Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

P. L. LIONS

La méthode de concentration-compacité en calcul des variations

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1982-1983), exp. n° 14, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1982-1983____A14_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 2 - 1 9 8 3

LA METHODE DE CONCENTRATION-COMPACITE EN CALCUL DES VARIATIONS

par P. L. LIONS

Exposé n° XIV

22 Février 1983

INTRODUCTION

Dans le Calcul des Variations ou en Physique Mathématique, de nombreux problèmes de minimisation sont posés sur des domaines non bornés comme $\mathbb{R}^N$ par exemple. L'invariance de $\mathbb{R}^N$ par les groupes non compacts des translations et des dilatations implique, en général, une éventuelle perte de compacité des suites minimisantes - cette difficulté étant illustrée par exemple par le fait que le théorème de Rellich-Kondrakov n'est plus valide sur $\mathbb{R}^n$. Nous avons introduit en [10] ,[11]une méthode générale, appelée méthode de concentration-compacité qui permet de pallier à cette difficulté et ainsi de résoudre les problèmes de minimisation posés dans des domaines non bornés. Essentiellement, cette méthode permet de résoudre les problèmes qui, "s'ils étaient posés dans des domaines bornés", seraient résolus par des méthodes classiques de convexité-compacité. Nous illustrons ici brièvement cette méthode sur les exemples suivants :

Exemple 1 : La recherche de solutions périodiques d'équations de Schrödinger non linéaires (intervenant en Physique Théorique et Physique des Lasers [19] ,[7]) conduit au problème suivant :

$$(1) \qquad I = \operatorname{Inf} \{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - K(x)|u|^p\, dx \ / \ u \in H^1(\mathbb{R}^N),\ \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = 1\}$$

où $K(x) \in C(\mathbb{R}^N)$ et (par exemple) $K(x) \to K^\infty$ quand $|x| \to \infty$ et où $2 < p < \frac{2N+4}{N}$.

Exemple 2 : Un exemple typique d'équations de champ non linéaires donne le problème suivant (cf.[8],[18],[4],[3]) :

$$(2) \qquad I = \operatorname{Inf} \{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx / u \in H^1(\mathbb{R}^N)\ ,\ \int_{\mathbb{R}^N} K(x)\ u^{\,p} dx = 1\}$$

où $2 < p < \frac{2N}{N-2}$ ($p < \infty$ si $N \leq 2$); où $V = V_1 + V_2$, $V_1 \in L^p + L^q$ et $\max(\frac{N}{2},1) \leq r$ $q < \infty$, $V_2 \in L^\infty$ et $V_2 \to V^\infty > 0$ quand $|x| \to \infty$ (par exemple) ; et où $K \in C(\mathbb{R}^N)$, $K > 0$ sur $\mathbb{R}^N$ et $K \to K^\infty$ quand $|x| \to \infty$.

Dans la section I ci-dessous, nous montrons comment la méthode de concentration-compacité permet de résoudre ces deux problèmes : nous verrons une condition nécessaire et suffisante générale pour que toute suite minimisante pour le problème (1) ou (2) soit relativement compacte (dans $H^1(\mathbb{R}^N)$) et nous expliquerons comment vérifier cette condition sur les exemples ci-dessus. Pour d'autres applications de cette méthode, nous renvoyons le lecteur à [11] , [12] où sont traités

i) le problème de masses fluides en rotation ("rotating stars")

ii) le problème de Choquard-Pekar,

iii) les équations de champ non linéaires,

iv) des problèmes dans des bandes ou dans des domaines extérieurs...

Cette méthode permet également de résoudre le problème des anneaux de vorticité et d'étudier la stabilité des ondes solitaires dans les équations de Schrödinger non linéaires.

Dans la section II, nous expliquons comment la méthode de concentration-compacité combinée avec un lemme général de "compacité locale" permet de traiter divers problèmes dans les "cas limites de compacité"- souvent invariants par les homothéties de $\mathbb{R}^N$ - comme par exemple l'existence de fonctions extrêmales pour les inégalités fonctionnelles. Plus précisément on se pose la question suivante : soit A un opérateur linéaire borné d'un Banach E dans un Banach F alors existe-t-il $u \in E$ tel que :

$$\|Au\|_F = 1 \ , \ \|u\|_E = \mathrm{Min}\{\|v\|_E \ / \ \|Av\|_F = 1\} \ . \tag{3}$$

A notre connaissance, il n'y a pas de réponse générale abstraite à cette question - sauf le cas trivial où A (ou une résolvante de A) est compact. Quelques cas très particuliers ont été traités par G. Talenti [20] , T. Aubin [1], G. Rosen [15] et E. H. Lieb [9] par des méthodes basées sur la symétrisation (ce qui interdit tout espoir de généralité).

