Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

V. M. Petkov

La distribution des pôles de la matrice de diffusion

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1982-1983), exp. nº 7, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1982-1983____A7_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1982-1983

LA DISTRIBUTION DES POLES DE LA MATRICE DE DIFFUSION.

par V. M. PETKOV

Exposé n° VII

14 Décembre 1982

1. INTRODUCTION

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert et soit $n \geqslant 3$, n impair. On suppose que le complémentaire de Ω : $K = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ est borné et que la frontière de K, notée ∂K, est C^∞ et compacte. Dans notre exposé, nous traiterons le problème de Dirichlet

$$(1) \qquad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0, & \text{dans } \mathbb{R} \times \Omega \ , \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial K. \\ u|_{t=0} = f_0 & u_t|_{t=0} = f_1 \ , \end{cases}$$

mais les résultats restent valables pour le problème de Neumann (cf. [9]).

L'opérateur de diffusion S, associé à (1), est un opérateur unitaire dans $L^2(\mathbb{R} \times S^{n-1})$. De plus, on peut considérer S comme une fonction $S(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ à valeurs opérateurs bornés de $L^2(S^{n-1})$ dans $L^2(S^{n-1})$. Cette fonction admet un prolongement méromorphe dans $\mathbb{C}$ ayant ses pôles λ_j dans $\operatorname{Im}\lambda > 0$ (cf. [6]). Dans chaque domaine borné nous n'avons qu'un nombre fini de pôles. La distribution des pôles dépend de la géométrie de K. Lax et Phillips [7] ont prouvé que si K est non captif (cf. [10] pour la définition) il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$(2) \qquad \operatorname{Im} \lambda_j \geqslant \varepsilon_0 \operatorname{Log} |\lambda_j| \ , \qquad \forall \lambda_j \ .$$

Récemment Bardos, Guillot et Ralston [1] et Ikawa [3], [4] ont examiné le cas plus simple où des rayons captifs apparaissent. C'est le cas avec $K = K_1 \cup K_2$, où K_1 et K_2 sont strictement convexes et $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Ils ont montré que pour chaque $\varepsilon > 0$ il y a des pôles λ_j tels que

$$(3) \qquad 0 < \operatorname{Im} \lambda_j < \varepsilon \operatorname{Log} |\lambda_j| \ .$$

D'autre part les résultats de Ikawa [3] [4] sont beaucoup plus précis car il prouve qu'il y a un nombre infini de pôles situés dans la région $C_0 \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant C_0 + \varepsilon$, où $C_0 > 0$ est convenablement choisi.

Le but de cet exposé est de discuter l'existence de pôles qui satisfont à (3) pour une classe d'obstacles captifs.

2. LA DISTRIBUTION $\sigma(t)$

Soit L l'extension auto-adjointe du laplacien dans un domaine borné $G \subset \mathbb{R}^n$, avec la condition de Dirichlet sur ∂G. Le spectre de L est formé par une suite $0 < \nu_1 \leq \ldots \leq \nu_m \leq \ldots, \nu_m \nearrow \infty$, de valeurs propres et on sait que

$$\nu(t) = \sum_j e^{i\nu_j t} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

L'étude de l'asymptotique de $N(\lambda) = \# \{\nu_j ; \nu_j \leq \lambda\}$ repose sur l'analyse des singularités de $\nu(t)$. Afin d'obtenir le terme principal de $N(\lambda)$ modulo un reste du type $O(\lambda^{n-1})$ il suffit d'examiner la singularité de $\nu(t)$ en $t = 0$ (cf. [5]).

Dans le cas où Ω est un domaine non borné il est naturel de donner un sens à l'expression $\sum_j e^{i\lambda_j t}$, où la sommation est prise sur tous les pôles. Soit $-\Delta$ l'extension auto-adjointe du laplacien dans $L^2(\Omega)$ avec la condition de Dirichlet sur ∂K. Soit $E(t,x,y)$ le noyau de l'opérateur $\cos\sqrt{-\Delta}\,t$. Récemment Melrose [9] a démontré le :

<u>Théorème 1</u> : Pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ nous avons

$$(\varphi(t), E(t,x,y)) \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}) \qquad \text{et}$$

$$2\int_\Omega \varphi(t)E(t,x,x)\,dx = \sum_j \hat{\varphi}(-\lambda_j), \tag{4}$$

où $\hat{\varphi}(\lambda)$ désigne la transformation de Fourier-Laplace de $\varphi(t)$.

