

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

H. ATTOUCH

## **Théorie de la $\Gamma$ -convergence. Applications à des inéquations variationnelles de la mécanique**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1982-1983), exp. n° 20,  
p. 1-25

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1982-1983\\_\\_\\_A20\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1982-1983___A20_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1982-1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

---

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 2 - 1 9 8 3

THEORIE DE LA  $\Gamma$ -CONVERGENCE. APPLICATIONS  
A DES INEQUATIONS VARIATIONNELLES DE LA MECANIQUE.

par H. ATTOUCH



INTRODUCTION

On se propose d'introduire un nouveau concept de convergence en analyse : l'épigraphe-convergence ou, de façon condensée, l'épi-convergence. Il s'agit d'une notion de convergence pour des suites de fonctions : on parlera de l'épi-convergence de la suite de fonctions  $\{F^\varepsilon : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \mid \varepsilon \rightarrow 0\}$  vers la fonction limite  $F : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  et l'on notera  $F = \lim_{\varepsilon} F^\varepsilon$ .

Cette notion de convergence, étroitement liée à l'étude de la convergence de problèmes de minimisation, répond à la question suivante :

Quelle est la notion de convergence la plus "faible"  $F^\varepsilon \xrightarrow{(\varepsilon \rightarrow 0)} F$  qui entraîne la convergence des minima et des solutions des problèmes de minimisation correspondants

$$\min_{x \in X} F^\varepsilon(x) \rightarrow \min_{x \in X} F(x) \quad \text{lorsque } \varepsilon \text{ tend vers zéro}$$

$$\text{Arg min } F^\varepsilon \rightarrow \text{Argmin } F \quad \text{lorsque } \varepsilon \text{ tend vers zéro}$$

Cette théorie qui s'est développée ces dix dernières années sous l'impulsion de De-Giorgi [10], [11] et son équipe en Italie, R. Wets [18] aux Etats-Unis, H. Attouch [3] et C. Picard [4] en France trouve son champ d'application naturel en optimisation et contrôle, étude de problèmes variationnels...

elle s'applique :

- a) Problèmes d'approximation . Par exemple, en analyse numérique où le paramètre  $\varepsilon$  est lié à la description d'un algorithme numérique : pas de la discrétisation, dimension du sous-espace approximant (Galerkin), méthode de pénalisation, viscosité...
- b) Problèmes de perturbation, de stabilité. Le paramètre  $\varepsilon$  est un paramètre physique (ou économique) "très petit" (ou "très grand") devant les autres données du problème : un paramètre de conductivité, de viscosité, un libre parcours moyen de particule, la période de la structure d'un matériau non homogène, un coût... L'analyse limite (lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) et la description exacte de la fonctionnelle limite  $F$  sont souvent fort délicats et parfois (comme dans cette dernière situation, cf. paragraphe 1, "homogénéisation des matériaux composites", "nuage de glace") hors de portée d'une approche intuitive.

La compréhension de tels processus limites a fortement contribué au développement de la théorie de l'épi-convergence.

L'épi-convergence s'interprète géométriquement, c'est l'origine de la terminologie, comme la convergence des épigraphes (au sens de la convergence d'ensemble). Cette notion est elle même un cas particulier de la théorie de la  $\Gamma$ -convergence qui couvre de nombreuses autres situations, problèmes de points selles, min-sup...

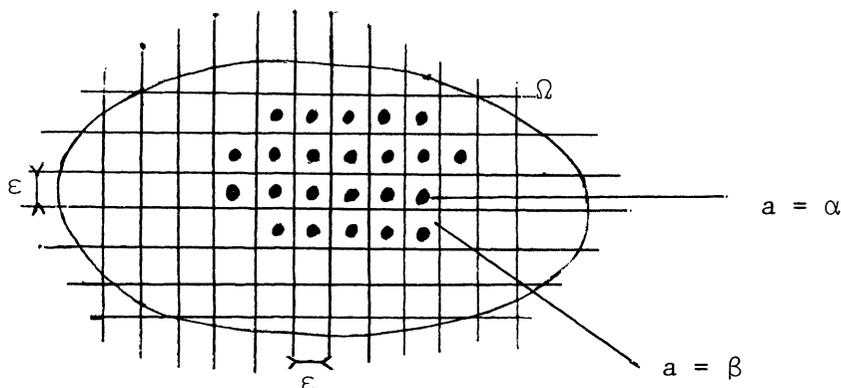
- Plan
1. Exemples modèles
    - 1.1 Homogénéisation de matériaux composites
    - 1.2 "Nuage de glace"
  2. Définition et propriétés de l'épi-convergence
  3. Méthode directe de démonstration par épi-convergence
  4. Méthode de compacité
- Bibliographie.

Comme annoncé, avant de développer les aspects théoriques de l'épi-convergence nous allons décrire deux exemples modèles tirés de la mécanique :

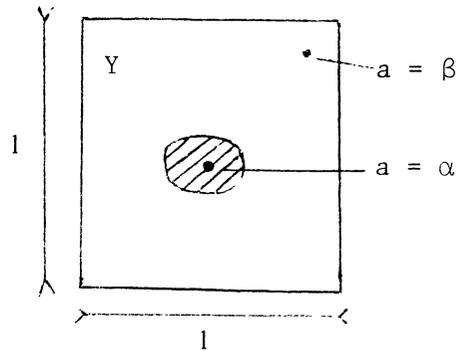
## 1. Exemples modèles

### 1.1 Homogénéisation de matériaux composites

La grande majorité des matériaux utilisés en technologie moderne sont des matériaux composites : bétons, alliages, matériaux poreux... Afin de rendre compte des propriétés mécaniques de tels matériaux à partir de celles de leurs différents constituants on utilise la théorie de l'homogénéisation. Par exemple, cherchons à décrire le potentiel électrostatique (resp. température) dans un matériau obtenu en mélangeant intimement deux matériaux de conductivité électrique (resp. thermique) différents. Le matériau occupe un domaine  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^N$  ( $N = 1, 2, 3$ ).



Par simplicité, supposons la structure périodique, de période  $\varepsilon$  dans chaque direction, le fait que  $\varepsilon$  soit "petit" devant la taille de  $\Omega$  traduisant le fait que les deux matériaux sont intimement mélangés. Le coefficient de conductivité  $a_\varepsilon(\cdot)$  (on suppose les matériaux isotropes) oscille donc rapidement avec période  $\varepsilon$  entre  $\alpha$  et  $\beta$ , valeurs respectives des coefficients de conductivité des deux constituants. Afin de décrire précisément  $a_\varepsilon$  on introduit la fonction définie sur la maille unité  $Y = (0,1)^N$  de  $\mathbb{R}^N$  par



et étendue par  $Y$ -périodicité à  $\mathbb{R}^N$  tout entier ; on a donc  $a_\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ .

Pour toute distribution  $u$  de potentiel, l'énergie emmagasinée par le matériau est

$$F^\varepsilon(u) = \int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) |\text{grad} u|^2 dx \quad u \in H^1(\Omega)$$

En présence d'une densité de charges  $f$ , le potentiel d'équilibre  $u_\varepsilon$  est solution du problème de minimisation (on relie le bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  à la terre, ie  $u_\varepsilon = 0$  sur  $\partial\Omega$ )

$$\text{mim}_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ F^\varepsilon(u) - \int_{\Omega} f u dx \right\}$$

L'équation d'Euler correspondante est

$$\begin{cases} -\text{div} \left( a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{grad} u_\varepsilon \right) = f & \text{sur } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Pour tout  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\varepsilon > 0$ , la solution  $u_\varepsilon$  de ce problème est bien définie, mais le calcul numérique de  $u_\varepsilon$  et donc la description "microscopique" du potentiel est très difficile = elle nécessite une discrétisation dans chaque cellule de taille  $\varepsilon$ , ceci à cause des discontinuités du coefficient de conductivité  $a_\varepsilon$  à la traversée de chaque interface. Afin de tourner cette difficulté, on fait tendre  $\varepsilon$  vers zéro, le problème limite plus simple rendant compte avec une bonne approximation des propriétés macroscopiques du matériau. Plus généralement ;

**THEOREME 1.1** Soit

$$j : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(y, z) \rightarrow j(y, z)$$

vérifiant: a)  $y \rightarrow j(y, z)$  est  $Y$ -périodique, mesurable

b)  $z \rightarrow j(y, z)$  est convexe continue et il existe deux constantes

$$0 < \lambda_0 \leq \Lambda_0 < +\infty \text{ telles que pour tout } (y, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

$$\lambda_0 |z|^2 \leq j(y, z) \leq \Lambda_0 (1 + |z|^2) .$$

Pour tout  $u \in H^1(\Omega)$  on pose

$$F^\varepsilon(u) = \int_{\Omega} j\left(\frac{x}{\varepsilon}, \text{gradu}(x)\right) dx$$