Nous présentons ici une méthode générale dans le cadre d'espaces fonctionnels et nous illustrons dans la section II cette méthode sur l'exemple des inégalités (ou inclusions) de Sobolev. Bien sûr dans le cadre d'espaces fonctionnels sur $\mathbb{R}^N$, les problèmes du type (3) sont le plus souvent invariants par translation et par dilatation(changement d'échelle). Nous indiquons rapidement dans la section II également diverses autres applications.

Enfin dans la section III, nous expliquons comment les méthodes développées précédemment et notamment le lemme de "compacité locale" permettent de résoudre de multiples problèmes posés sur des domaines compacts comme par exemple le problème associé à la conjecture de Yamabe en géométrie différentielle ; l'existence de fonctions extrêmales pour le problème des meilleures constantes dans les théorèmes de trace, de Sobolev, de régularité pour les équations elliptiques..., l'existence de fonctions extrêmales dans les "inégalités isopérimétriques" pour les fonctions holomorphes...

I. LE CAS LOCALEMENT COMPACT

Ainsi que nous l'avons expliqué dans l'introduction, nous montrons ici comment s'applique la méthode de concentration-compacité aux problèmes "bien posés sur des ouverts bornés". Pour cela nous traiterons les problèmes (1) et (2). Dans les deux cas on introduit I_λ la valeur de l'infimum pour les problèmes où 1 est remplacé par $\lambda > 0$ dans la contrainte. Ensuite on introduit le "problème à l'infini" :

$$(1') \qquad I_\lambda^\infty = \operatorname{Inf}\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - K^\infty |u|^p \, dx \Big/ \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = \lambda\right\}$$

et

$$(2') \qquad I_\lambda^\infty = \operatorname{Inf}\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^\infty u^2 dx \Big/ \int_{\mathbb{R}^N} K^\infty |u|^p dx = \lambda\right\}.$$

(où par convention, $I_\lambda^\infty = +\infty$ si $K^\infty = 0$).

En convenant que $I_0, I_0^\infty = 0$; un argument général que nous esquissons ci-dessous implique que les inégalités de sous-additivité suivantes sont toujours vérifiées :

$$(4) \qquad I_\lambda \leq I_\alpha^\infty + I_{\lambda-\alpha}, \quad \forall \alpha \in [0,\lambda] .$$

En effet si $\alpha \in]0,\lambda[$ et si $\varepsilon > 0$ et si $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ vérifient, dans le cas de (1) par exemple :

$$\begin{cases} I_{\lambda-\alpha} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^2 - K(x)|u_1|^p \, dx \leq I_{\lambda-\alpha} + \varepsilon, & \int_{\mathbb{R}^N} (u_1)^2 dx = \lambda - \alpha \\ I_\alpha^\infty \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_2|^2 - K^\infty |u_2|^p \, dx \leq I_\alpha^\infty + \varepsilon, & \int_{\mathbb{R}^N} (u_2)^2 dx = \alpha ; \end{cases}$$

alors il est clair que, pour n assez grand, $u^n = u_1(.) + u_2(. + n\xi)$ où $|\xi| = 1$ vérifie : $\int_{\mathbb{R}^N} (u^n)^2 dx = \lambda$, $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^n|^2 - K(x)|u^n|^p dx \leq I_\alpha^\infty + I_{\lambda-\alpha} + 3\varepsilon$; d'où par définition de I_λ , ε étant arbitraire : $I_\lambda \leq I_\alpha^\infty + I_{\lambda-\alpha}$. De même montre-t-on que : $I_\lambda \leq I_\lambda^\infty$.

Remarque : En fait il est aisé, en détaillant l'argument donné ci-dessus, de montrer que si dans (4) une des inégalités pour un $\alpha \in]0,\lambda]$ est en fait une égalité, alors on peut construire une suite minimisante du problème I_λ qui n'est pas relativement compacte (dans $H^1(\mathbb{R}^N)$). En d'autres termes le fait que les inégalités dans (4) soient strictes pour $\alpha \in]0,\lambda]$ est une condition nécessaire pour que toutes les suites minimisantes soient relativement compactes.

Le principe général de concentration-compacité (cf. P. Lions [10], [11]) implique alors que la caractère strict des inégalités (4) est également une condition suffisante :

Théorème 1 : Pour les problèmes de minimisation définis par I_λ correspondant à (1) ou (2), la condition de sous-additivité stricte :

(SA1) $$I_\lambda < I_\alpha^\infty + I_{\lambda-\alpha} \quad , \quad \forall\, \alpha \in]0,\lambda]$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que toute suite minimisante soit relativement compacte dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 2 : Dans les cas particulier où les problèmes sont invariants par translation i.e. si $K \equiv K^\infty$, $V \equiv V^\infty$, la condition de sous-additivité stricte :

(SA2) $$I_\lambda < I_\alpha + I_{\lambda-\alpha}, \quad \forall\, \alpha \in]0,\lambda[$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que toute suite minimisante soit relativement compacte à une translation près dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Ainsi que nous l'avons indiqué et comme le montrera l'esquisse de démonstration ci-dessous, le fait que d'une part les inégalités larges sont toujours vérifiées et que d'autre part les inégalités strictes sont des conditions nécessaires et suffisantes pour la compacité des suites minimisantes est un principe général dont la démonstration pour chaque problème suit les grandes lignes évoquées ci-dessous.