<u>Remarque 1</u> : Si supp $\varphi \subset (2\rho,\infty)$, où $K \subset \{x ; |x| \leq \rho\}$ la formule (4) a été obtenue par Bardos, Guillot et Ralston [1].

Il découle de (4) que $\sigma(t) = \sum_j e^{i\lambda_j t}$ est une distribution dans $\mathcal{D}'(0,\infty)$. De plus on peut obtenir une liaison entre les singularités de $\sigma(t)$ et les périodes des bicaractéristiques généralisées, introduites dans [8] . Plus précisément on a la

Proposition 2 ([1] ,[10]) : Le support singulier de $\sigma(t)$ est inclus dans l'union des périodes des bicaractéristiques généralisées périodiques de l'opérateur $\partial_t^2 - \Delta$.

L'étude des singularités de $\sigma(t)$ pour $t > 0$ est très difficile surtout quand des bicaractéristiques tangentes à $T^*(\partial K)$ et périodiques apparaissent. $\sigma(t)$ n'est une distribution que sur $(0,\infty)$ et même s'il existe un prolongement de $\sigma(t)$ sur $[0,\infty)$ dans un sens convenable il semble très difficile d'en tirer des renseignements sur le comportement de σ au voisinage de 0. D'autre part, si K est non captif, pour $|t|$ assez grand, $\sigma(t)$ coïncide avec une fonction de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (cf. [10] pour la démonstration). On a un résultat analogue sous l'hypothèse que (2) est satisfaite.

Proposition 3 : Supposons qu'il existe $\varepsilon_o > 0$ tel qu'on a (2). Alors pour chaque $m \in \mathbb{N}$, il existe $T_m > 0$, $\delta > 0$ tels que $\sigma(t) \in C^m$ pour $t \geq T_m$ et

(5) $$\sum_{k=o}^{m} \left| \frac{\partial^k \sigma(t)}{\partial t^k} \right| \leq C_m e^{-\delta t} , \quad t \geq T_m .$$

Démonstration : Soit

$$N(\mu) = \# \{\lambda_j ; \mu \leq \operatorname{Im} \lambda_j < \mu + 1\}.$$

Alors la convergence de la série

$$\sum_j \frac{e^{-2\rho \operatorname{Im} \lambda_j}}{|\lambda_j|^{n+2}} ,$$

démontrée dans [1] , implique l'estimation

(6) $$N(\mu) \leq C \exp(2\rho + \frac{n+2}{\varepsilon_o})m, \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

On peut ainsi obtenir (6) avec une autre constante à la place de $(2\rho + \frac{n+2}{\varepsilon_o})$ en profitant de l'estimation :

(7) $$\# \{\lambda_j ; |\lambda_j| \leq m \} \leq Cm^M , \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

Ce résultat pour le problème de Dirichlet est annoncé dans [9] .

Etant donné $m \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\sum_j e^{-\operatorname{Im}\lambda_j t} |\lambda_j|^m = \sum_{k=o}^{\infty} \sum_{k \leqslant \operatorname{Im} \lambda_j < k+1} e^{-\operatorname{Im}\lambda_j t} |\lambda_j|^m$$

$$\leqslant C \sum_{k=o}^{\infty} e^{(2\rho + \frac{n+2}{\varepsilon_o})k} e^{-kt} e^{(\frac{k+1}{\varepsilon_o})m}$$

et pour $t > 2\rho + \frac{n+2+m}{\varepsilon_o}$ nous obtenons la convergence de $\sum_j e^{i\lambda_j t} \lambda_j^m$. L'estimation (5) en découle facilement et cela prouve la proposition 3.

3. LA DISTRIBUTION DES PÔLES

En appliquant la proposition 3 on peut trouver une contradiction avec (2) en construisant une suite $t_j \nearrow \infty$ de singularités de $\sigma(t)$. Pour cela nous allons utiliser les rayons périodiques et réfléchissants (cf. [2] pour la définition précise d'un rayon réfléchissant).

