Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

N. Sibony

Constructions de fonctions holomorphes bornées

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1982-1983), exp. nº 21, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1982-1983____A21_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 2 - 1 9 8 3

CONSTRUCTIONS DE FONCTIONS HOLOMORPHES BORNEES

par N. SIBONY

Exposé n° XXI

3 mai 1983

1. Introduction

Soit L l'opérateur de Hans Lewy dans $\mathbb{R}^3$

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} - 2i(x+iy)\frac{\partial}{\partial t}\ .$$

Considérons une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, supposons que $L(f) = 0$ et que $0 < \delta \leq |f| \leq 1$. On se demande si $L(1/f)$ au sens des distributions est nul. Le but de cet exposé est de montrer qu'il n'en est rien. En effet on construit des fonctions f analytiques réelles dans $\mathbb{R}^3 \setminus F$, F fermé de mesure nulle telles que

$$\frac{1}{2} \leq |f| \leq 1 \qquad \text{dans} \qquad \mathbb{R}^3 \setminus F$$

$L(f) = 0$ mais $L(1/f) \neq 0$.

Le problème précédent est bien sûr lié à l'étude des valeurs au bord des fonctions holomorphes bornées dans la boule unité B de $\mathbb{C}^p$, $p \geq 2$.

Désignons par $H^\infty(B)$ l'espace des fonctions holomorphes bornées dans B, muni de la norme uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in B} |f(z)|\ .$$

Notons σ la mesure de Lebesgue sur ∂B. Toute fonction $f \in H^\infty(B)$ admet des limites radiales σ presque partout sur ∂B. Notons f^* la fonction de $L^\infty(\partial B)$ ainsi obtenue.

Si $f \in H^{\infty}(B) \cap \mathcal{C}(\overline{B})$ et pour $p \geq 2$ on a

$$(*) \qquad f(B) \subset f(\partial B).$$

Il suffit en effet de remarquer que l'ensemble analytique de codimension 1

$$V_a = \{z \ ; \ z \in B, \quad f(z) = f(a)\}$$

où $a \in B$, ne peut être compact.

Il est assez troublant qu'on ne puisse lier l'image essentielle de f^* pour $f \in H^{\infty}(B)$ et les valeurs de f prises dans B.

Rappelons que pour $h \in L^{\infty}(\partial B)$ on appelle image essentielle de h l'ensemble R_h des nombres complexes w tels que pour tout $\varepsilon > 0$ on ait

$$\sigma(\{\zeta \ ; \ |h(\zeta) - w| < \varepsilon) > 0.$$

Une généralisation naturelle de la relation (*) serait pour $f \in H^{\infty}(B)$

$$f(B) \subset R_{f^*} .$$

Nous allons voir qu'il n'en est rien.

Les problèmes précédents ont été résolus indépendamment par A. B. Aleksandrov [1] et par H. Hakim et N. Sibony [2].

2. Les résultats

THEOREME 1 [Aleksandrov]. Soit φ une fonction positive continue sur ∂B. Il existe une mesure $\nu \geq 0$ singulière par rapport à σ, vérifiant

$$\|\nu\| = \int \varphi \, d\sigma$$

et telle que la transformée de Poisson

$$u = P[\varphi \, d\sigma - d\nu]$$

soit pluriharmonique.

Remarques

1. Si $\varphi = 1$ on trouve qu'il existe une fonction pluriharmonique positive u, dont les limites radiales sur ∂B sont nulles presque partout. Si v est la conjuguée de u la fonction

$$f = e^{-(u+iv)}$$

est une fonction intérieure, c'est-à-dire qu'elle est holomorphe bornée dans U, non constante et vérifie

$$|f^*| = 1 \quad \text{p. p. sur} \quad \partial B.$$

2. Le théorème 1 est d'autant plus intéressant qu'il est facile dé vérifier la propriété suivante.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^3(\partial B)$, $B \subset \mathbb{C}^p$, $p \geq 2$. Si u est une fonction pluriharmonique dans B telle que

$$\lim_{r \to 1} u(r\zeta) = \varphi(\zeta)$$

pour ζ appartenant à un G_δ partout dense G, alors φ se prolonge en une fonction pluriharmonique v dans B.

Si G est de mesure totale alors v coincide avec u dans B.

Cette dernière propriété n'est pas valable si $p = 1$. En effet la fonction

$$u(z) = \operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 \qquad z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1$$

a des limites radiales nulles et n'est pas nulle.

3. La technique de démonstration du théorème 1 est assez remarquable. Aleksandrov montre qu'on peut approcher φ, par des fonctions pluriharmoniques au voisinage de $\overline{B}$, pour la distance de $L^{1/2}(\partial B)$. Il obtient la mesure $\varphi d\sigma - d\nu$ comme limite vague de fonctions pluriharmoniques.