Alors, pour tout  $f \in L^2(\Omega)$

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ F^\varepsilon(u) - \int_{\Omega} fu \right\} \xrightarrow{(\varepsilon \rightarrow 0)} \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ F^{\text{hom}}(u) - \int_{\Omega} fu \right\}$$

avec convergence des solutions des problèmes de minimisations dans  $H_0^1(\Omega)$  faible, où la fonctionnelle limite  $F^{\text{hom}}$  est donnée pour tout  $u \in H^1(\Omega)$  par

$$F^{\text{hom}}(u) = \int_{\Omega} j^{\text{hom}}(\text{gradu}(x)) dx$$

avec, pour tout  $z \in \mathbb{R}^N$

$$(1) \quad j^{\text{hom}}(z) = \min_{\substack{w \in H^1(Y) \\ w \text{ Y-périodique}}} \int_Y j(y, \text{grad}w(y) + z) dy$$

Remarques 1. La fonctionnelle  $F^{\text{hom}}$  apparaît donc comme la fonctionnelle limite de la suite  $\{F^\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\}$ . Dans le paragraphe 3, nous traduirons ce résultat en terme d'épi-convergence :  $F^{\text{hom}} = \lim_e F^\varepsilon$ .

2. La fonctionnelle limite  $F^{\text{hom}}$  est encore une fonctionnelle intégrale, l'intégrande  $j^{\text{hom}}$  dépendant uniquement de  $z$  et non plus de  $x$  : ceci traduit le caractère homogène du matériau limite et justifie la terminologie adoptée "homogénéisation" pour décrire ce processus limite (cf. [6], [16], [17], ...)

3. La fonctionnelle limite  $F^{\text{hom}}$  est différente de la fonctionnelle obtenue en prenant pour chaque  $u$  la limite de  $F^\varepsilon(u)$  ; cela apparaît clairement en prenant des fonctionnelles  $F^\varepsilon$  quadratiques :

$$F^\varepsilon(u) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Alors,

$$F^{\text{hom}}(u) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^{\text{hom}} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx$$

où les coefficients homogénéisés  $a_{ij}^{\text{hom}}$  sont donnés par les formules :

$$(2) \quad a_{ij}^{\text{hom}} = \int_Y \left\{ a_{ij}(y) - \sum_{k=1}^N a_{ik}(y) \frac{\partial \chi^j}{\partial y_k}(y) \right\} dy$$

où  $\chi^j$  est solution du problème variationnel (1) avec  $z = (0, \dots, \underset{j^{\text{ième}} \text{ rang}}{1}, 0, \dots, 0)$ .

La fonctionnelle limite simple des  $F^\varepsilon$  a pour coefficients de conductivité les moyennes  $\int_Y a_{ij}$  qui d'après (2) ne sont pas les bons coefficients décrivant le comportement macroscopique du matériau.

Dans la situation initialement décrite

$$F^\varepsilon(u) = \int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) |\text{gradu}|^2 dx$$

on observe que le caractère isotrope des fonctionnelles n'est pas conservé

$$(a_{ij}^{\text{hom}})_{ij} \neq a \cdot (\delta_{ij})_{ij} \quad \delta_{i,j} = \text{symbole de Kronecker}$$

ceci étant en accordance avec l'intuition physique : si l'inclusion  $\alpha$  n'est pas sphérique le comportement du matériau limite va différer suivant la direction choisie. Par contre, prendre la limite simple des  $F^\varepsilon$  préserve le caractère isotrope ce qui conforte le point de vue

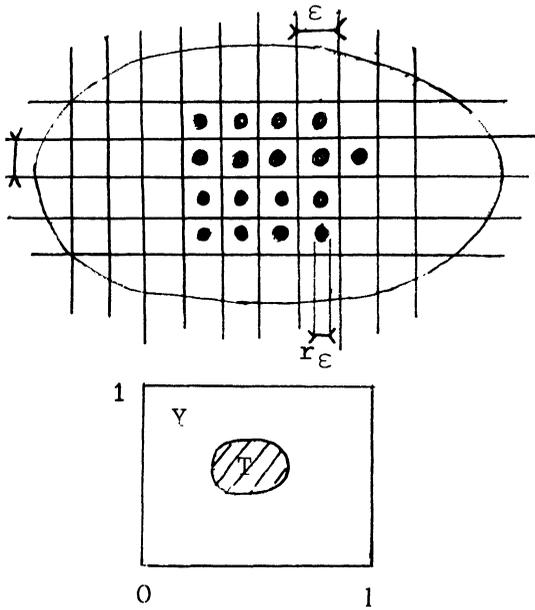
$$\lim_{\varepsilon} F^\varepsilon \neq \text{limite simple } F^\varepsilon, \quad \text{en général !}$$

4. La description de la fonctionnelle limite comporte la résolution de problèmes variationnels auxillaires (1) (resp(2)) ce qui justifie le qualificatif de "convergence variationnelle" attribué à l'épi-convergence ([3]).

## 1.2 Le "nuage de glace"

Supposons qu'un nuage occupant un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  soit constitué par de nombreux petits glaçons en suspension dans une atmosphère saturée d'eau (cf.[15]). On cherche à décrire la température à l'intérieur du nuage en fonction de la densité de glaçons. Comme dans la situation précédente, on suppose la structure du nuage périodique, de sorte que dans chaque maille  $\varepsilon Y$  de taille  $\varepsilon$  se trouve un unique "glaçon" de taille  $r_\varepsilon$ .

De façon précise, on se donne une configuration de base, soit  $T$  fortement incluse dans  $Y$ , et l'on reporte dans chaque maille de taille  $\varepsilon$



un  $r_\varepsilon$  homothétique  $(r_\varepsilon^T)_i$  de  $T$ . Le paramètre  $r_\varepsilon$  décrit alors la densité de glaçons dans le nuage. On pourrait penser, que le comportement limite du nuage vis à vis de l'équation de la chaleur dépend du volume occupé par les glaçons soit :

$\frac{|\Omega|}{\varepsilon^3} \cdot r_\varepsilon^3 = |\Omega| \cdot \left(\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon}\right)^3$ , la taille critique  $r_\varepsilon^c$  séparant les différentes situations étant de l'ordre de  $\varepsilon$ .

En fait, cet argument ne donne pas la bonne taille critique. On pourrait penser alors que ce qui intervient véritablement dans l'analyse limite de ce problème c'est la surface de contact entre les glaçons et le fluide soit :

$$\frac{|\Omega|}{\varepsilon^3} \times \pi r_\varepsilon^2 \text{ ce qui donnerait comme taille critique } r_\varepsilon^c = \varepsilon^{3/2}.$$

Ce n'est toujours pas la véritable taille critique qui est en fait égale à  $r_\varepsilon^c = \varepsilon^3$ . Son interprétation, comme nous le verrons dans le paragraphe 3, repose sur l'étude de l'énergie emmagasinée dans chaque petite cellule (l'énergie étant donnée par l'intégrale de Dirichlet  $\int |\text{gradu}(x)|^2 dx$ , où  $u$  est la température) et relève donc d'arguments de théorie du potentiel.

Notons  $T_\varepsilon = U(r_\varepsilon^T)_i$  l'ensemble formé par tous les glaçons et où la température  $u_\varepsilon(\cdot)$  vaut donc zéro. Désignant par  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus T_\varepsilon$  le fluide (supposé isotrope de conductivité thermique 1)  $u_\varepsilon$  satisfait à l'équation de la chaleur stationnaire :

$$(3)_\varepsilon \quad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \end{cases}, \text{ + condition limite sur } \partial\Omega.$$

(la condition aux limites sur le bord fixe  $\partial\Omega$  n'intervient pas dans l'analyse limite).

