)$ homogène de degré 1, et C^∞ hors de l'origine.

Nous noterons $\tilde{Z}$ l'opérateur différentiel $\Sigma\, a_j(x)D_j$ défini dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On a ainsi, pour $u \in H^{s,s'}$:

$$Zu \equiv \tilde{Z}\ \Pi u \quad (\text{mod. } H^{s,\infty})$$

en sous entendant l'injection de $SP(s,s'-1)$ dans $H^{s,s'-1}$.

5.3 Lemme : Pour u et v dans $H^{s,s'}$, on a :

$$\Pi(uv) \equiv \Pi u.\ \Pi v + \Pi u.Ev + Eu.\ \Pi v \quad (\text{mod. } SP(s,\infty))$$

En effet, le 2e membre appartient à $SP(s,s')$ tandis que $Eu.Ev \in H^{s,\infty}$,et leur somme vaut uv.

5.4 Lemme : Pour u dans $H^{s,s'}$ et F de classe C^∞, on a

$$\Pi F(u) \equiv F(u) - F(Eu) \qquad (\text{mod. } SP(s,\infty))$$

En effet, dans l'écriture $F(u) = F(Eu) + \Pi u.\int_0^1 F'(Eu + t\Pi u)dt$, le premier terme appartient à $H^{s,\infty}$, et le second à $SP(s,s')$.

5.5 Théorème (Formule de Leibniz) : Soient u et v dans $H^{s,s'}$ et F de classe C^∞. Il existe alors des opérateurs M_j (j = 1,2,3) appartenant à $Op(\Sigma^{o,o})$ tels que

a) $Z(u.v) \equiv u\, Zv + vZu + M_1 u + M_2 v \quad (\text{mod. } H^{s,\infty})$

b) $ZF(u) \equiv F'(u).Zu + M_3 F'(u) \quad (\text{mod. } H^{s,\infty})$

a) On a $Z(uv) \equiv \tilde{Z}(\Pi u\, \Pi v + \Pi u Ev + Eu\, \Pi v)$ (Lemme 5.3). En développant le membre de droite ($\tilde{Z}$ est un vrai champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$), on obtient

$$Z(uv) \equiv (\tilde{\tilde{Z}}\Pi u).v + u(\tilde{\tilde{Z}}\Pi v) + (\tilde{\tilde{Z}}Eu)Mv + (\tilde{\tilde{Z}}Ev)\Pi u$$

La fonction $a(x) = \tilde{\tilde{Z}}E\,u$ est bornée, et on a $|D^\lambda a(x)| \leqslant Cte|x|^{-\lambda}$. On peut donc poser $M_1 = T_a$ (n° 3.1) et le résultat est démontré.

b) On a $Zu \equiv \tilde{\tilde{Z}}\Pi u \equiv \tilde{\tilde{Z}}f(u) - \tilde{\tilde{Z}}F(Eu)$ (Lemme 5.4)

$$Zu \equiv F'(u)[\tilde{Z}u - \tilde{Z}Eu) + \tilde{Z}Eu[F'(u) - F'(Eu)]$$

$$Zu \equiv F'(u)\tilde{Z}\,\Pi u + \tilde{Z}Eu.\Pi F'(u)$$

$$Zu \equiv F'(u)Zu + T_a F'(u) \quad \text{avec} \quad a = \tilde{Z}\,E\,u$$

5.6 Remarque : Si on modifie Z par un opérateur négligeable (de $H^{s,s'}$ dans $H^{s,\infty}$), cela ne modifie que l'erreur (dans $H^{s,\infty}$) et les opérateurs M_j (dans $Op(\Sigma^{o,o})$). On a donc pu admettre $Zu = Z\Pi u$ dans les calculs précédents.

5.7 Algèbres définies par des champs de vecteurs singuliers

Soit $\mathcal{Z}$ une sous-algèbre de Lie de $Op(\Sigma^{o,1})$ engendrée (sur $Op(\Sigma^{o,o})$) par l'identité et un nombre fini de champs de vecteurs singuliers $Z_1,\ldots,Z_m$. C'est-à-dire

$$M \in \mathcal{Z} \iff M = \sum_1^m A_j Z_j + A_o \quad \text{avec} \quad A_j \in Op(\Sigma^{o,o})$$

$$[Z_i, Z_j] = \Sigma\ A_{ijk} Z_k + A_{ijo} \quad \text{avec } A_{ijk} \in Op(\Sigma^{o,o})_*$$

On désignera, pour $I = (i_1,\ldots,i_k)$, par Z^I l'opérateur $Z_{i_1}\ldots Z_{i_k}$.