Formellement, indiquons que si une suite minimisante n'est pas relativement compacte alors nous montrerons ci-dessous qu'essentiellement nous pouvons "découper chaque élément de la suite en au moins deux parties dont la distance des supports va tendre vers l'infini" et que ceci est impossible si (SA1) ou (SA2) sont vérifiées. Enfin signalons que cette méthode s'applique à tous les problèmes posés dans des domaines non bornés tels que les suites minimisantes soient bornées et possédant une forme de compacité locale. Reste bien sûr à vérifier (SA1) ou (SA2) dans chaque problème : nous indiquons rapidement ci-dessous comment le faire pour (1) ou (2).

<u>Remarque</u> : Dans le cadre du Théorème 1, signalons que si :

$$I_\lambda < I_\alpha^\infty + I_{\lambda-\alpha} \ , \ \forall \alpha \in]0,\lambda[$$

alors toute suite minimisante et relativement compacte dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ à une translation près.

Dans le cas du problème (1), on remarque que l'on a :

i) si $K^\infty \leqslant 0$ alors $I_\lambda^\infty = 0$ $(\forall \alpha > 0)$ et (SA1) a lieu si et seulement si $I_\lambda < 0$;

ii) si $K^\infty > 0$ alors on vérifie : $I_{\theta\alpha} < \theta I_\alpha < 0$, $\forall \theta > 1$, $\forall \alpha > 0$ d'où :

$$I_\lambda < I_\alpha + I_{\lambda-\alpha} \leqslant I_\alpha^\infty + I_{\lambda-\alpha} \ , \quad \forall \alpha \in]0,\lambda[\ .$$

Et dans le cas de (2), on vérifie sans peine que :

i) si $K^\infty = 0$ alors $I_\lambda^\infty = +\infty$ $(\forall \lambda > 0)$ et (SA1) a lieu ;

ii) si $K^\infty > 0$ et $I_\lambda \leqslant 0$, alors $I_\alpha^\infty > 0$ $(\forall \alpha > 0)$ et donc (SA1) a lieu ;

iii) si $K^\infty > 0$ et $I_\lambda > 0$, alors : $I_{\theta\alpha} = \theta^{2/p} I_\alpha < \theta I_\alpha$, $\forall \theta > 1$, $\forall \alpha > 1$

d'où : $I_\lambda < I_\alpha + I_{\lambda-\alpha} \leqslant I_\alpha^\infty + I_{\lambda-\alpha}$ $\forall \alpha \in]0,\lambda[$.

On en déduit donc les résultats suivants :

Corollaire 2 : Dans le cas du problème (1) :

i) si $K^\infty \leqslant 0$, toute suite minimisante est relativement compacte dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si $I_\lambda < 0$;

ii) si $K \equiv K^\infty > 0$, toute suite minimisante est relativement compacte dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ à une translation près ;

iii) si $K^\infty > 0$, toute suite minimisante est relativement compacte dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si $I_\lambda < I_\lambda^\infty$.

Corollaire 3 : Dans le cas du problème (2) :

i) si $K^\infty = 0$, ou bien si $K^\infty > 0$, $I_\lambda \leqslant 0$, toute suite minimisante est relativement compacte dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

ii) Si $K \equiv K^\infty > 0$ et si $V \equiv V^\infty$, toute suite minimisante est relativement compacte dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ à une translation près.

iii) si $K^\infty > 0$, alors toute suite minimisante est relativement compacte dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si : $I_\lambda < I_\lambda^\infty$.

Exemples : Dans le cas de (1), par exemple, si $K^\infty > 0$ nous voyons que le problème avec $K \equiv K^\infty$ admet un minimum. De plus si $K(x) \geqslant K^\infty$ et $K \not\equiv K^\infty$, il est aisé de vérifier que : $I_\lambda < I_\lambda^\infty$ et donc le problème admet un minimum ; tandis que si $K \leqslant K^\infty$ (et $K \not\equiv K^\infty$), $I_\lambda = I_\lambda^\infty$ et il existe des suites minimisantes non relativement compactes. En fait dans ce cas on peut montrer qu'il n'existe pas de minimum. On notera que si on remplace $\mathbb{R}^N$ par un domaine borné alors (1) admet un minimum pour tout K.