**THEOREME 1.2** Soit  $f \in L^2(\Omega)$  et  $\{u_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$  la suite des solutions des problèmes  $(3)_\varepsilon$ . Le comportement de la suite  $\{u_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$  dépend du rapport  $\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3}$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

a) si  $r_\varepsilon \ll \varepsilon^3$ , les glaçons sont "petits" et disparaissent complètement dans le problème limite :  $u_\varepsilon \rightarrow u$  dans  $H^1(\Omega)$  fort où  $u$  est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ \text{+ condition limite sur } \partial\Omega \end{cases}$$

b) Si  $r_\varepsilon \gg \varepsilon^3$ , les glaçons sont "gros" et le nuage se comporte à la limite comme un bloc de glace solidifié :

$$u_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ fort .}$$

c) Si  $r_\varepsilon \sim \varepsilon^3$ , il y a apparition d'un terme nouveau dans l'équation limite :

$u_\varepsilon \rightarrow u$  dans  $H^1(\Omega)$  faible où  $u$  est solution de :

$$(4) \quad \begin{cases} -\Delta u + Cu = f & \text{dans } \Omega \\ + \text{condition limite sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$C$  désignant un nombre réel positif qui est en fait égal à la capacité de  $T$  dans  $\mathbb{R}^3$

$$C = \min \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} |\text{grad } w(x)|^2 dx \quad / \quad w = 1 \text{ sur } T \right\} .$$

Commentaires :

L'interprétation du terme  $Cu$  dans l'équation limite (appelé parfois "terme étrange" est assez naturelle lorsque l'on formule les problèmes sous forme variationnelle :  $u_\varepsilon$  minimise sur  $H^1(\Omega)$  la fonctionnelle

$$F^\varepsilon(u) = \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx + I_{K_\varepsilon}(u) \text{ avec } K_\varepsilon = \{u \in H^1(\Omega) / u = 0 \text{ sur } T_\varepsilon\}$$

où  $I_K$  désigne la fonction indicatrice du convexe fermé  $K$

$$I_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K \\ +\infty & \text{si } u \notin K \end{cases}$$

On note alors, introduisant  $a_\varepsilon : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  la fonction qui vaut  $+\infty$  sur  $T_\varepsilon$ , zéro sur  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus T_\varepsilon$ , que

$$I_{K_\varepsilon}(u) = \int_{\Omega} a_\varepsilon(x) u^2(x)$$

En terme de convergence de fonctionnelles (au sens de l'épi-convergence, cf. paragraphe 3) le théorème 2 s'interprète alors sous la forme :

$$\lim_e F^\varepsilon = F$$

où

$$F^\varepsilon(u) = \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx + \int_{\Omega} a_\varepsilon(x) u^2 dx \quad \text{et}$$

$$F(u) = \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx + C \int_{\Omega} u^2 dx$$

avec  $C = 0, \text{Cap } T, +\infty$  suivant que  $r_\varepsilon \ll \varepsilon^3, r_\varepsilon \sim \varepsilon^3, r_\varepsilon \gg \varepsilon^3$ .

La fonctionnelle  $C \int u^2$  est par nature donc de même type que les fonctionnelles contraintes  $I_{K_\varepsilon}$ . Le fait qu'elle prenne des valeurs finies justifie la terminologie "relaxation de la contrainte" utilisée pour d'écrire ce type de phénomène.

## 2. Définitions et propriétés de l'épi-convergence.

Dans tout ce qui suit, la seule structure utilisée est topologique.

Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique et  $\{F^\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\}$ ,  $F$  une suite de fonctions de  $(X, \tau)$  à valeurs dans  $\bar{\mathbb{R}}$ .

DEFINITION 2.1 On dira que la suite  $\{F^\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\}$   $\tau$ -épi-converge vers  $F$  au point  $u$  si les deux propositions suivantes (i) et (ii) sont satisfaites :

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) Il existe une suite } \{u_\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\} \text{ convergeant vers } u \text{ dans } (X, \tau) \text{ telle que} \\ \quad \{F^\varepsilon(u_\varepsilon); \varepsilon \rightarrow 0\} \text{ converge vers } F(u). \\ \text{(ii) Pour toute suite } \{u_\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\} \text{ convergeant vers } u \text{ dans } (X, \tau), F(u) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(u_\varepsilon) \end{array} \right.$$

On note alors  $F(u) = (\tau\text{-}\lim_{\varepsilon} F^\varepsilon)(u)$  ou plus simplement  $F(u) = (\lim_{\varepsilon} F^\varepsilon)(u)$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la topologie  $\tau$  mise sur  $X$ .

Lorsque  $F(u) = (\tau\text{-}\lim_{\varepsilon} F^\varepsilon)(u)$  est vérifié en tout point  $u$  de  $X$  on dira que la suite  $\{F^\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\}$   $\tau$ -épi-converge vers  $F$  et l'on notera :

$$F = \tau\text{-}\lim_{\varepsilon} F^\varepsilon$$

On peut formuler de façon équivalente (i) et (ii) sous une forme plus symétrique :

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)_{bis} } \exists u_\varepsilon \xrightarrow{\tau} u \text{ telle que } F(u) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(u_\varepsilon) \\ \text{(ii) } \forall u_\varepsilon \xrightarrow{\tau} u \quad F(u) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(u_\varepsilon) \end{array} \right. .$$

Insistons sur le fait que la formulation de l'épi-convergence nécessite 2 phrases ! Vérifions tout d'abord que l'épi-convergence est bien une "convergence variationnelle", à savoir, elle permet de passer à la limite sur des problèmes variationnels (en l'occurrence des problèmes de minimisation) et elle est stable relativement à une classe suffisamment large de perturbations (ce qui dans les exemples précédents traduit le fait que les résultats de convergences sont valables quel que soit le second membre  $f$  pris dans  $L^2(\Omega)$ ).

**THEOREME 2.2** Soit  $F^\varepsilon, F : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une suite de fonctions. Supposons qu'il existe un ensemble  $K$  inclus dans  $X$ , relativement compact pour une topologie  $\tau$  sur  $X$  tel que :

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0 \quad \inf_{u \in X} F^\varepsilon(u) = \inf_{u \in K} F^\varepsilon(u)$$

Alors  $F = \tau\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon$  entraîne

$$\inf_{u \in X} F^\varepsilon(u) \xrightarrow{(\varepsilon \rightarrow 0)} \min_{u \in K} F(u)$$

et, si  $\{u_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$  désigne une suite dans  $X$  telle que pour tout  $\varepsilon$ ,  $u_\varepsilon$  minimise  $F^\varepsilon$  (ou plus généralement telle que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{F^\varepsilon(u_\varepsilon) - \inf F^\varepsilon\} = 0$ ), alors toute  $\tau$ -valeur d'adhérence  $u$  de la suite  $\{u_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$  minimise  $F$ .

La démonstration du théorème ci-dessus est simple et illustre bien comment la topologie  $\tau$  intervient : on se donne donc une suite minimisante

$$\{u_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\} \text{ i.e. } F^\varepsilon(u_\varepsilon) \leq F^\varepsilon(v) \quad \text{pour tout } v \in X.$$

La démarche naturelle consiste à tirer de ces inégalités des estimations sur la suite  $\{u_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$ , en utilisant par exemple les propriétés de "coercivité" (uniforme en  $\varepsilon$ ) des fonctionnelles  $F^\varepsilon$ .

De ces estimations, on dérive alors une propriété de relative compacité de la suite  $\{u_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$  pour une certaine topologie  $\tau$  (par exemple en utilisant un théorème d'injection compacte du type  $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ , situation correspondant aux exemples précédents).

La topologie  $\tau$  n'est donc pas donnée à priori. Elle s'introduit naturellement par l'étude (cas par cas) des propriétés de compacité des suites minimisantes.

La propriété de  $\tau$ -épi convergence permet alors de passer à la limite ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Avec les notations de la définitions 2.1

$$F^\varepsilon(u_\varepsilon) \leq F^\varepsilon(v_\varepsilon)$$

où pour tout  $v \in X$ ,  $\{v_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$  désigne une suite approximante vérifiant (i).

La phrase (i) permet de passer à la limite sur le membre de droite, la phrase (ii) sur le membre de gauche, et désignant par  $u$  une valeur d'adhérence pour la topologie  $\tau$  de  $X$ , on obtient

$$F(u) \leq F(v) \text{ pour tout } v \in X, \text{ i.e. } F(u) = \min_{v \in X} F(v).$$

Le théorème suivant est lui aussi une conséquence immédiate de la définition de l'épi-convergence et complète l'aspect "convergence variationnelle" :

THEOREME 2.3 Soit  $F^\varepsilon, F : (X, \tau) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  telle que  $F = \tau\text{-}\lim_e F^\varepsilon$ .