5.8 <u>Définition</u> : Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les espaces $H^{s,s'}(k,\mathcal{Z})$ par

$$u \in H^{s,s'}(k,\mathcal{Z}) \iff Z^I u \in H^{s,s'} \quad \text{pour } |I| \leqslant k .$$

5.9 <u>Corollaire</u> : Pour $s > n/2$, $s+s' > n/2$, les espaces $H^{s,s'}(k,\mathcal{Z})$ sont des algèbres, stables par fonctions C^∞. De plus, si F est de classe C^∞, si $u \in H^{s,s'}(k,\mathcal{Z})$ et si $|I| \leqslant k$, on a

$$Z^I F(u) \equiv \mathcal{L}(u, \dots Z^J u)_{|J| \leqslant |I|} \quad (\text{mod. } H^{s,\infty})$$

où $\mathcal{L}$ est une expression composée de fonctions non linéaires, et d'opérateurs de $\mathrm{Op}\,\Sigma^{0,0}$.

On a en effet $Z_i\, F(u) \quad F'(u) Z_i u + M_1 F'(u)$

$$Z_j Z_i F(u) \equiv Z_j (F'(u) . Z_i u) + M_1\, Z_j\, F'(u) + [Z_j, M_1]\, F'(u)$$

et les deux premiers termes du membre de droite s'expriment à l'aide du théorème 5.5 a) et b).

On poursuit par récurrence. Le théorème s'étend évidemment aux fonctions de plusieurs variables.

5.10 <u>Remarque</u> : Avec les hypothèses du n° 1.6 : Δ réunion de courbes Δ_j de $\mathbb{R}^2$, nous avons défini les $H^{s,k}_\Delta$ par $M^I u \in H^s$ pour $|I| \leqslant k$, où les M_i sont les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1 dont le symbole principal s'annule sur les conormaux aux Δ et à $\{0\}$ (voir [4]). On obtient les mêmes espaces en demandant que $Z^I u \in H^s$ pour $|I| \leqslant k$, où les Z sont les champs de vecteurs singuliers tangents aux Δ. On a en effet sans difficulté des décompositions :

$$Z_i = \Sigma\, A_{ij}\, M_j$$

$$M_j = \Sigma\, B_{ji}\, Z_i$$

avec les A_{ij} et B_{ji} dans $\mathrm{Op}(\Sigma^{0,0})$. Ce point est important dans la démonstration du théorème A'.

§ 6. COMMUTATION

Considérons la sous-algèbre de Lie $\mathcal{Z}$ de $Op(\Sigma^{0,1})$ engendrée par les champs de vecteurs singuliers (n° 5.7) tangents aux Σ_i et au cône d'onde Γ . Nous noterons (Z_j) un système fini de générateurs de $\mathcal{Z}$. Notre objectif est de prouver l'appartenance d'une solution u à des espaces $H^{s,s'}(k,\mathcal{Z})$, et, pour cela, de démontrer par récurrence que les fonctions à valeurs vectorielles

$$U_\ell = (Z^I u)_{|I|\leq \ell}$$

appartiennent à $H^{s,s'}$.

6.1 <u>Lemme</u> : On a $[\Box, Z_i] = B_i P + \Sigma\, A_{ij} Z_j + A_{io}$ avec $B_i \in Op(\Sigma^{o,o})$ et $A_{ij} \in Op(\Sigma^{2,-1})$.

La démonstration de ce lemme fondamental n'est pas difficile, mais elle utilise de manière cruciale la souplesse du calcul 2-micro-différentiel. Montrons-le sur l'exemple un peu simplifié de 3 ondes planes formant un triangle équilatéral.

On choisit un système de coordonnées dans $\mathbb{R}^3$ dans lequel Σ_1, Σ_2, Σ_3 ont pour équations $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ respectivement.