Définition 1 : On dit qu'un rayon périodique et réfléchissant γ , ayant une période primitive T, est isolé si les propriétés ci-dessous sont satisfaites :
(i) il existe une suite $n_j \nearrow \infty$, $n_j \in \mathbb{N}$, telle que $n_j T$ n'est pas période des bicaractéristiques périodiques généralisées différentes de γ .

(ii) si P désigne l'application de Poincaré associée à γ (cf.[2]), l'application P^{n_j} n'a pas de valeurs propres égales à 1.

Maintenant si γ est un rayon réfléchissant et isolé on peut appliquer les résultats de Melrose et Guillemin [2] et on obtient que $\sigma(t)$ près de $n_j T$ coïncide mod L^1_{loc} avec

$$\frac{T(-1)^{n_j m}}{\pi} \operatorname{Re} \{ i^{\alpha_j} |\det(P^{n_j} - I)|^{-1/2} (t - n_j T + io)^{-1} \}. \tag{8}$$

Ici α_j est l'indice de Maslov et m est le nombre de réflexions de γ . Par conséquent on en déduit que $n_j T \in$ sing supp $\sigma(t)$. Cette observation et la proposition 3 nous amènent au

<u>Théorème 4</u> : Supposons qu'il existe au moins un rayon réfléchissant périodique et isolé. Alors pour $\forall \varepsilon > 0$ il y a des pôles λ_j tels que

$$0 < \operatorname{Im} \lambda_j < \varepsilon \operatorname{Log} |\lambda_j|. \tag{9}$$

Comme exemple où le théorème 4 s'applique, nous considérons le cas de M obstacles strictement convexes et disjoints.

<u>Théorème 5</u> : Supposons que $K = \bigcup_{j=1}^{M} K_j$, où $K_i \cap K_j = \emptyset$, $i \neq j$ et chaque K_j est strictement convexe. Soit $T_0 = 2\min_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant M \\ i \neq j}} \operatorname{dist}(K_i, K_j) > 0$. Considérons l'ensemble Q des périodes primitives T des bicaractéristiques généralisées et périodiques pour lesquelles T/T_0 est rationnel. Supposons que Q ne contient qu'un nombre fini de périodes primitives. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il y a des pôles λ_j tels que (9) est satisfaite.

<u>Démonstration</u> : Soit $T_k \in Q$, $T_k \neq T_0$, $k = 1,\dots,m$. Il est clair que $T_0 < T_k$, $k = 1,\dots,m$, donc

$$T_k = \frac{p_k}{q} T_0 , \; p_k \in \mathbb{N} , \quad p_k > q \quad , k = 1,\dots,m .$$

Considérons les nombres

$$j \prod_k p_k + 1, \dots, \; j \prod_k p_k + q .$$

Il existe $n_j \in \mathbb{N}$ tel que

$$j \prod_x p_k + 1 \leqslant n_j q \leqslant j \prod_k p_k + q , \quad \forall j \in \mathbb{N} .$$

On voit immédiatement que la suite $n_j T_0$ satisfait à (i). Le nombre T_0 est associé aux rayons captifs réalisés comme la distance entre deux ou plusieurs obstacles. D'après [1] le spectre de l'application de Poincaré correspondant aux rayons de ce type est contenu dans $(0,1) \cup (1,\infty)$. Alors la formule (8) donne

$$T_0 \sum_{k=1}^{\ell} |\det(P_k^{n_j} - I)|^{-1/2} \; \delta(t - n_j T_0) + L^1_{loc} ,$$

et par conséquent $n_j T_0 \in$ sing supp $\sigma(t)$. Cela prouve le théorème 5.

Remarque 2 : Il semble que les restrictions géométriques sur les nombres des périodes primitives $T \in Q$ sont génériquement satisfaites.