Alors pour toute fonction  $G$  continue de  $(X, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$  on a

$$F + G = \tau\text{-}\lim_e (F^\varepsilon + G)$$

Une question naturelle concernant tout nouveau concept de convergence consiste à le comparer aux notions classiques :

Dans la phrase (i) de la définition 2.1, on exige moins que dans la convergence simple alors que dans la phrase (ii) c'est l'inverse : en général, ces deux notions  $\tau$ -epi convergence et convergence simple sont non comparables ! On peut exhiber des exemples relativement élémentaires (prenant  $X = \mathbb{R}$ ,  $\tau$  la topologie usuelle) de suites de fonctions epi-convergentes et non simplement convergentes et vice-versa (cf.[3]).

Il y a cependant un cas très important où ces deux notions coïncident : c'est celui de la convergence monotone :  $F^\varepsilon \uparrow F$ ,  $F^\varepsilon \downarrow F$  (cf.[5]). Ceci explique le succès de toutes les méthodes d'approximation monotone en optimisation : pénalisation, Yosida approximation, méthode barrière, viscosité, Galerkin....

Lorsque la suite  $F^\varepsilon$  est  $\tau$ -epi convergente, sa limite  $\tau\text{-}\lim_e F^\varepsilon$ , c'est une conséquence de la définition 2.1, est donnée pour tout  $u \in X$  par la formule

$$(5) \quad (\tau\text{-}\lim_e F^\varepsilon)(u) = \min\{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(u_\varepsilon) \mid u_\varepsilon \rightarrow u\}$$

Prenant pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $F^\varepsilon = F$  on obtient

$$(\tau\text{-}\lim_e F)(u) = \min\{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(u_\varepsilon) \mid u_\varepsilon \rightarrow u\}$$

i.e.  $\tau\text{-}\lim_e F$  est égale à la régularisée semi-continue inférieure de  $F$  pour  $\tau$ . La théorie de l'epi-convergence contient donc comme cas particulier le problème de la détermination de la régularisée sci. d'une fonction  $F$ , qui est l'un des problèmes-clefs en calcul des variations.

Plus généralement, on peut montrer que si une suite  $\{F^\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\}$   $\tau$ -epi converge sa limite est nécessairement  $\tau$ -sci.

Ce type de propriétés justifie le terme générique de  $\Gamma$ -convergence utilisé pour désigner de telles convergences, le symbole  $\Gamma$  désignant de façon standard l'opération de régularisation sci.

Il nous reste à donner l'interprétation géométrique de l'épi-convergence :

nous rappelons qu'étant donnée une fonction  $F : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  on désigne par

$$\text{epi } F = \{(u, \lambda) \in X \times \mathbb{R} / \lambda \geq F(u)\}$$

l'épigraphe de  $F$ , qui est donc un sous-ensemble de  $X \times \mathbb{R}$ . L'espace  $X$  étant muni d'une topologie  $\tau$  on munit l'espace  $Y = X \times \mathbb{R}$  de la topologie produit  $\sigma = \tau \times d$  (où  $\mathbb{R}$  est muni de la topologie usuelle  $d$ ).

D'autre part, suivant Kurakowski, on dira qu'une suite  $\{C^\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\}$  de parties (quelconques) d'un espace topologique  $(Y, \sigma)$  converge vers une partie  $C$  de  $Y$  si

$$\text{Lim sup}_{\varepsilon \rightarrow 0} C^\varepsilon \subset C \subset \text{Lim inf}_{\varepsilon \rightarrow 0} C^\varepsilon$$

où  $\text{Lim sup}_{\varepsilon \rightarrow 0} C^\varepsilon = \{y \in Y / \text{il existe une suite extraite } \varepsilon_\nu \text{ et } y_\nu \in C^{\varepsilon_\nu} \text{ pour tout } \nu \text{ telle que } y_\nu \rightarrow y\}$ .

$\text{Lim inf}_{\varepsilon \rightarrow 0} C^\varepsilon = \{y \in Y / \text{il existe une suite } y_\varepsilon \text{ telle que } y_\varepsilon \in C^\varepsilon \text{ pour tout } \varepsilon \text{ et } y_\varepsilon \rightarrow y\}$ .

On a alors  $C = \text{Lim sup}_{\varepsilon \rightarrow 0} C^\varepsilon = \text{Lim inf}_{\varepsilon \rightarrow 0} C^\varepsilon$  et l'on note  $C = \text{Lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} C^\varepsilon$  ( $C = \sigma\text{-Lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} C^\varepsilon$  pour expliciter la topologie  $\sigma$ ).

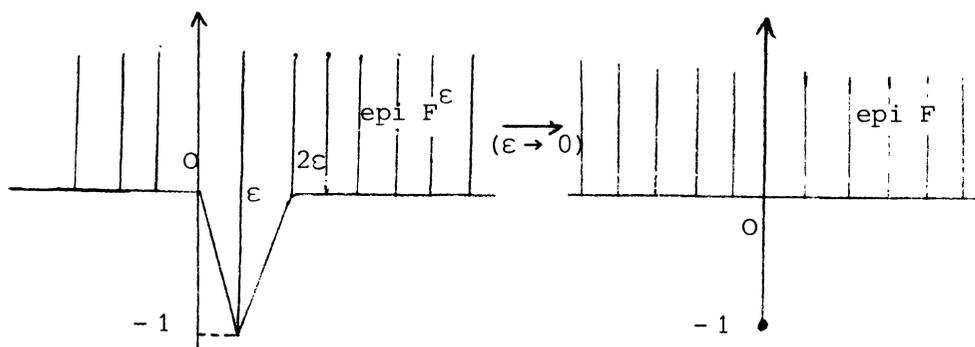
**THEOREME 2.4** Soit  $\{F^\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\}$ ,  $F : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une suite de fonctions de  $X$  à valeurs dans  $\bar{\mathbb{R}}$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $F = \tau\text{-lim}_e F^\varepsilon$
- (ii)  $\text{Epi } F = \text{Lim}(\text{Epi } F^\varepsilon)$

Cette dernière convergence étant prise au sens de Kuratowski dans  $Y = X \times \mathbb{R}$  muni de la topologie produit de  $\tau$  par la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ .

Ce dernier théorème rattache donc la théorie de l'épi-convergence à la notion de convergence d'ensemble, ce qui donne une idée du champ d'application très vaste de cette théorie en direction des multifonctions, inclusions différentielles, gradients généralisés...

On remarque que l'égalité  $\text{Epi } F = \text{Lim}(\text{Epi } F^\varepsilon)$ , est équivalente aux deux inclusions  $\text{Epi } F \subset \text{Lim inf}(\text{Epi } F^\varepsilon)$  et  $\text{Epi } F \supset \text{Lim sup}(\text{Epi } F^\varepsilon)$  dont la traduction donne respectivement les phrases (i) et (ii) définissant l'épi-convergence (Def. 2.1). L'exemple suivant illustre ces considérations géométriques :



$$X = \mathbb{R} \quad , \quad F = \lim_e F^\varepsilon \quad \text{avec} \quad F^\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 2\varepsilon \\ 0 & x \leq 0 \\ \text{affine sur} & (0, \varepsilon) \text{ et } (\varepsilon, 2\varepsilon) \\ \text{avec} & F^\varepsilon(\varepsilon) = -1 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On constate que la limite simple des  $F^\varepsilon$  est la fonction identiquement nulle dont le minimum 0 est strictement supérieur à

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\inf F^\varepsilon) = -1!$$

La bonne fonction limite  $F$  est celle dont l'épigraphe est obtenu en prenant la limite (au sens de la convergence d'ensembles) des épigraphes des  $F^\varepsilon$  : ici on obtient l'ensemble  $\{y \geq 0\} \cup \{(0, y) ; y \in [-1, 0]\}$  qui est l'épigraphe de la fonction  $F$  nulle partout sauf en zéro, avec  $F(0) = -1$ , on a bien alors  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\inf F^\varepsilon) = \inf F!$

Notons au passage que toutes les propriétés précédentes établies pour les problèmes de minimisation se traduisent de façon automatique pour les problèmes de maximisation en remplaçant  $F$  par  $-F$  : on obtient alors la théorie de l'hypo-convergence, en remplaçant épigraphe par hypographe, sci par scs...

Une autre propriété qui rend l'épi-convergence d'un emploi très souple est le fait que dans de nombreuses situations ( $(X, \tau)$  localement compact par exemple...) l'épi-convergence est attachée à une topologie (cf. applications en optimisation stochastique [3]).

Un paragraphe spécial (paragraphe 4) est consacré aux liens entre la compacité et l'épi-convergence.