On a alors $\square = D_x D_y + D_y D_z + D_z D_x$. Notons $r = \sqrt{\Sigma x^2}$, et $f = \Sigma x^2 - 2\Sigma xy = 0$ l'équation du cône d'onde. Considérons enfin le champ de vecteurs singulier $Z = \frac{fx}{r^2} D_x$ (notation abusive pour $T_{1/r^2} . f\ x\ D_x$). On a, modulo des opérateurs d'ordre (2,-1) :

$$[\square, Z] \equiv [\square, \frac{1}{r^2}]\ f\ x\ D_x + \frac{x\ D_x}{r^2}[\square, f] + \frac{f . D_x}{r^2}(D_y + D_z) .$$

Le premier terme équivaut à $A \frac{fxD_x}{r^2}$ avec $A = r^2\ [\square, \frac{1}{r^2}] \in \mathrm{Op}\,\Sigma^{2,-1}$, et le second vaut de même $(\frac{-4x\ D_x}{r^2})(x\ D_x + y\ D_y + z\ D_z)$. Pour étudier le 3e terme, on le décompose en $\Sigma\ \chi_i(x,y,z)\ f\ \frac{D_x}{r^2}\ (D_y + D_z)$, où $1 = \Sigma\ \chi_i$ est une partition de l'unité en fonctions homogènes de degré O, C^∞ hors de l'origine, à support dans de petits cônes de sommet O.

Si le support de χ_i est contenu dans $x \neq O$, on a $\chi_i = x\ \psi_i$ avec ψ_i homogène de degré -1, C^∞ hors de 0. Notre terme vaut $[\psi_i (D_y + D_z)]\ \frac{fx\ D_x}{r^2}$ et $\psi_i (D_y + D_z) \in \mathrm{Op}(\Sigma^{2,-1})$.

Si le support de χ_i est contenu dans $y \neq O$ (ou $z \neq 0$), on a $\chi_i = y\ \psi_i$, et on écrit notre terme sous la forme

$$\chi_i\ \frac{f}{r^2} \square - \chi_i\ \frac{f}{r^2} D_y\ D_z = B\square - A\ \frac{fy}{r^2} D_y$$

avec $B = \frac{\chi_i f}{r^2} \in \mathrm{Op}(\Sigma^{O,O})$ et $A = \psi_i\ D_z \in \mathrm{Op}(\Sigma^{2,-1})$.

Il est remarquable que le coefficient de P dans la décomposition de $[\square, Z_i]$ est nul ou non selon les cônes en x où on se trouve. Un calcul analogue s'applique aux autres générateurs de $\mathcal{Z}$.

6.2 <u>Remarque</u> : Il pourrait y avoir un nombre quelconque de surfaces caractéristiques Σ_j, 3 à 3 en position transversale (c'est le cas pour le problème de Cauchy du théorème A'). On peut également remplacer $\square$ par un opérateur hyperbolique d'ordre m quelconque (avec $A_{ij} \in \mathrm{Op}\ \Sigma^{m,-1}$). En fait, pour expliciter un système de générateurs de $\mathcal{Z}$ et démontrer le lemme, il n'y a 2-microlocalement que deux cas non triviaux à considérer.

Le premier est la situation dans un petit voisinage conique de $\Sigma_i \cap \Sigma_i$ (le cône d'onde et les autres Σ_k sont en dehors) dont l'étude est immédiate. Le second est la situation dans un petit voisinage conique d'une génératrice de contact de Σ_i et d'une nappe de Γ, qui est simple à étudier directement (et en fait isomorphe à la situation du n° 6.1 par difféomorphisme singulier).

6.3 <u>Remarque</u> : On déduit immédiatement de ce qui précède, et ce sera utilisé au § 8, que les U_ℓ vérifient des équations du type

$$\square U_\ell + RU_\ell \in H^{s,s'} \quad , \text{ avec } R \in Op(\Sigma^{2,-1}) \ ;$$

Il est toutefois sans espoir d'essayer de la résoudre dans les $H^{s,s'}$: les singularités en 0 du 2e membre vont donner des singularités de U_ℓ sur le cône d'onde Γ . Une 3e microlocalisation sur Γ s'impose.

§ 7. <u>TROISIEME MICROLOCALISATION (relative à</u> $\{0\} \subset \Gamma \subset \mathbb{R}^n$)

Nous désignerons par Γ une hypersurface de $\mathbb{R}^n$, lisse en dehors de 0, et stable par les homothéties de centre 0 (ce sera dans la suite, soit le cône d'onde, soit un hyperplan passant par 0). Nous utiliserons les notations suivantes, sui montrent comment on pourrait définir la 3e microlocalisation dans un cadre plus général.