Concluons cette section par une esquisse de la démonstration du Théorème 1 : si $(u_n)_n$ désigne une suite minimisante de (1) ou de (2), on vérifie facilement que $(u_n)_n$ est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. On applique alors le lemme suivant soit à $\rho_n = (u_n)^2$ dans le cas de (1), soit à $p_n = K(x)|u_n|^p$ dans le cas de (2).

Lemme (concentration-compacité) : 1) Soit (ρ_n) une suite de $L_+^1(\mathbb{R}^N)$ vérifiant $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \, dx = \lambda$, alors il existe une sous-suite ρ_n (encore notée ρ_n) vérifiant une des trois possibilités suivantes :

i) (<u>évanescence</u>) $\forall R < \infty$, $\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B_R} \rho_n dx \xrightarrow[n]{} 0$

ii) (<u>compacité étroite à une translation près</u>) $\exists\, y_n \in \mathbb{R}^N$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, R < \infty$:

$$\int_{y_n + B_R} \rho_n \, dx \geqslant \lambda - \varepsilon \quad .$$

iii) (<u>dichotomie</u>) $\exists\, \alpha \in]0, \lambda[$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \rho_n^1$, $\rho_n^2 \in L_+^1(\mathbb{R}^N)$ <u>tels que</u> :

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n^1 \, dx - \alpha\right| < \varepsilon \quad , \|\rho_n - (\rho_n^1 + \rho_n^2)\|_{L^1} < \varepsilon \quad ,$$

ρ_n^1 <u>est à support compact et dist</u>(Supp ρ_n^1 , Supp ρ_n^2) $\xrightarrow[n]{} \infty$.

2) <u>De plus si</u> $\rho_n = u_n^2$ (<u>resp</u>. $\rho_n = K(x)|u_n|^p$) , <u>où</u> u_n <u>est bornée dans</u> $H^1(\mathbb{R}^N)$, <u>et si</u> iii) <u>se produit</u>, <u>alors on peut prendre</u> $\rho_n^i = (u_n^i)^2$ (<u>resp</u>. $\rho_n^i = K|u_n^i|^p$) <u>pour</u> $i = 1,2$ <u>et</u> $(u_n^1)_n$, $(u_n^2)_n$ <u>sont bornées dans</u> $H^1(\mathbb{R}^N)$ <u>et vérifient</u> :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \, dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^1|^2 + |\nabla u_n^2| \, dx - \varepsilon$$

$$\forall n \geqslant 0, \quad \|u_n - (u_n^1 + u_n^2)\|_{L^p} \leqslant \delta_p(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 \ , \ \forall\, 2 \leqslant p < \frac{2N}{N-2} \quad .$$

Le lemme se démontre (cf. P. L. Lions [11] ,[12]) à l'aide de la notion de <u>fonction de concentration d'une mesure de probabilité P</u> (sur $\mathbb{R}^N$)-notion introduite par P. Lévy - :

$$Q(t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B_t} dP \ , \qquad \forall\, t \geqslant 0.$$

Bien sûr la partie 1) du lemme doit être adaptée à chaque problème, et en 2) ci-dessus nous l'avons fait dans le cas des exemples 1 et 2 .

Il est alors aisé de terminer la démonstration du Théorème 1 : en effet il est facile d'éliminer l'occurence de i) à l'aide de (SA1) (et de la "compacité locale" des problèmes (1) et (2)). D'autre part si iii) se produit alors on voit que pour n assez grand on a, $\varepsilon > 0$ étant fixé :

ou bien
$$\begin{cases} I_\lambda + \varepsilon \geqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^1|^2 + |\nabla u_n^2|^2 - K(x)|u_n^1|^p - K(x)\,|u_n^2|^p dx \\ \left|\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^1)^2 dx - \alpha\right| \leqslant \varepsilon , \quad \left|\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^2)^2 dx - (\lambda - \alpha)\right| \leqslant \varepsilon \\ \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|n_n^1|^p dx \text{ , ou bien } \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|u_n^2|^p dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$$
et ceci entraîne aisément : $I_\lambda \geqslant I_\alpha^\infty + I_{\lambda-\alpha}$ ou $I_\lambda \geqslant I_\alpha + I_{\lambda-\alpha}^\infty$. Dans les deux cas (SA1) implique donc que iii) ne peut se produire.

Enfin si ii) se produit, il est alors aisé de conclure puisque "à ε près nous sommes ramenés à un problème dans un ouvert borné", (SA1) impliquant que la translation (y_n) ne peut être non bornée. On conclut alors aisément en utilisant le théorème de Rellich-Kondrakov (remarquer que puisque $p < \frac{2N}{N-2}$, u_n est relativement compact dans L^p_{loc}).