Dans le cadre convexe, une propriété fondamentale de l'épi-convergence est de rendre continue la transformation de Young-Fenchel,  $F \rightarrow F^*$  où  $F^*(u^*) = \sup_{u \in X} \{ \langle u^*, u \rangle - F(u) \}$ ,  $u^* \in X^*$ .

De façon précise,  $X$  étant supposé réflexif, l'épi-convergence de la suite  $F^\varepsilon$  vers  $F$  pour la topologie faible (resp. forte) de  $X$  entraîne l'épi-convergence de la suite  $F^{\varepsilon*}$  vers  $F^*$  pour la topologie forte (resp.

faible) de  $X^*$ . Les topologies fortes et faibles sont donc échangées ! Ceci justifie l'introduction d'une nouvelle notion de convergence, appelée convergence au sens de Mosco [13], qui n'est autre que l'épi-convergence pour la topologie forte et faible de  $X$ . D'après la définition 2.1 ,

$$\begin{array}{c}
 F^\varepsilon \rightarrow F \text{ au sens de Mosco ssi., en chaque } u \in X , \\
 \Updownarrow \\
 \exists u_\varepsilon \rightarrow u \text{ dans } X \text{ fort telle que } F^\varepsilon(u) \rightarrow F(u) \\
 \forall u_\varepsilon \rightarrow u \text{ dans } X \text{ faible, } F(u) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(u_\varepsilon).
 \end{array}$$

L'application  $F \mapsto F^*$  est alors bicontinue pour la topologie associée à la convergence au sens de Mosco.

D'autre part, la correspondance  $F \mapsto \partial F$  (où  $\partial F$  dénote le sous-différentiel de  $F$ ) est bicontinue lorsque l'on met sur les fonctionnelles  $F$  la topologie de la convergence au sens de Mosco et sur les opérateurs la topologie de la convergence des graphes (où ce qui revient au même, convergence des résolvantes, cf. T. Kato, H. Brézis...). Ces derniers points établissent le lien naturel en la théorie de l'épi-convergence et les E.D.P., semi-groupes... (cf [3] pour plus amples développements).

### 3. Méthode directe de démonstration par épi-convergence :

Rappelons (cf. (5)) que lorsque la suite  $\{F^\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\}$  épi-converge en  $u$ , sa limite est donnée par la formule

$$(\tau\text{-}\lim_e F^\varepsilon)(u) = \min\{\lim_\varepsilon F^\varepsilon(u_\varepsilon) / u_\varepsilon \xrightarrow{\tau} u\} .$$

Dans tous les cas, la démonstration de l'épi-convergence par méthode directe se ramène à la recherche pour tout  $u \in X$ , d'une suite  $u_\varepsilon \xrightarrow{\tau} u$  réalisant, parmi toutes les suites  $\tau$ -convergentes vers  $u$ , le minimum de  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(u_\varepsilon)$ .

La détermination explicite pour un  $u$  quelconque d'une telle suite est souvent fort délicate. Examinons les deux exemples modèles :

Exemple 1 : Homogénéisation de matériaux composites : Démontrons le théorème 1.1 à savoir l'épi-convergence de la suite de fonctionnelles  $\{F^\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\}$  où

$$F^\varepsilon(u) = \int_{\Omega} j\left(\frac{x}{\varepsilon}, \text{grad} u(x)\right) dx .$$

Les fonctionnelles étant uniformément coercives sur  $H_0^1(\Omega)$ , les suites minimisantes correspondantes sont bornées dans  $H_0^1(\Omega)$  et donc relativement compactes pour  $\tau =$  topologie forte de  $L^2(\Omega)$  (on pourrait prendre aussi bien la topologie faible de  $H_0^1(\Omega)$ ). Il s'agit donc de montrer, compte-tenu du théorème 2.2 que

$$F^{\text{hom}} = \tau\text{-}\lim_e F^\varepsilon$$

i.e.  $\underline{u \in H^1(\Omega)} \quad F^{\text{hom}}(u) = (\tau\text{-}\lim_e F^\varepsilon)(u) .$

Procédons par étapes :

1°/  $u$  affine

2°/  $u$  affine par morceaux

3°/  $u$  fonction quelconque de  $H^1(\Omega)$ .

Nous allons décrire en détail l'étape numéro un, indiquant juste la méthode pour passer de 1°/ à 2°/ puis de 2°/ à 3°/.

Pour tout  $z \in \mathbb{R}^N$ , introduisons  $w_z \in H^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $Y$ -périodique, une solution du problème de minimisation

$$\min \begin{cases} w \in H^1(Y) \\ w \text{ } Y\text{-périodique} \end{cases} \int_Y j(y, \text{grad } w(y) + z) dy .$$

Rappelons que la valeur de ce minimum est précisément que ce nous avons noté  $j^{\text{hom}}(z)$ . Par conséquent

$$(6) \quad j^{\text{hom}}(z) = \int_Y j(y, \text{grad } w_z(y) + z) dy$$

et  $w_z$  satisfait l'équation d'Euler

$$(7) \quad -\text{div } \partial j(y, \text{grad } w_z(y) + z) = 0$$

où  $\partial j(y, \cdot)$  désigne le gradient (où plus généralement le sous-différentiel) de la fonction convexe continue  $j(y, \cdot)$ .

1°/ Etant donnée  $u$  affine, de pente  $z \in \mathbb{R}^N$ , i.e.  $u(x) = \langle x, z \rangle + \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) prenons  $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon w_z(\frac{x}{\varepsilon})$ . Vérifions les points (i) et (ii) de la définition 2.1 de l'épi-convergence :

i) Il est clair que la suite  $\{u_\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\}$  converge vers  $u$  dans  $L^2(\Omega)$ . D'autre part,

$$\begin{aligned} F^\varepsilon(u_\varepsilon) &= \int_\Omega j\left(\frac{x}{\varepsilon}, \text{grad } u_\varepsilon(x)\right) dx \\ &= \int_\Omega j\left(\frac{x}{\varepsilon}, z + \text{grad } w_z\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) dx. \end{aligned}$$

La fonction  $h(y) = j(y, z + \text{grad } w_z(y))$  étant  $Y$ -périodique, la suite de fonction  $\{h_\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\}$  donnée par  $h_\varepsilon(x) = h(\frac{x}{\varepsilon})$  converge faiblement dans  $L^2(\Omega)$  vers la valeur moyenne de  $h$ . Par conséquent,

$$F^\varepsilon(u_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega dx \int_Y j(y, z + \text{grad } w_z(y)) dy = \int_\Omega j^{\text{hom}}(z) dx$$

cette dernière intégrale étant égale à  $\int_\Omega j^{\text{hom}}(\text{grad } u) dx$ , soit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(u_\varepsilon) = F^{\text{hom}}(u).$$

ii) Montrons que pour toute suite  $v_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\tau} u$  on a

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(v_\varepsilon) \geq F^{\text{hom}}(u).$$

L'idée consiste à comparer  $F^\varepsilon(v_\varepsilon)$  à  $F^\varepsilon(u_\varepsilon)$ , où  $u_\varepsilon$  est décrite ci-dessus, via une inégalité de convexité

$$F^\varepsilon(v_\varepsilon) \geq F^\varepsilon(u_\varepsilon) + R_\varepsilon$$

puis à montrer que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_\varepsilon = 0$ . Il s'en suivra

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(v_\varepsilon) \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(u_\varepsilon) = F^{\text{hom}}(u)$$

On notera que ceci revient bien à montrer que la suite  $\{u_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$  réalise le min de  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(u_\varepsilon)$  parmi toutes les suites convergeant vers  $u$ . Pour ne pas avoir à tenir compte de termes de bord dans les intégrations par parties, introduisons  $\varphi \in D(\Omega)$ ,  $0 \leq \varphi \leq 1$  (puis on fera tendre  $\varphi$  vers  $u_n$ ).

$$\begin{aligned} F^\varepsilon(v_\varepsilon) &= \int_{\Omega} j\left(\frac{x}{\varepsilon}, \text{grad } v_\varepsilon\right) dx \geq \int_{\Omega} \varphi j\left(\frac{x}{\varepsilon}, \text{grad } v_\varepsilon\right) dx \\ &\geq \int_{\Omega} \varphi j\left(\frac{x}{\varepsilon}, \text{grad } u_\varepsilon\right) dx + \int_{\Omega} \varphi \langle \partial j\left(\frac{x}{\varepsilon}, \text{grad } u_\varepsilon\right), \text{grad}(v_\varepsilon - u_\varepsilon) \rangle dx \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(v_\varepsilon) &\geq \int_{\Omega} \varphi j^{\text{hom}}(\text{grad } u) dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} R_\varepsilon \\ \text{avec } R_\varepsilon &= \int_{\Omega} \varphi \langle \partial j\left(\frac{x}{\varepsilon}, \text{grad } u_\varepsilon\right), \text{grad}(v_\varepsilon - u_\varepsilon) \rangle dx. \end{aligned}$$