Remarque 3 : Les raisonnements utilisés ci-dessus s'appliquent aussi dans le cas où K est un obstacle non-convexe. Il faut supposer que la plus petite période primitive T_o correspond juste à un rayon réfléchissant γ et que le spectre de l'application de Poincaré, associée à γ , ne contient pas 1 ni les racines $\sqrt[p]{1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

4. APPLICATION DE POINCARE

L'information sur le spectre de l'application de Poincaré, associée à un rayon γ ayant points de réflexions P_i, $i = 1,\dots,m$ joue un rôle essentiel dans l'application des résultats dans [2]. Récemment P. Vogel [12] a trouvé la forme de la matrice de P dans une base convenable, adaptée au rayon γ . Plus précisément il a montré que cette matrice possède la représentation

$$P = \prod_{i=1}^{m} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \lambda_i I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i & \tilde{\psi}_i \sigma_i \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix},$$

où $\lambda_i = \mathrm{dist}(P_i, P_{i+1})$, σ_i sont des matrices que correspondent aux symétries par rapport aux plans tangents en P_i et $\tilde{\psi}_i$ sont des matrices symétriques qui dépendent de l'application de Gauss en P_i. De plus $\tilde{\psi}_i$, σ_i, I sont des $(n-1) \times (n-1)$ matrices.

En utilisant l'égalité

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ \lambda_i I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i & \tilde{\psi}_i \sigma_i \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \lambda_i I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \sigma_i^{-1} \tilde{\psi}_i \sigma_i \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

on se ramène à la matrice

$$P = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^{m} \sigma_i & 0 \\ 0 & \prod_{i=1}^{m} \sigma_i \end{pmatrix} \prod_{i=1}^{m} \begin{pmatrix} I & \psi_i \\ \lambda_i I & \lambda_i \psi_i + I \end{pmatrix}.$$

où $\psi_i = (\sigma_m \dots \sigma_i)^{-1} \tilde{\psi}_i (\sigma_i \dots \sigma_m)$. Dans le cas où au voisinage de P_i, $i = 1,\dots,m$, l'obstacle ou les obstacles sont strictement convexes les formes ψ_i, $i = 1,\dots,m$ seront définies positives.

Exemple 1 : Soit $n = 2$ et soit $\psi_i > 0$, $i = 1,\dots,m$. Alors on voit facilement que $|\mathrm{tr}\, P| > 2$. On en déduit que P a deux valeurs propres α, $\frac{1}{\alpha}$, où $1 < \alpha < 1$, $\alpha \neq 0$.

Exemple 2 : Soit $m = 2$ et soit ψ_i, $i = 1,2$, définies positives. Alors on a $\lambda_1 = \lambda_2$, $\sigma_1 \sigma_2 = I$. On peut montrer que les valeurs propres de P sont réels et différents de ± 1 (cf. [1] pour une autre démonstration).

Supposant que les matrices ψ_i, $i = 1,\dots,m$ sont définies positives au voisinage de P_i, $i = 1,\dots,m$, nous pouvons modifier la courbure de K dans les petits voisinages de P_i sans changer les plans tangents en P_i ni les distances λ_i. Alors on peut espérer changer les courbures en P_i de sorte que les valeurs propres de P soient placées hors du cercle $|z| = 1$.

REFERENCES

[1] C. Bardos, J. C. Guillot et J. Ralston : La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Application à la théorie de la diffusion, Comm. in Partial Diff. Eq., 7, (1982), p. 905-958.

[2] V. Guillemin et R. Melrose : The Poisson summation formula for manifolds with boundary. Advances in Math., 32, (1979), p. 204-232.

[3] M. Ikawa : On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles. J. Math. Kyoto Univ. (to appear).

[4] M. Ikawa : On the distribution of the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles, preprint.

[5] V. Ivrii : Second term of the spectral symptotic expansion of the Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary. Funct. Analiz i Ego Pril., 14, N° 2 (1980), p. 25-34.

[6] P. Lax and R. Phillips : Scattering theory, Academic Press, 1967.

[7] P. Lax and R. Phillips : A logarithmic bound on the location of the poles of the scattering matrix, Arch. Rat. Mech. and Anal., 40, (1971), p. 268-280.

[8] R. Melrose and J. Sjöstrand : Singularities in boundary value problems. Comm. Pure Appl. Math., 31, (1978), p. 593-617 and 35, (1982), p.129-168.

[9] R. Melrose : Polynomial bound on the number of scattering poles. Preprint.

[10] V. Petkov and G. Popov : Asymptotic behaviour of the scattering phase for non-trapping obstacles. Ann. Inst. Fourier, 32, (1982), (to appear).

[11] V. Petkov : Note on the distribution of poles of the scattering matrix. J. Math. Anal. Appl. (to appear).

[12] P. Vogel : Communication personnelle.

*
* *
*