7.1 <u>Notations</u> $d_o(x,\xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2}$

- $\mathcal{H}_o$ désignera l'espace des champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ homogènes de degré o en ξ . Ces champs sont engendrés par les $\partial/\partial x_j$ et les $|\xi|\ \partial/\partial\xi_j$.
- Λ_1 désignera la variété lagrangienne conormale à $\{0\}$ dans $\mathbb{R}^n$, c'est à dire $\{(x,\xi) | x = 0\}$, et $\mathcal{M}_1$ l'espace des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1, dont le symbole principal s'annule sur Λ_1 .
- d_1 ("distance" à Λ_1) est défini par

$$d_1(x,\xi) = \sqrt{1 + \Sigma\, m_i(x,\xi)^2} \qquad (\text{ici} \sim \sqrt{1 + |x|^2\ |\xi|^2})$$

où les m_i sont les symboles d'un système de générateurs de $\mathcal{M}_1$.

- $\mathcal{H}_1$ désignera le sous-espace de $\mathcal{H}_o$ constitué des champs tangents à Λ_1 .

- Λ_2 désignera la variété lagrangienne conormale à Γ dans $\mathbb{R}^n$, et $\mathcal{M}_2$ l'espace des opérateurs 2-micro-différentiels (relatifs à 0) d'ordre (0,1), dont le symbole principal s'annule sur Γ .

- d_2 ("distance" à $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$") est définie par

$$d_2(x,\xi) = \sqrt{1 + \Sigma\, m_i(x,\xi)^2}$$

où les m_i sont les symboles principaux (d'ordre (0,1)) d'un système de générateurs de $\mathcal{M}_2$.

- $\mathcal{H}_2$ désignera le sous-espace de $\mathcal{H}_1$ consitué des champs tangents à Λ_1 et Λ_2 .

7.2 Espaces : Pour $k \in \mathbb{N}$, on peut redefinir les espaces $H^{s,k}_{\{0\}}$ du § 1 par

$$H^{s,k} = \{u \in H^s \mid M^I u \in H^s \text{ pour } |I| \leqslant k \text{ et } M_i \in \mathcal{M}_1\} .$$

Pour $s, s' \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, nous définirons les espaces $H^{s,s',k}_{\{0\},\Gamma}$ (il serait sans doute préférable de les indexer par Λ_1 et $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$) par

$$H^{s,s',k}_{\{0\},\Gamma} = \{u \in H^{s,s'}_{\{0\}} \mid M^I u \in H^{s,s'}_{\{0\}} \text{ pour } |I| \leqslant k \text{ et } M_i \in \mathcal{M}_2\}.$$

On définit ensuite les espaces $H^{s,s',s''}$ pour s" réel par dualité et interpolation par exemple .

7.3 Symboles : Les symboles d'opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre m sont caractérisés par

$$|H_{i_1} \ldots H_{i_\ell}\, p(x,\xi)| \leqslant \text{Cte } d_o^m$$

pour H_i appartenant à $\mathcal{H}_o$, ce que nous noterons symboliquement par

$$|\mathcal{H}_o^I\, p| \leqslant \text{Cte } d_o^m .$$

De même, les symboles 2-microdifférentiels introduits au n° 3.3 sont caractérisés par

$$p \in \Sigma^{m,m'}_{\{0\}} \Longleftrightarrow |\mathcal{H}_o^I \, \mathcal{H}_1^J \, p| \leqslant \text{Cte } d_o^{m+|I|} d_1^{m'-|I|}$$

Par définition, les symboles 3-microdifférentiels sont les fonctions de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^{2n}$ (elles pourront en fait n'être définies que pour $d_o \geqslant$ Cte, $d_1 \geqslant$ Cte, $d_2 \geqslant$ Cte) vérifiant les conditions suivantes .

$$p \in \Sigma^{m,m',m''}_{\{0\},\Gamma} \Longleftrightarrow |\mathcal{H}_o^I \, \mathcal{H}_1^J \, \mathcal{H}_2^K \, p| \leqslant \text{Cte } d_o^{m+|I|} d_1^{m'+|J|} d_2^{m''-|I|-|J|}$$