II. LE CAS LIMITE

Le cas d'exposant limite ($p = \frac{2N}{N-2}$ dans (2)) ainsi que le problème général (3) dans le cadre d'espaces fonctionnels (et d'opérateurs différentiels, de convolution...) peuvent être traités en combinant la méthode de concentration-compacité avec un lemme général donnant l'expression des éventuelles pertes de compacité par la convergence faible. Ainsi que nous l'avons expliqué dans l'introduction, nous présentons ici cette méthode sur l'exemple des inégalités de Sobolev ; indiquons seulement que nous pouvons traiter de même diverses inégalités de convolution (et leurs combinaisons avec les inégalités de Sobolev), les inégalités de traces, les inégalités de Korn, le problème associé à la conjecture de Yamabe dans $\mathbb{R}^N$, les inégalités d'interpolation... Nous revoyons le lecteur à [13] ,[14] pour plus de détails.

Soient $N \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, $1 \leqslant p < \frac{N}{m}$, on note $X = \{u \in L^q(\mathbb{R}^N)\ ,\ D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^N)\ \forall\ |\alpha| = m\}$ où $q = \frac{Np}{N-mp}$. Les inégalités de Sobolev impliquent :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q\, dx\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |D^m u|^p\right)^{1/p} dx \ , \quad \forall\ u \in X$$

Pour déterminer si la "meilleure constante" C est atteinte, il nous faut résoudre le problème de minimisation :

$$(5) \qquad I_\lambda = \operatorname{Inf}\left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |D^m u|^p\, dx \ \Big/ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q\, dx = \lambda\ ,\ u \in X\right\}$$

où $\lambda > 0$ est arbitraire.

Outre l'invariance par translations (relevant des méthodes de la section I), le problème est invariant par homothétie : plus précisément les deux fonctionnelles intervenant dans I_λ sont invariantes si on remplace u par :

$$u_\sigma(.) = \frac{1}{\sigma^{N/q}} \; u(\frac{\cdot}{\sigma}) \quad ;$$

il est à noter que si $\sigma \longrightarrow +\infty$, la famille $|u_\sigma|^q$ vérifie la propriété d'évanescence étudiée en I tandis que si $\sigma \longrightarrow 0$, $|u_\sigma|^q$ converge faiblement vers $\frac{1}{\lambda}\,\delta_o$ - où δ_{x_o} désigne la masse de Dirac en x_o - et ceci illustre bien le manque de compacité locale du problème. Le résultat suivant montre que les translations et les dilatations sont les seules sources de perte de compacité (dans tout ce qui suit, nous convenons de remplacer L^1 par M_b si $p = 1$) :

<u>Théorème 4</u> : <u>Toute suite minimisante</u> u_n <u>du problème (5) est relativement compacte dans</u> $L^q(\mathbb{R}^N)$ <u>à une translation et une dilatation près, i.e. il existe</u> $y_n \in \mathbb{R}^N$, $\sigma_n > 0$ <u>tels que la suite minimisante</u> $(u_n)_{\sigma_n} = \sigma_n^{-N/q}\; u_n(\frac{\cdot + y_n}{\sigma_n})$ <u>soit relativement compacte dans</u> $L^q(\mathbb{R}^N)$. <u>En particulier, l'infimum dans</u> (5) <u>est atteint</u>.

<u>Remarques</u> : i) Dans les cas m = 1 ou p = 2, il est possible d'en déduire la formule explicite de I_λ -cf. P. L. Lions [ ] .

ii) Le fait que l'infimum est atteint a été démontré dans le cas m = 1 par T. Aubin [1] , G. Talenti [20] , G. Rosen [15] , E. H. Lieb [9] par des arguments qui tous utilisent la symétrisation et ne s'étendent donc pas au cas général.

Esquissons maintenant la démonstration du théorème 4 : on remarque tout d'abord que si Q, Q_σ désignent respectivement les fonctions de concentration des mesures $|u|^q$, $|u_\sigma|^q$, on a :

$$Q_\sigma(t) = Q(\frac{t}{\sigma}) \qquad , \quad \forall\, t \geq 0 \; .$$

Il est donc aisé de choisir $\sigma_n > 0$ tel que si u_n est une suite minimisante pour (5), la fonction de concentration Q_n de $(u_n)_{\sigma_n}$ vérifie :

$$Q_n(1) = \lambda/2 \; . \tag{6}$$

Dans ce qui suit, on note encore u_n la nouvelle suite $(u_n)_{\sigma_n}$.