THEOREME [Hakim-Sibony]. Soit φ une fonction continue positive sur ∂B. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U de mesure totale sur ∂B et une fonction f bornée, holomorphe au voisinage de $B \cup U$ vérifiant

$$f(0) = 0 \quad , \quad \big||f| - \varphi\big| < \varepsilon \quad \text{sur} \quad U.$$

Remarques

1. Si $\varphi = 1$ on trouve par restriction à ∂B une fonction f réelle analytique sur U, ouvert de mesure totale telle que

$$Df = 0 \quad , \quad \frac{1}{2} \leq |f| \leq 1$$

mais $D(1/f) \neq 0$. Ici D désigne un opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel.

2. La structure du compact $F = \partial B \setminus U$ est assez compliquée. Il est facile de vérifier que l'enveloppe polynomialement convexe de F contient un ouvert de B. Par exemple si $\varphi = 1$, $\hat{F}$ contient l'ouvert où $|f| < 1-\varepsilon$.

On déduit de résultats de Harvey-Polking [5] que la dimension de Hausdorff d'un tel F est supérieure ou égale à $2p-2$.

3. L'idée de la démonstration est assez simple. Posons

$$u(z) = e^{-n(1-\langle z,\zeta\rangle)}$$

où $\zeta \in \partial B$, $\langle z,\zeta\rangle = \sum_{i=1}^{p} z_i \bar{\zeta}_i$. On a $u(\zeta) = 1$ et $|u|$ est petit en dehors d'un voisinage de ζ sur ∂B. On construit f comme somme de telles fonctions

$$f(z) = \sum_j \alpha_j e^{-n_j(1-\langle z,\zeta_j\rangle)}$$

pour des $\zeta_j \in \partial B$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $n_j \in \mathbb{N}$ convenablement choisis.

4. L'existence de fonctions $f \in H^\infty(B)$ non constantes telles que $|f^*| = 1$ p. p. sur ∂B, peut être formulée indépendamment de la mesure de Lebesgue σ. En effet la transformée de Gelfand $\hat{f}$ d'une telle fonction f est de module 1 sur la frontière de Shilov de l'algèbre $H^\infty(B)$.

5. E Löw [6], [7] a montré qu'on pouvait construire des fonctions intérieures à partir du théorème 2. Il a également généralisé les constructions précédentes à des domaines strictement pseudoconvexes.

Pour des résultats sur le même thème voir également [1], [2], [3], [4], [7].

Signalons enfin le théorème suivant qui reprend des résultats de [1], [3] et [7].

Désignons par $A(B)$ l'algèbre des fonctions continues sur $\overline{B}$, holomorphe dans B.

THEOREME ([3]). Soit Φ une fonction s.c.i. ≥ 0 intégrable sur ∂B. Soit f une fonction de $A(B)$. On suppose qu'il existe $h \in A(B)$, $h \not\equiv 0$ telle que

$$|f| + |h| \leq \Phi \quad \text{p. p. sur} \quad \partial B.$$

Alors pour toute fonction $g \in A(B)$, $g \not\equiv 0$, il existe une fonction λ holomorphe dans B telle qu'on ait

$$|f + \lambda g|(z) \leq P[\varphi d\sigma](z)$$

pour tout $z \in B$ et

$$|f + \lambda^* g|(z) = \varphi(z) \quad \text{p. p. sur} \quad \partial B.$$

[1] ALEKSANDROV, A. B. Existence des fonctions internes dans la boule. Mat. Sornik (1982), 147-163 (en russe).

[2] HAKIM, M. et SIBONY, N. Fonctions holomorphes bornées sur la boule unité de C^p. Invent. Math. 67 (1982), 213-222.

[3] HAKIM, M. et SIBONY, N. Valeurs au bord des modules de fonctions holomorphes. Math. Ann. (à paraître).

[4] HAKIM, M. et SIBONY, N. Fonctions holomorphes bornées et limites tangentielles. Duke Math. Journal 50 (1983), 133-141.

[5] HARVEY, R. et POLKING, J. Removable singularities of solutions of linear partial differential equations. Acta Math. 125 (1970), 39-56.

[6] LÖW, E. A construction of inner functions on the unit ball in C^p. Invent. Math. 67 (1982), 223-229.

[7] LÖW, E. Inner functions and boundary values in $H^\infty(\Omega)$ and $A(\Omega)$ in smoothly bounded pseudo-convex domains. Ph. D., Princeton Univ., June 1983.

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU CNRS (296)
ANALYSE HARMONIQUE
MATHÉMATIQUE (Bât. 425)
91405 ORSAY CEDEX