7.4 <u>Théorème</u> : Il existe une algèbre graduée d'opérateurs $Op(\Sigma^{m,m',m''})$ et des applications (symbole principal)

$$\sigma_{m,m',m''} : Op(\Sigma^{m,m',m''}) \to \Sigma^{m,m',m''} / \Sigma^{m,m',m''-1}$$

telles que :

a) $\sigma_{m,m',m''}$ est surjectif, de noyau $Op(\Sigma^{m,m',m''-1})$

b) $\sigma_{m_1+m_2,m_1'+m_2',m_1''+m_2''}([P \circ Q]) = \sigma(P).\sigma(Q)$

c) $\sigma_{m_1+m_2,m_1'+m_2',m_1''+m_2''-1}([P,Q]) = \frac{1}{i}\{\sigma(P),\sigma(Q)\}$

d) $Op(\Sigma^{m,m',m''})$ applique $H^{s,s',s''}$ dans $H^{s-m,s'-m',s''-m''}$

7.5 <u>Cas où Γ est l'hyperplan</u> $\{x_n = 0\}$

Nous allons esquisser dans ce cas la construction de l'opérateur 3-microdifférentiel associé à un symbole. On a alors

$$d_2(x,\xi) = \sqrt{1+|x_n|^2|\xi|^2 + |x|^2|\xi'|^2}$$

Soit $p(x,\xi) \in \Sigma^{m,m',m''}$. On a alors

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta \, p(x,\xi)| \leqslant C|\xi|^{m-|\alpha|+|\beta|}(|x||\xi|)^{m'+|\alpha'|-|\beta'|}[\mathrm{Sup}(|x_n||\xi|,|x|\,|\xi'|)]^{m''-|\alpha'|-\beta_n}$$

pour d_o, d_1, d_2 supérieurs à une constante > 0. On pourra en outre supposer que le symbole est nul en dehors de $\{|\xi'| \leqslant |\xi_n|\} \cap \{|x_n| \leqslant |x'|\}$, car dans le complémentaire de cet ensemble on a $d_1 \sim d_2$ et donc un symbole dans $\Sigma^{m,m'+m''}_{\{0\}}$ auquel on sait associer un opérateur.

Nous utiliserons une double décomposition de Littlewood-Paley

$$u \sim \Sigma\Sigma\ \varphi(2^{-p}D)\ \varphi(2^{-q}D')u = \Sigma\Sigma\ u_{pq}$$

et on a

$$u \in H^{s,s',s''} \Longleftrightarrow |2^{ps}(1+2^p|x|)^{s'}(1+2^p|x_n|+2^q|x'|)^{s''}u_{pq}|_{L^2} \leqslant c_{pq}$$

avec $\Sigma\,\Sigma\,|c_{pq}|^2 < \infty$.

La méthode de Coifman-Meyer, déjà évoquée au n° 3.4, jointe à un découpage du symbole en un terme à support dans $\{|x_n||\xi| < 2|x||\xi'|\}$ et un à support dans $\{|x|\ |\xi'| < 2|x_n||\xi|\}$ conduit à écrire p comme une série rapidement convergente de symboles réduits de deux types a et b

$$a(x,\xi) = \Sigma\ 2^{p(m+m'+m'')}a_{pq}(x)\ \phi(2^{-p}\ \xi_n,\ 2^{-q}\xi')$$

où ϕ a son support dans $\{0{,}9 \leqslant |\xi'| \leqslant 2{,}1\} \cap \{0{,}9 \leqslant |\xi_n| \leqslant 2{,}1\}$, où $a_{pq}(x)$ a son support dans $\{2^q|x'| \leqslant C\ 2^p|x_n|\}$ et vérifie

$$|D^\beta_X\ a_{pq}| \leqslant C_\beta|x|^{m'-|\beta'|}|x_n|^{m''-\beta_n} .$$

$$b(x,\xi) = \Sigma\ 2^{p(m+m')}\ 2^{qm''}\ b_{pq}(x)\ \ \phi(2^{-p}\ \xi_n,\ 2^{-q}\xi')$$

où b_{pq} a son support dans $\{2^p|x_n| \leqslant C\ 2^q|x'|\}$ et vérifie

$$|D^\beta_X\ b_{pq}| \leqslant C_\beta|x|^{m'+m''-\beta}\ 2^{\beta_n(p-q)} .$$

Pour définir les opérateurs associés à a et b, on tronque les a_{pq} là où d_2 reste borné, on multiplie par les fonctions ainsi tronquée, et (c'est inutile pour des fonctions assez régulière) on tronque dans l'espace des ξ pour obtenir une série convergente dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. C'est l'analogue de l'utilisation de Π et Pf au § 3. Plus précisément :

$\chi(t)$ vaut 0 pour $t < 1$ et 1 pour $t > 2$

$\tilde{\varphi}(t)$ vaut 1 pour $\{0,8 < t < 2,2\}$ et 0 hors de $\{0,7 < t < 2,3\}$.