Pour passer à la limite sur  $R_\varepsilon$  on se heurte à une difficulté de taille, à savoir, il faut passer à la limite sur le produit de deux suites faiblement convergentes dans  $L^2(\Omega)$ ! Cette difficulté se rencontre dans tous les problèmes d'homogénéisation : on peut la lever soit en utilisant des résultats du type compacité par compensation (cf. Murat et Tartar [14], [17]), soit ici en faisant tout simplement une intégration par parties :

Nous allons utiliser le fait que  $u_\varepsilon$  est construite à partir de la solution d'un problème variationnel (1) et vérifie

$$(8) \quad - \text{div } \partial j\left(\frac{x}{\varepsilon}, \text{grad } u_\varepsilon(x)\right) = 0.$$

En effet ceci équivaut à  $-\text{div } \partial j\left(\frac{x}{\varepsilon}, z + \text{grad } w_z\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) = 0$  ds  $\Omega$ , et résulte bien de (7) et de la  $Y$ -périodicité de  $w_z$ .

Intégrant par parties ( $R_\varepsilon$ ) et tenant compte de (8) on obtient

$$R_\varepsilon = - \int_{\Omega} (v_\varepsilon - u_\varepsilon) \langle \partial j\left(\frac{x}{\varepsilon}, \text{grad } u_\varepsilon(x)\right), \text{grad } \varphi \rangle dx.$$

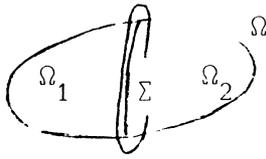
D'où, tenant-compte de la convergence dans  $L^2(\Omega)$  fort de la suite  $\{v_\varepsilon - u_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$  vers zéro et de la bornitude dans  $L^2(\Omega)$  de la suite  $\{\partial j\left(\frac{x}{\varepsilon}, \text{grad } u_\varepsilon\right) ; \varepsilon \rightarrow 0\}$  on obtient  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_\varepsilon = 0$ . Finalement,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(v_\varepsilon) \geq \int_{\Omega} \varphi j^{\text{hom}}(\text{grad } u) dx$$

et, faisant tendre  $\varphi$  vers  $u_n$ , on obtient le résultat.

2°/ On passe ensuite de u affine à u affine par morceaux en utilisant le caractère local des fonctionnelles  $F^\varepsilon$  :

Si  $\text{grad } u \equiv z_1$  sur  $\Omega_1$  et  $\text{grad } u \equiv z_2$  sur  $\Omega_2$  on est tenté de prendre

$$u_\varepsilon = \begin{cases} u_\varepsilon^1(x) = u(x) + \varepsilon w_{z_1}(\frac{x}{\varepsilon}) & \text{sur } \Omega_1 \\ u_\varepsilon^2(x) = u(x) + \varepsilon w_{z_2}(\frac{x}{\varepsilon}) & \text{sur } \Omega_2 \end{cases}$$


Mais les deux fonctions  $u_\varepsilon^1$  et  $u_\varepsilon^2$  ne se raccordent pas sur  $\Sigma$  la frontière commune à  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . On recolle alors de façon continue les deux fonctions

$$u_\varepsilon^\delta = \varphi_\delta u_\varepsilon^1 + (1-\varphi_\delta)u_\varepsilon^2 \quad \text{où} \quad \varphi_\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{dist}(x, \Sigma) \leq \delta \\ 0 & \text{si } \text{dist}(x, \Sigma) \geq 2\delta \end{cases}$$

( $0 \leq \varphi_\delta \leq 1$ ) et tenant compte du fait que le saut entre  $u_\varepsilon^1$  et  $u_\varepsilon^2$  est de l'ordre de  $\varepsilon$  sur  $\Sigma$ , on montre qu'il existe un  $\delta(\varepsilon)$  tel que la suite

$$u_\varepsilon = u_\varepsilon^\delta(\varepsilon) \quad \text{réalise} \quad u_\varepsilon \xrightarrow{\tau} u, \quad F^\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow F^{\text{hom}}(u)$$

et, pour tout  $v_\varepsilon \xrightarrow{\tau} u$ ,  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(v_\varepsilon) \geq F^{\text{hom}}(u)$ .

3°/ On complète alors la démonstration par un argument de densité utilisant précisément le fait que les fonctions affines par morceaux forment un sous-espace dense de  $H^1(\Omega)$  et que la fonctionnelle  $F^{\text{hom}}$  soit continue sur  $H^1(\Omega)$ .

Remarquons pour finir que les résultats ne dépendent pas de l'ouvert  $\Omega$ , ni des conditions limites mises sur  $\Omega$ . Les résultats ont un caractère local, et sont par nature des résultats d'homogénéisation de lois de comportement. La technique de démonstration utilisée ci-dessus est d'un usage très souple et s'étend aisément aux cas du système de l'élasticité linéaire, et à de nombreuses inéquations variationnelles de la mécanique : torsion élastoplastique [2], fissures (ATTOUCH & MURAT à paraître), cavités [3] ...

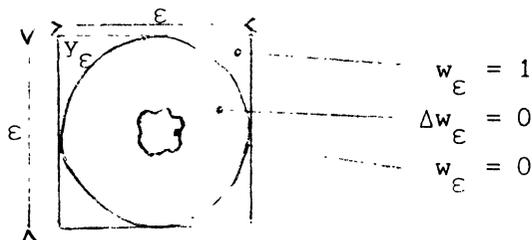
Exemple 2 : Comme dans l'exemple précédent, le théorème 1.2 se ramène à montrer l'épi-convergence pour la topologie  $\tau = L^2(\Omega)$  de la suite  $\{F^\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$

$$F^\varepsilon(u) = \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx + I_{\{u=0 \text{ sur } T_\varepsilon\}}$$

vers

$$F(u) = \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx + C \int_{\Omega} u^2 dx.$$

Introduisons pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $w_\varepsilon$  la solution du problème local :  
 $w_\varepsilon$  minimise  $\int_{Y_\varepsilon} |\text{grad } w|^2 dx$  parmi toutes les fonctions égales à zéro sur  $T_\varepsilon$   
 et égale à 1 sur  $Y_\varepsilon \setminus B_\varepsilon$  où  $B_\varepsilon$  est la boule de diamètre  $\varepsilon$  incluse dans  $Y_\varepsilon = \varepsilon Y$   
 $w_\varepsilon$  vérifie alors



Pour tout  $u \in H^1(\Omega) \cap C(\Omega)$  posons  $u_\varepsilon = u \cdot w_\varepsilon$ .

Calculons ( $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ), ( $w_\varepsilon$  étant étendu par  $\varepsilon$ -périodicité à tout  $\mathbb{R}^3$ ), l'intégrale  
 $\int_\Omega |\text{grad } w_\varepsilon|^2 dx \sim \frac{\text{mes } \Omega}{\varepsilon^3} \min \left\{ \int_{Y_\varepsilon} |\text{grad } w|^2 dy / w = 0 \text{ sur } T_\varepsilon, w = 1 \text{ sur } \partial B_\varepsilon \right\}$ .