En appliquant alors la méthode de concentration-compacité, on voit que l'évanescence (cas i) du lemme de concentration-compacité) ne peut se produire de par la normalisation (6), tandis que la dichotomie (cas iii)) ne peut se produire puisque : $I_\lambda = \lambda^{p/q} I_1$ et donc $I_\lambda < I_\alpha + I_{\lambda-\alpha}$, $\forall \alpha \in]0,\lambda[$. On en déduit donc l'existence de $y_n \in \mathbb{R}^N$ telle que la suite minimisante $u_n(. + y_n)$ (que nous noterons encore u_n) vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0 , \quad \exists R < \infty \quad , \quad \int_{B_R} |u_n|^q \, dx \geqslant \lambda - \varepsilon .$$

On extrait alors une sous-suite (toujours notée u_n) telle que : u_n converge faiblement vers u dans L^q et p.p., u_n converge dans L^r_{loc} vers u pour $r < q$ et $D^\alpha u_n$ converge faiblement dans L^p vers $D^\alpha u$ pour $|\alpha| = m$.

Il nous faut démontrer que : $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx = \lambda$. Pour cela on utilise de manière fondamentale le lemme suivant :

<u>Lemme (compacité locale)</u> : <u>Soit</u> $(u_n)_n$ <u>une suite bornée dans</u> X, <u>si</u> u_n <u>converge faiblement dans</u> L^q <u>vers</u> u, <u>alors pour toute sous-suite</u> $|u_{n_k}|^q$ <u>faiblement convergente au sens des mesures, il existe une suite de points</u> $(x_i)_{i\geqslant 1}$ <u>de</u> $\mathbb{R}^N$ <u>et une suite de réels</u> $(\nu_i)_{i\geqslant 1}$ <u>positifs ou nuls vérifiant</u> : $\sum_{i=1}^{\infty} \nu_i^{p/q} < \infty$,

$$|u_{n_k}|^q \longrightarrow |u|^q + \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \; \delta_{x_i}$$

(<u>faiblement au sens des mesures</u>).

<u>Remarques</u> : i) Ce résultat permet d'expliquer les phénomènes observés par J. Sacks et K. Uhlenbeck [16] , S. Sedlacek [17] .

ii) On peut montrer que toute mesure de la forme $|u|^q + \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \, \delta_{x_i}$ où $u \in X$, $\nu_i \geqslant 0$, $x_i \in \mathbb{R}^N$ et $\sum_{i=1}^{\infty} \nu_i^{p/q} < \infty$ est limite faible de $|u_n|^q$ où u_n est bornée dans X et converge faiblement dans L^q vers u.

Pour démontrer le lemme, on utilise tout d'abord un résultat de H. Brézis et E. H. Lieb [5] qui permet de se ramener au cas où $u \equiv 0$. De plus sans restreindre la généralité on peut supposer que $|u_n|^q$, $|D^m u_n|^p$ convergent faiblement vers des mesures bornées non négatives ν, μ . Enfin d'après les inégalités de Sobolev :

$$\exists C > 0, \forall \xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \ , \forall n \geqslant 1 \qquad \| \xi u_n \|_{L^q} \leqslant C \| D^m(\xi u_n) \|_{L^p}$$

et on en déduit en utilisant le théorème de Rellich :

$$(7) \qquad \exists C > 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \qquad \left(\int |\xi|^q d\nu\right)^{1/q} \leqslant C \left(\int |\xi|^p d\mu\right)^{1/p} .$$

On conclut grâce au lemme suivant (dans lequel $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ sont arbitraires) :

Lemme 5 : Soient ν, μ deux mesures bornées positives sur $\mathbb{R}^N$ vérifiant (7) avec $p < q$. Il existe $(x_i)_{i \geqslant 1} \in \mathbb{R}^N$, $(\nu_i)_{i \geqslant 1} \in \mathbb{R}_+$ tels que : $\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \delta_{x_i}$ et $\sum_{i=1}^{\infty} \nu_i^{p/q} < \infty$

Remarque : Dans toutes les démonstrations concernant l'existence de fonctions extrêmales pour des inégalités fonctionnelles, le lemme de compacité locale s'adapte aisément et se démontre grâce au lemme 5 (cf. P. L. Lions [13] ,[14] pour plus de détails)

Si nous revenons maintenant à la démonstration du théorème 4, on remarque tout d'abord que $u \not\equiv 0$. En effet si $u \equiv 0$, en utilisant le fait que $(u_n)_n$ est une suite minimisante et la démonstration du lemme de compacité locale on aboutit à (7) avec $\nu(\mathbb{R}^N) = \lambda$ et $\mu(\mathbb{R}^N) \leqslant \lambda^{p/q} C^{-p}$. Il est alors aisé d'en déduire que $\nu = \lambda \delta_{x_0}$ où $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et ceci contredit la normalisation (6).