$$Au = \Sigma\Sigma\, 2^{p(m+m'+m")}\, \tilde{\varphi}(2^{-p}D_n)\, \tilde{\varphi}(2^{-q}D')\, [\chi(2^p x_n).a_{pq}.\,\phi\,(2^{-p}D_n, 2^{-q}D')u]$$

$$Bu = \Sigma\Sigma\, 2^{p(m+m')}2^{qm"}\, \tilde{\varphi}(2^{-p}D_n)\, \tilde{\varphi}(2^{-q}D')\, [\chi(2^q x')b_{pq}\, \phi(2^{-p}D_n,\, 2^{-q}D')u]$$

Il n'est pas difficile de montrer que A et B opèrent dans les $H^{s,s',s"}$. On obtient également le théorème 7.4 (et même le calcul symbolique asymptotique complet dans ce cas) au terme de vérifications standard. On montre de même l'invariance par les difféomorphismes singuliers conservant $\{x_n = 0\}$.

7.6 Remarque : Pour des raisons de support, on ne peut pas prendre les a_{pq} ou b_{pq} indépendants de p et q. On n'introduit pas d'opérateurs nouveaux dont le symbole soit une fonction de x seul. Un exemple typique d'opérateur 3-microdifférentiel est l'inverse de l'opérateur

$$x_n^2 \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + |x|^2 \sum_1^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} .$$

7.7 Cas où Γ est quelconque : On se ramène au cas précédent par difféomorphisme singulier.

§ 8. REDUCTION AU THEOREME DE PROPAGATION LINEAIRE

Nous écrirons ici $H^{s,s'}$ pour $H^{s,s'}_{\{0\}}$, et $H^{s,s',s"}$ pour $H^{s,s',s"}_{\{0\},\,\Gamma}$ où Γ est le cône d'onde, et nous noterons de manière analogue les symboles et opérateurs 2(3)-micro-différentiels. Le théorème suivant sera prouvé au § 9.

8.1 Théorème B : Considérons l'équation scalaire ou matricielle :

$$\Box U + RU = F$$

avec $R \in Op(\Sigma^{2,-1})$, et supposons que l'on ait

$$U \in H^{s,-1/2,-1} \quad ; \quad F \in H^{s-2,1/2,0}$$

et $U \in H^{s-1/2}_{loc}$ pour $t < 0$.

Alors on a $U \in H^{s-\varepsilon,-1/2}$ au voisinage de 0.

8.2 Démonstration du théorème A

Reprenons donc les notations introduites au § 6. On désigne par (Z_j) un système fini de générateurs de l'ensemble des champs de vecteurs singuliers tangents à Γ et aux Σ_i . On note

$$U_\ell = \{Z^I u \mid |I| \leqslant \ell\}$$

Nous allons démontrer par récurrence que sous les hypothèses du théorème A, on a la propriété 8.3 suivante pour $\ell \leqslant k$. Les conclusions du théorème A en résulteront immédiatement, à l'exception du gain de régularité sur Γ (voir remarque 8.4).

8.3
$$\left\{\begin{array}{l} \text{Pour tout } \varepsilon > 0,\ U_\ell \text{ appartient à } H^{s+1/2-\varepsilon,-1/2} \text{ et vérifie} \\[2ex] \qquad\qquad \square U_\ell + R_\ell U_\ell = F_\ell \in H^{s+1/2-\varepsilon,-1/2} \\[2ex] \text{avec } R_\ell \in Op(\Sigma^{2,-1}) \end{array}\right.$$

La propriété est vérifiée pour $\ell = 0$. Cela résulte du théorème 9.1 pour la régularité de u. Celle de F_o résulte du fait que $H^{s+1/2-\varepsilon,-1/2}$ est une algèbre pour $s - \varepsilon > 3/2$. Supposons donc (8.3) vérifiée au rang ℓ .

Posons $V = U_{\ell+1}$. Les composantes de V sont les $v_{i\alpha} = Z_i u_\alpha$ en notant u_α les composantes de U_ℓ . On a donc $V \in H^{s+1/2-\varepsilon,-1/2,-1}$ en remarquant que les Z_i appartiennent à $Op(\Sigma^{o,o,1})$.