Faisant un changement d'échelle et ramenant  $T_\varepsilon$  à la taille unité,

$$(9) \quad \int_\Omega |\text{grad } w_\varepsilon|^2 dx \sim \text{mes } \Omega \cdot \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3} \cdot \min \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} |\text{grad } w|^2 dy / w = 0 \text{ sur } T, w \rightarrow 1 \text{ à } 1^\infty \right\}.$$

Ce qui fait apparaître en fait la taille critique,  $r_\varepsilon^c \sim \varepsilon^3$ , qui sépare les différentes situations ! Traitons le cas critique  $r_\varepsilon \sim \varepsilon^3$ . On a alors que la suite  $\{w_\varepsilon ; \varepsilon \rightarrow 0\}$  reste bornée dans  $H^1(\Omega)$ . Introduisant  $\chi_\varepsilon$  la fonction égale sur chaque  $Y_\varepsilon$  à un sur  $Y_\varepsilon \setminus B_\varepsilon$ , zéro ailleurs,

$$\chi_\varepsilon \cdot (1 - w_\varepsilon) \equiv 0.$$

Comme  $\chi_\varepsilon \rightarrow \theta$  avec  $\theta > 0$  faiblement dans  $L^2(\Omega)$ , toute valeur d'adhérence  $w$  de la suite  $w_\varepsilon$  dans  $L^2(\Omega)$  fort (on utilise le fait que la suite  $w_\varepsilon$  est bornée dans  $H^1(\Omega)$  et donc relativement compacte dans  $L^2(\Omega)$ ) vérifie :  $\theta(1-w) = 0$  et donc  $w = 1$  et

$$(10) \quad w_\varepsilon \rightarrow 1 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort}.$$

Le calcul (9) montre par ailleurs, le calcul étant valable pour tout ouvert régulier de  $\Omega$ , que la suite de mesures  $\mu_\varepsilon = |\text{grad } w_\varepsilon|^2 dx$  converge vaguement vers la mesure  $C dx$  où  $C = \text{Cap}_{\mathbb{R}^3} T$  :

$$(11) \quad \mu_\varepsilon = |\text{grad } w_\varepsilon|^2 dx \rightarrow C dx \text{ vaguement}.$$

Calculons alors  $F^\varepsilon(u_\varepsilon)$ , où l'on a posé  $u_\varepsilon = u \cdot w_\varepsilon$ ,  $u \in H^1(\Omega) \cap C(\Omega)$ .

$F^\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_\Omega |\text{grad } u|^2 w_\varepsilon^2 + 2u \cdot w_\varepsilon \langle \text{grad } u, \text{grad } w_\varepsilon \rangle + u^2 |\text{grad } w_\varepsilon|^2 dx$   
 et donc tenant compte de (10) et (11)

$$F^\varepsilon(u_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |\text{grad } u|^2 dx + C \int_\Omega u^2 = F^{\text{hom}}(u).$$

. L'autre partie de la démonstration qui consiste à montrer que

$$\liminf_{\tau} F^\varepsilon(v_\varepsilon) \geq F^{\text{hom}}(u)$$

pour toute suite  $v_\varepsilon \xrightarrow{\tau} u$  vérifiant  $v_\varepsilon = 0$  sur  $T_\varepsilon$ , est plus délicate.

Comparant  $F^\varepsilon(v_\varepsilon) \geq F^\varepsilon(u_\varepsilon) + R_\varepsilon$

où  $u_\varepsilon = u \cdot w_\varepsilon$ , on se ramène à montrer que

$$(12) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle -\Delta w_\varepsilon, v_\varepsilon - u_\varepsilon \rangle_{(H^{-1}, H_0^1)} = 0$$

difficulté du même type que celle rencontrée dans l'exemple précédent puisque

$$\begin{aligned} -\Delta w_\varepsilon &\rightharpoonup Cdx \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \text{ faible} \\ v_\varepsilon - u_\varepsilon &\rightarrow 0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible.} \end{aligned}$$

Il s'agit de passer à la limite sur le produit de deux suites faiblement convergentes ! Suivant une idée de F. Murat et D. Cioranescu [8] on lève la difficulté en remarquant que  $-\Delta w_\varepsilon = v_\varepsilon - \theta_\varepsilon$  où  $v_\varepsilon$  et  $\theta_\varepsilon$  sont des mesures positives chargeant respectivement les bords des sphères  $B_\varepsilon$  et des trous  $T_\varepsilon$ . Comme  $v_\varepsilon - u_\varepsilon = 0$  sur  $T_\varepsilon$  le produit de dualité  $\langle -\Delta w_\varepsilon, v_\varepsilon - u_\varepsilon \rangle$  est égal en fait à  $\langle v_\varepsilon, v_\varepsilon - u_\varepsilon \rangle$  où  $v_\varepsilon = (-\Delta w_\varepsilon)^+$ . On montre alors que la suite  $\{(-\Delta w_\varepsilon)^+; \varepsilon \rightarrow 0\}$  converge fortement dans  $H^{-1}(\Omega)$  ce qui permet de conclure (12).

On achève la démonstration par un argument de densité, utilisant la densité de  $H^1(\Omega) \cap C(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$  et la continuité de  $F$  sur  $H^1(\Omega)$ .

Remarque : Ce résultat a été étendu à de nombreuses fonctionnelles du calcul des variations : au lieu de  $\int |\text{grad } u|^2 dx$  on peut considérer  $\int |\text{grad } u|^p$  [4],  $\int \sqrt{1 + |\text{grad } u|^2} dx$ ,  $\int |\Delta u|^2 dx$ ... la taille critique dépendant évidemment, ainsi que l'interprétation de la constante, de la fonctionnelle "énergie" considérée. Dans le cas de systèmes, la contrainte  $\{\vec{u} = 0 \text{ sur } T_\varepsilon\}$  est "relaxée" en une fonctionnelle intégrale du type (par exemple lorsque la fonctionnelle énergie est quadratique).

$$G(u) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N c_{ij} u_i u_j dx \quad \text{où } \vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N).$$

#### 4. Méthode de compacité :

Le résultat théorique à la base de la méthode de compacité est le suivant :

**THEOREME 4.1** : Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique à base dénombrable d'ouverts.

De toute suite  $\{F^\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\}$  de fonctions  $F^\varepsilon: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  on peut extraire une sous-suite  $\{F^{\varepsilon_\nu}\}$   $\tau$ -epi-convergente.

Ce théorème de compacité est en fait la traduction en terme d'épi-convergence (via la correspondance entre épi-convergence et convergence d'ensembles établie par le théorème 2.4) du célèbre théorème de compacité de Kuratowski qui peut se formuler ainsi : de toute suite d'ensembles  $\{C^\varepsilon; \varepsilon \rightarrow 0\}$  on peut extraire une sous-suite convergente. Notons que la compacité vient de la compacité de  $\bar{\mathbb{R}}$ , ce qui au niveau des fonctions signifie, par exemple, que la fonction  $F \equiv +\infty$ , peut être une limite, et au niveau des ensembles, qu'il faut admettre  $\emptyset$  comme une limite possible.

Un des grands objectifs de la théorie de l'épi-convergence est d'établir des théorèmes de compacité pour des classes de fonctionnelles du calcul des variations.

Ce type de résultat permet d'aborder de façon incisive :

- le problème de la convergence d'une suite donnée de fonctionnelles : Suivant le schéma général de la méthode de compacité, il suffira alors d'identifier la fonctionnelle limite en utilisant les informations spécifiques à la situation étudiée : homogénéité des fonctionnelles, propriétés d'invariance...
- de nombreuses questions de contrôle optimal, la bonne notion de compacité à utiliser pour montrer l'existence d'un contrôle optimal étant souvent à prendre au sens de l'épi-convergence (cf [3], pour l'existence de "domaine flou" dans un problème de contrôle design du type problème du condensateur).
- des problèmes d'optimisation stochastique (cf [3]).

Énonçons les théorèmes de compacité correspondants aux deux situations étudiées :

**THEOREME 4.2** : (cf [7]) Etant donné  $0 < \lambda_0 \leq \Lambda_0 < +\infty$ , soit

$$F_{\lambda_0, \Lambda_0} = \{F : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+ / F(u) = \int_{\Omega} j(x, \text{grad } u(x)) dx$$

$j(x, z)$  est mesurable en  $x$   
convexe continue en  $z$  et satisfait

$$\lambda_0 |z|^2 \leq j(x, z) \leq \Lambda_0 (1 + |z|^2) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{R}^N, \text{ ppx} \in \Omega \}.$$

Alors la classe  $F_{\lambda_0, \Lambda_0}$  est compacte pour la  $\tau$ -épi-convergence, avec

$\tau =$  topologie forte de  $L^2(\Omega)$ .

Il est bien entendu intéressant d'étudier la compacité de sous-classes de  $F_{\lambda_0, \Lambda_0}$  par exemple des fonctionnelles quadratiques...

Un problème intéressant consiste à étudier la fermeture de la classe des fonctionnelles (cf. Tartar) suivante :

$$\{F / F(u) = \int_{\Omega} a(x) |Du|^2 dx / a \text{ ne prenant que les valeurs } \alpha \text{ et } \beta > 0 \text{ avec}$$

$$\text{mes}\{a(x) = \alpha\} = |\Omega| \cdot \theta$$

$$\text{mes}\{a(x) = \beta\} = |\Omega| \cdot (1 - \theta)\}$$

ce qui revient à supposer que l'on mélange deux matériaux de conductivité  $\alpha$  et  $\beta$  dans la proportion  $(\theta, 1-\theta)$  : on se pose la question de savoir quels sont tous les matériaux que l'on peut obtenir en les mélangeant ?