On pose alors $\alpha = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx > 0$ et on veut montrer que $\alpha = \lambda$. Sans restreindre la généralité on suppose que $|D^m u_n|^p$ converge faiblement vers μ , on a d'une part : $|D^m u|^p \leqslant \mu$, $\mu(\mathbb{R}^N) \leqslant I_\lambda$; d'autre part grâce aux inégalités de Sobolev on a pour tout $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\xi\, u_n|^q dx \right)^{1/q} \leqslant \lambda^{1/q} I_\lambda^{-1/p} \| D^m(\xi u_n) \|_{L^p}$$

d'où

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^q |u|^q dx + \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i\, \xi(x_i) \right)^{1/q} \leqslant \lambda^{1/q} I_\lambda^{-1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^p d\mu \right)^{1/p} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \| |D^j \xi|\, u \|_{L^p} .$$

Par un choix convenable de ξ , on déduit de cette inégalité :

$$\mu \geqslant \lambda^{-p/q} I_\lambda \nu_i^{p/q} \delta_{x_i}$$

On a ainsi obtenu les inégalités suivantes :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \right)^{1/q} = \alpha^{1/q} = \left(\lambda - \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \right)^{1/q} \leqslant \lambda^{1/q} I_\lambda^{-1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |D^m u|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\leqslant \lambda^{1/q} I_\lambda^{-1/p} \left(\mu(\mathbb{R}^N) - I_\lambda \lambda^{-p/q} \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i^{p/q} \right)^{1/p}$$

$$\leqslant \lambda^{1/q} I_\lambda^{-1/p} \left(I_\lambda - I_\lambda \lambda^{-p/q} \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i^{p/q} \right)^{1/p}$$

c'est-à-dire en posant $\nu'_i = \dfrac{\nu_i}{\lambda}$:

$$\begin{cases} (1 - \sum_{i=1}^{\infty} \nu'_i)^{1/q} \leqslant (1 - \sum_{i=1}^{\infty} (\nu'_i)^{p/q})^{1/p} \\ \text{et } \nu'_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{\infty} \nu'_i < 1 \ , \ p < q \end{cases}$$

et ceci n'est possible que si $\nu'_i \equiv 0, \forall_i \geqslant 1$.

Remarque : De façon peut-être peu apparente, le lemme de compacité locale permet essentiellement de décomposer u_n en 2 parties (si u_n ne converge pas fortement dans L^q vers u) à savoir u et $u_n - u$ qui se concentre autour des points x_i . Cette concentration permet de s'assurer que $|D^m u_n|^p$ se décompose de façon analogue, et les inégalités finales n'utilisent en fait que la sous-additivité de I_λ provenant de la formule : $I_\lambda = \lambda^{p/q} I_1$!

III. PROBLEMES SUR DES DOMAINES COMPACTS

Les méthodes introduites précédemment (et notamment le lemme de compacité locale, sa démonstration et le lemme 5) permettent de traiter de nombreux problèmes dans le cas d'exposants critiques ou dans le cadre général de (3) (problèmes posés sur des domaines compacts). Nous décrivons ici brièvement deux exemples ; de nombreux autres exemples sont donnés dans P. L. Lions [13] , [14].

Exemple 1 : Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension N ; le problème de déterminer une nouvelle métrique (ponctuellement) conformellement équivalente à g et de courbure scalaire donnée se réduit à l'équation d'Euler du problème de minimisation suivant (cf. Yamabe [22] , N. S. Trudinger [21], T. Aubin [2]) :

(8) $$I = \mathrm{Inf} \{ \int_M |\nabla u|^2 + k(x) u^2 \, dx \ / \int_M K(x) |u|^{\frac{2N}{N-2}} dx = 1 \}$$

où par exemple $K > 0$ sur M, $K,k \in C(M)$.

Exemple 2 : L'existence de fonctions extrêmales pour la "meilleure constante" dans les théorèmes de traces conduit au problème suivant : soient $1 < p < N$, $q = \dfrac{(N-1)p}{N-p}$

(9) $$I = \mathrm{Inf} \{ \int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p \, dx \ / \int_{\partial\Omega} |u|^q \, dy = 1 \}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$.

Sur ces deux exemples, en appliquant les méthodes décrites ci-dessus (et en remarquant que la stricte sous-additivité de "l'infimum comme fonction du niveau de la contrainte" s'obtient grâce à l'homogénéité) on obtient l'alternative suivante pour toute suite minimisante $(u_n)_n$:

- ou bien u_n est relativement compacte (dans $H^1(M)$, $W^{1,p}(\Omega)$ respectivement) et le problème est résolu.
- ou bien : u_n converge faiblement vers 0 (dans $H^1(M)$, $W^{1,p}(\Omega)$ resp.) et dans

l'exemple 1 : $|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup I\,\delta_{x_0}$, $Ku_n^{\frac{2N}{N-2}} \rightharpoonup \delta_{x_0}$ avec $x_0 \in M$;

dans l'exemple 2 : $|\nabla u_n|^p \rightharpoonup I\,\delta_{x_0}$, $|u_n|^q \rightharpoonup \delta_{x_0}$ avec $x_0 \in \partial\Omega$

(toutes les convergences étant pour la topologie faible des mesures).