On a d'autre part

$$\square v_{i\alpha} = Z_i \square u_\alpha + [\square, Z_i]\, u_\alpha$$

$$\square v_{i\alpha} = Z_i (f_\alpha - \Sigma R_{\alpha\beta} u_\beta) + B_i \square u_\alpha + \Sigma A_{ij} Z_j u_\alpha$$

d'après le lemme 6.1. En commutant Z_i et $R_{\alpha\beta}$,et en remplaçant $\square u_\alpha$ par son expression, on obtient

$$\square V + R_{\ell+1} V \in H^{s+1/2-\varepsilon,-1/2,-1} \subset H^{s-3/2-\varepsilon,1/2,0}$$

avec $R_{\ell+1} \in Op(\Sigma^{2,-1})$. Enfin, il est clair que les hypothèses du théorème A entraînent $V \in H^s_{loc}$ pour $t < 0$, pourvu que $\ell + 1 \leqslant k$.

Le théorème B nous assure alors que $V \in H^{s+1/2-\varepsilon\ ,-1/2}$, et il reste, pour obtenir l'hypothèse de récurrence (8.3) au rang $(\ell + 1)$, à utiliser le corollaire 5.9 pour prouver que $F_{\ell+1} = \mathcal{L}(x,u,\ldots,Z^I u)$ où $\mathcal{L}$ est composée de fonctions non linéaires et d'opérateurs de $Op(\Sigma^{0,0})$ appliqués aux $Z^I u$ $(|I| \leqslant \ell+1)$, et donc que $F_{\ell+1} \in H^{s+1/2-\varepsilon,-1/2}$. Il est à noter que c'est là l'unique point non-linéaire de la démonstration.

8.4 <u>Remarque</u> : On sait déjà que $u \in H^{2s+1-n/2}$ près de $\Gamma \setminus \cup \Sigma_j$. Pour prouver la partie c) du théorème A, on montre comme ci-dessus que l'on a $Z^I M^J u \in H^{s+1/2-\varepsilon,-1/2}$, où les M sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1 dont le symbole principal s'annule sur les conormaux des Σ_i et des $\Sigma_i \cap \Sigma_j$, pourvu que $|J| \leqslant [s - n/2]$ et $|I| + |J| \leqslant k$. La seule difficulté est de prouver que les espaces définis pas ces conditions sont des algèbres. On doit combiner pour cela le calcul paradifférentiel et les arguments du § 5.

§ 9. <u>DEMONSTRATION DU THEOREME B</u>

Nous le démontrerons d'abord pour l'équation des ondes elle-même, l'hypothèse $\in H^{s,-1/2,-1}$ étant alors inutile.

9.1 <u>Théorème</u> : Soit u une distribution vérifiant

$$\square u \in H^{s-2,1/2} \qquad \text{près de } 0$$

$$u \in H^{s-1/2}_{loc} \qquad \text{pour } t < 0$$

Alors on a $u \in H^{s-\varepsilon,-1/2}$ près de 0, pour tout $\varepsilon > 0$.

On peut évidemment supposer que u a son support limité à gauche. On sait alors que si $\square u$ appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R}_t, H^{s-3/2}(\mathbb{R}^2))$, on a

$u \in L^\infty(\mathbb{R}_t, H^{s-1/2}(\mathbb{R}^2))$. Compte tenu du fait que u appartient à $H^{s,1/2}$ microlocalement pour $|\xi|^2 + |\eta|^2 < |\tau|^2$, le résultat est une conséquence immédiate des deux lemmes suivants.

9.2 Lemme : On a $H^{s-2,1/2+\varepsilon} \subset L^1(\mathbb{R}_t, H^{s-3/2})$.

Soit en effet $f = \Sigma f_p$ la décomposition de Littlewood-Paley de $f \in H^{s-2,1/2+\varepsilon}$. La norme de f_p dans $L^1(\mathbb{R}_t, L^2)$ peut s'estimer par le produit de la norme de $(1+2^p|x|)^{1/2+\varepsilon} f_p$ dans $L^2(\mathbb{R}_t, L^2)$ par la norme de $(1+2^p|x|)^{-1/2-\varepsilon}$ dans $L^2(\mathbb{R}_t, L^\infty)$, d'où le résultat.

9.3 Lemme : Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R}_t, H^{s-1/2})$ dont le spectre singulier ne rencontre pas $\{\tau = 0\}$. Alors $u \in H^{s,-1/2-\varepsilon}$.

En effet, compte tenu de l'hypothèse spectrale, on a, pour la décomposition de Littlewood-Paley de u, une estimation de la norme de u_p dans $L^\infty(\mathbb{R}_t, \mathbb{R}^2)$ par $c_p 2^{-p(s-1/2)}$. La norme de $(1+2^p x)^{-1/2-\varepsilon} u_p$ dans $L^2(\mathbb{R}_t, L^2)$ s'estime par le produit de la norme de u_p dans $L^\infty(\mathbb{R}_t, L^2)$ par la norme de $(1+2^p|x|)^{-1/2-\varepsilon}$ dans $L^2(\mathbb{R}_t, L^\infty)$.