Le théorème suivant correspond à la situation étudiée dans le "nuage de glace".

THEOREME 4.3 ([3], [4], [9])

$$\text{Soit } \mathcal{F} = \{F : H^1(\Omega) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+ / F(u) = \int |gradu|^2 dx + I_{\{u=0 \text{ sur } T\}}\}$$

où  $T$  désigne un sous-ensemble quelconque de  $\Omega$  .

Nous avons vu (exemple 2) que cette classe  $\mathcal{F}$  n'est pas fermée, sa fermeture (compacte) au sens de l'épi-convergence est égale à :

$$\mathcal{F} = \{F = H^1(\Omega) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+ / F(u) = \int_{\Omega} |gradu|^2 dx + \int_{\Omega} a(x) \tilde{u}^2(x) d\mu(x)$$

avec  $\mu$  mesure positive d'énergie finie ( $\mu \in H^{-1}(\Omega)^+$ ) ,  $a \geq 0$   $\mu$ -mesurable

où  $\tilde{u}$  désigne un représentant quasi continu de  $u$  .

Plus généralement, on sait décrire la fermeture de la classe des problèmes avec contraintes de type obstacle (cf. [3], [4], [8]) :

Dans le cas de l'intégrale de Dirichlet on obtient l'énoncé suivant (cf. [4] pour une version "détaillée").

Théorème 4.4 : Soit

$$\mathcal{F} = \{F_g : H^1(\Omega) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+ / F_g(u) = \int_{\Omega} |\text{gradu}|^2 dx + I_{\{u \geq g \text{ sur } \Omega\}}\}$$

avec  $g : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  quelconque.

Alors  $\bar{\mathcal{F}}$ , la fermeture (compacte) au sens de l'épi-convergence de  $\mathcal{F}$  (pour  $\tau =$  topologie forte de  $L^2(\Omega)$ ), est égale à :

$$\bar{\mathcal{F}} = \{F : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+ / F(u) = \int_{\Omega} |\text{gradu}|^2 dx + \int_{\Omega} j(x, \tilde{u}(x)) d\mu(x)\}$$

avec  $\mu$  mesure positive d'énergie finie,  $j$  étant une intégrande positive qui, comme fonction de  $u$ , satisfait :  $j$  décroissante,  $j$  convexe et  $j''$  décroissante !}

Principe de démonstration des théorèmes de compacité 4.2, 4.3, 4.4 : elle repose sur l'analyse des propriétés des fonctionnelles (de la classe  $\mathcal{F}$  considérée) qui sont préservées par épi-convergence.

A cet effet, De Giorgi a introduit une technique qui s'est avérée très féconde :

Une fonctionnelle  $F$  du calcul des variations est considérée non seulement comme fonction de  $u$ , mais également comme fonction de l'ensemble d'observation  $A \subset \Omega$

$$F(u, A) = \int_A j(x, u(x), \text{gradu}(x), \dots) dx .$$

Comme fonction de  $u$  elle possède alors des propriétés de continuité ou semi-continuité, convexité..., comme fonction de  $A$  c'est une mesure, les deux variables  $u$  et  $A$  étant reliées par le caractère local des fonctionnelles :

$$u|_A = v|_A \implies F(u, A) = G(v, A) .$$

a) Dans une première étape, on étudie la préservation par épi-convergence de ces propriétés, ainsi que des propriétés spécifiques à la classe  $\mathcal{F}$  étudiée : Dans le cas des fonctionnelles associées à des contraintes de type obstacle, on montre en outre la préservation de la propriété de décroissance des fonctionnelles contraintes  $G(\cdot, A)$  :

$$F(u, A) = \int_A |\text{gradu}|^2 dx + G(u, A)$$

$$u \geq v \implies G(u, A) \leq G(v, A) .$$

b) L'étape suivante consiste à montrer, pour des fonctionnelles vérifiant les propriétés "abstraites" ainsi dégagées, un théorème de représentation intégrale. Cette étape est souvent délicate, dans le cas de problèmes avec contraintes, les fonctionnelles prenant éventuellement la valeur  $+\infty$  et ne possédant que des propriétés de semi-continuité.

On construit ainsi une classe  $\mathcal{J}'_1$  compacte pour l'épi-convergence et contenant la classe initiale  $\mathcal{H}$ .

Dans le cas des problèmes d'obstacles (théorème 4.4), on arrive ainsi naturellement à

$$\mathcal{F}'_1 = \{F : H^1(\Omega) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+ / F(u) = \int_{\Omega} |\text{grad} u|^2 dx + \int_{\Omega} j(x, \check{u}(x)) d\mu(x)\}$$

avec  $j$  positive, décroissante, convexe en  $u$  }.

c) L'étape finale, elle aussi souvent fort délicate, consiste à déterminer exactement la fermeture  $\bar{\mathcal{J}} \subset \mathcal{F}'_1$ .

Dans la situation décrite ci-dessous, il faut vérifier que l'intégrande  $j$  doit satisfaire en outre  $j$  décroissante ! (ceci étant dû au caractère quadratique de l'énergie de Dirichlet : ne pas oublier que lorsqu'il y a "relaxation de la contrainte", il y a interaction entre la fonctionnelle énergie et la fonctionnelle contrainte). On montre enfin que toutes ces fonctionnelles peuvent effectivement être obtenues comme limite de problèmes avec contraintes de type obstacle : on utilise à cet effet des "tapis du fakir" (obstacles construits à partir de la même configuration que pour le "nuage de glace") que l'on superpose et recolle de façon ad-hoc ! (cf.[3]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. ATTOUCH : "Sur la  $\Gamma$ -convergence". Research notes in Mathematics (Pitman) n° 53, H. Brezis and J. L. Lions editors. Séminaire Collège de France (1980).
- [2] H. ATTOUCH : "Introduction à l'homogénéisation d'inéquations variationnelles." Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino, Vol. 40, 2, (1981).
- [3] H. ATTOUCH : "Variational convergences for functions and operators." (à paraître) Research Notes in Mathematics (Pitman editor).
- [4] H. ATTOUCH & C. PICARD : "Variational inequalities with varying obstacles general form of the limit problem." Journal of Functional Analysis, Vol. 50, n°3, (1983).
- [5] H. ATTOUCH & R. WETS : "Approximation and convergence in nonlinear optimization". Nonlinear Programming 4, edited by L. Mangasarian, R. R. Mayer, S. Robinson. Academic Press 1981.
- [6] BENSOUSSAN & J. L. LIONS & PAPANICOLAOU : Asymptotic analysis for periodic structures. North Holland (1978).
- [7] L. CARBONE & C. SBORDONE : Some properties of  $\Gamma$ -limits of integral functionals. Ann. Mat. Pura Appl. 122 (1979) 1-60.
- [8] D. CIORANESCU & F. MURAT : "Un terme étrange..." Séminaire Collège de France (H. Brézis & J. L. Lions editors) Research Notes in Mathematics n° 60, Pitman 1982.
- [9] G. DAL MASO & P. LONGO :  $\Gamma$ -limits of obstacles. Ann. Mat. Pura Appl. 128 (1981) 1-50.
- [10] E. DE GIORGI : "Convergence problems..." Proceedings of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis, Rome, Pitagore Editrice, Bologna, 1978.
- [11] E. DE GIORGI & T. FRANZONI : Su un tipo di convergenza variationale, Atti Acc. Naz. Lincei (8), 58 (1975), 842-850.
- [12] V. A. MARCHENCO & E. A. HROUSLOV : "Problèmes aux limites dans des domaines à frontière finement granulée." Kiev, 1974, (in Russian).
- [13] U. MOSCO : "Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities." Advanced Mathematics, 3, (1969), 510-585.
- [14] F. MURAT : Compacité par compensation. Ann. Sc. Norm. Pisa (4) 5 (1978) 484-507.

- [15] J. RAUCH & M. TAYLOR : Potential scattering theory on widely perturbed domains. J. Funct. Analysis 18 (1975) 27-59.
- [16] E. SANCHEZ-PALENCIA : "Nonhomogenous media.." Lecture Notes in Physics. Springer, 127, (1980).
- [17] L. TARTAR : Cours Peccot, Collège de France (1977).
- [18] R. WETS : "Convergence of convex functions, variational inequalities,..v in Variational inequalities and complementary problems. Editors R. Cottle, F. Gianessi & J. L. Lions, Chichester, Wiley & Sons, 1980, 375-403.

\*  
\* \*  
\*