Si la deuxième possibilité se produit dans l'exemple 1, alors on en déduit aisément par localisation que

$$\int_M |u_W^{\frac{2N}{N-2}}\, dx \xrightarrow[n]{} \frac{1}{K(x_0)} , \quad \frac{\lim}{n} \int_M |\nabla u_n|^2 + k(x) u_n^2\, dx \geq I_{x_0}^{\infty}$$

où $I_{x_0}^{\infty} = \mathrm{Min}\, \{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx \,/\, \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2N/(N-2)}\, dx = K(x_0)^{-1}\}$, $\forall\, x \in M$.

D'autre part on vérifie aisément que : $I \leq I^{\infty} = \underset{x \in M}{\mathrm{Min}}\, I_x^{\infty} = c_0 (\underset{M}{\max}\, K)^{-(N-2)/N}$.

En résumé si la deuxième possibilité se produit, nécessairement : $I = I^{\infty}$ (et x_0 est un point de maximum de K). Et donc si $I < I^{\infty}$, toute suite minimisante est relativement compacte dans $H^1(M)$ et le problème (8) admet un minimum. L'existence d'un minimum a été démontré par T. Aubin [2] par une preuve moins directe - dans [2] , la condition $I < I^{\infty}$ est analysée finement.

De même, en ce qui concerne l'exemple 2, la deuxième possibilité conduit à l'égalité :

$$I = I^{\infty} = \mathrm{Inf}\{\int_{(x_N > 0)} |\nabla u|^p\, dx \,/\, \int_{(x_N = 0)} |u|^q\, dy = 1\} .$$

(et on a toujours : $I \leq I^{\infty}$). Si $I < I^{\infty}$, toute suite minimisante est relativement compacte dans $W^{1,p}(\Omega)$ et le problème (9) admet un minimum.

REFERENCES

[1] T. Aubin : Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev. J. Diff. Geom., 11 (1976), p. 573-598.

[2] T. Aubin : Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. J. Math. Pures Appl., 55 (1976), p. 269-296.

[3] H. Berestycki et P. L. Lions : Non linear scalar fields equations, I et II. Arch. Rat. Mech. Anal. , (1983).

[4] M. S. Berger : On the existence and structure of stationary states for a non linear Klein-Gordon equation. J. Funct. Anal., 9 (1972), p. 249-261.

[5] H. Brézis et E. H. Lieb : A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. A paraître dans Proc. Amer. Math. Soc.

[6] H. Brezis et L. Nirenberg : Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. Preprint.

[7] T. Cazenave et P. L. Lions : Orbital stability of standing waves for some non linear Schrödinger equations. Comm. Math. Phys. , 85 (1982), p. 549-561.

[8] S. Coleman, V. Glazer et A. Martin : Action minima among solutions to a class of euclidean scalar field equations. Comm. Math. Phys., 58 (1978), p.211-221.

[9] E. H. Lieb : Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities. Preprint.

[10] P. L. Lions : Principe de concentration-compacité en calcul des variations. C. R. Acad. Sc. Paris, 294 (1982), p. 261-264.

[11] P. L. Lions : The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations; I. The locally compact case. A paraître dans Ann. I.H.P., Anal. Non Lin., 1984.

[12] P. L. Lions : On the concentration-compactness principle. A paraître dans Contributions to Nonlinear Partial Differential Equations, Pitman, Londres, 1983.

[13] P. L. Lions : Applications de la méthode de concentration-compacité à l'existence de fonctions extrêmales. C. R. Acad. Sc. Paris, 1983.

[14] P. L. Lions : The concentration-compactness principle in the calculus of variations; II. The limit case.

[15] G. Rosen : Minimum value for c in the Sobolev inequality $\|\phi\|_6 \leqslant c\|\nabla\phi\|_2$. SIAM J. Appl. Math., 21 (1971), p.30-32.

[16] J. Sacks et K. Uhlenbeck : The existence of minimal immersions of 2-spheres. Ann. Math., 113 (1981), p.1-24.

[17] S. Sedlacek : A direct method for minimizing the Yang-Mills functional over 4-manifolds. Comm. Math. Phys., 86 (1982), p. 515-528.

[18] W. Strauss : Existence of solitary waves in higher dimensions. Comm. Math. Phys. 55, (1977), p. 149-162.

[19] B. R. Suydam : Self-focusing of very powerful laser beams. U.S. Dept. of Commerce N.B.S. special publications, 287.

[20] G. Talenti : Best constant in Sobolev inequality. Ann. di Matem. Pura Appl., 110 (1976), p. 353-372.

[21] N. S. Trudinger : Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 22 (1968), p.265-274.

[22] H. Yamabe : On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds. Osaka Math. J., 12 (1960), p. 21-37.

*
* *
*