9.4 Remarque : Le théorème est très vraisemblablement valable avec $\varepsilon = 0$. Remarquons que les démonstrations ne perdent en fait ε que sur le second indice.

Le théorème suivant jouera un rôle clef pour ramener le théorème B au théorème 9.1.

9.5 Théorème : On a $\square \in Op(\Sigma^{2,-1,1})$. Si l'opérateur (matriciel) R appartient à $Op(\Sigma^{2,-1,0})$, il existe des opérateurs E et E' (matriciels) appartenant à $Op(\Sigma^{0,0,0})$ et inversibles tels que

$$E(\square + R) \equiv \square E' \quad (\text{mod } Op\ \Sigma^{2,-1,-\infty})$$

Il est clair que $\sqrt{x^2+y^2+t^2}\,(\xi^2+\eta^2-\tau^2)$ s'annule sur les conormaux de $\{0\}$ et de Γ, et appartient donc à $\Sigma^{1,0,1}$, d'où le résultat sur l'ordre de P.

Nous allons d'abord construire la restriction commune $\bar{e}$ à la variété caractéristique des symboles e de E et e' de E'. On prendra ensuite e un prolongement inversible quelconque (dans $\Sigma^{0,0,0}$) de $\bar{e}$, et on obtiendra e' - e par division.

Il suffit donc de résoudre les équations de transport

$$(H_{\square} + r)\, e_k = f_k$$

avec $e_k \in \Sigma^{0,0,-k}$ pour f_k donné dans $\Sigma^{2,-1,-k}$. Cela devient très facile si on transforme le problème par une transformation canonique envoyant la variété caractéristique sur $\tau = 0$ (on n'utilise que l'invaraince, immédiate, des classes de symboles par transformation canonique, et non pas l'invariance-certainement vraie, bien sûr- des opérateurs 3-microdifférentiels sous l'action des opérateurs intégraux de Fourier).

La variété lagrangienne Λ_2 (notations du § 7) est incluse dans $\tau = 0$, et on a $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \Lambda_1 \cap \{\tau = 0\}$, condition-clef pour la résolution des équations de transport. C'est à cet endroit qu'apparaît la nécessité de chercher nos solutions u singulières non seulement sur Λ_1, mais aussi sur toutes les bicaractéristiques nulles issues de Λ_1.

9.6 Démonstration du théorème B : On a

$$\square E'U \equiv E(\square + R)U = EF \in H^{s-2,1/2,0}$$

l'erreur provenant d'un opérateur de $Op(\Sigma^{2,-1,-\infty})$ appliqué à $U \in H^{s,-1/2,-\infty}$ et appartenant donc à $H^{s-2,1/2,+\infty}$. On a d'autre part $E'U \in H^{s-1/2}_{loc}$ pour $t < 0$, et donc, d'après le théorème 9.1, on a $E'U \in H^{s-\varepsilon,-1/2}$. L'opérateur E' étant inversible dans $Op(\Sigma^{0,0,0})$ on a donc $U \in H^{s-\varepsilon,-1/2}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BEALS : Self spreading and strength of singularities for solutions to semilinear wave equations.
Annals of Math. 118 (1983) 187-214.

[2] J. M. BONY : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires.
Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4ème série 14 (1981) 209-246.

[3] [4] J. M. BONY : Interaction des singularitiés pour les équations aux dérivées partielles non linéaires.
Sem. Goulaouic-Meyer-Schwartz 1979-80 n °22 et 1981-82 n° 2.

[5] J. M. BONY : Propagation et interaction des singularités par les solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires.
Actes Cong. Intern. Varsovie 1982 (à paraître).

[6] R. COÏFMAN et Y. MEYER : Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels. (Astérisque, vol. 57, 1978).

[7] B. LASCAR : Singularités des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires.
C. R. Acad. Sc. Paris, 287 A (1978), 521-529.

[8] Y. LAURENT : Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe (Thèse Université de Paris-Sud, 1982).

[9] J. RAUCH and M. REED : Singularities produced by the nonlinear interaction of three progressing waves ; examples. (preprint).

[10] J. SJOSTRAND : Singularités analytiques microlocales.
Astérisque 95 (1982).

****