Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

H. Brezis

Problèmes elliptiques et paraboliques non linéaires avec données mesures

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. nº 20, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A19_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 1 - 1 9 8 2

PROBLEMES ELLIPTIQUES ET PARABOLIQUES NON LINEAIRES AVEC DONNEES MESURES

par H. BREZIS

Exposé n° XX

20 Avril 1982

§ 1. INTRODUCTION

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert tel que $0 \in \Omega$. On considère le problème suivant : trouver une fonction $u(x)$ vérifiant :

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u + |u|^{p-1}u = f(x) & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $1 < p < \infty$; la donnée $f(x)$ appartient à $L^1(\Omega)$ ou plus généralement est une <u>mesure</u>.

Je commence par rappeler un résultat concernant le cas où $f \in L^1(\Omega)$ (voir Brezis-Strauss [5] lorsque Ω est borné et Benilan-Brezis-Crandall [2] si $\Omega = \mathbb{R}^N$) :

<u>Théorème A</u> : On suppose que Ω est borné régulier ou bien que $\Omega = \mathbb{R}^N$. Alors pour tout $f \in L^1(\Omega)$ il existe $u \in L^p(\Omega)$ unique solution de (1) (en un sens à préciser (1)).

Insistons sur le fait que le Théorème A est valable <u>sans restrictions</u> sur p. A la même époque, et indépendamment, Lieb et Simon [9] montrent que l'équation de Thomas-Fermi :

$$(2) \qquad -\Delta u + |u|^{1/2}u = \sum_{i=1}^{k} m_i\,\delta(x - a_i) \qquad \text{dans } \mathbb{R}^3$$

qui intervient en mécanique quantique, possède une solution unique. Ici $m_i > 0$ et $a_i \in \mathbb{R}^3$ sont donnés et δ désigne la mesure de Dirac. Il est donc naturel de se poser la question de savoir si l'équation (1) possède une solution pour toute donnée f mesure et tout p. Comme les estimations a priori sont les mêmes pour les données mesures et les données L^1 on pouvait espérer - par analogie avec le théorème A - une réponse positive. En fait la réalité est plus complexe :

<u>Théorème 1</u> (Benilan-Brézis ; voir [1]) : On suppose que $p \geqslant \frac{N}{N-2}$ (avec $N \geqslant 3$).

---

(1) qui implique en particulier que

$$-\Delta u + |u|^{p-1}u = f \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Alors il n'existe pas de fonction $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ vérifiant

(3) $$- \Delta u + |u|^{p-1}u = \delta \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) .$$

On notera que le Théorème 1 est un résultat local : il exprime qu'il y a une obstruction locale à l'existence d'une solution de (3). Par contre si $p < \frac{N}{N-2}$ on a un résultat positif :

Théorème 2 (Benilan-Brézis ; voir [1]) : On suppose que Ω est borné régulier ou bien que $\Omega = \mathbb{R}^N$. Soit $p < \frac{N}{N-2}$ (p arbitraire si N = 1 ou N = 2). Alors pour tout $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ (mesure bornée) il existe $u \in L^p(\Omega)$ unique solution de (1) (en un sens à préciser (1)).

Au § 2 on indique quelques idées pour la démonstration des Théorèmes 1 et 2 ainsi que certains développements liés à ces questions. Au § 3 on présente des résultats semblables pour les problèmes paraboliques.

§ 2. EXISTENCE, NON-EXISTENCE ET SINGULARITES ELIMINABLES POUR LE PROBLEME (1).

Démonstration du Théorème 1

Je commence par une preuve heuristique très simple (qui peut être mise en forme). Supposons que $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ vérifie (3), et donc

$$- \Delta u = \delta - |u|^{p-1}u.$$

Au voisinage de $x = 0$ la fonction intégrable $|u|^{p-1}u$ est "négligeable" devant δ et donc $u(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{|x|^{N-2}}$ (solution élémentaire de $- \Delta$).

Par conséquent $|u(x)|^p \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{|x|^{p(N-2)}}$ et $u \notin L^p_{loc}(\Omega)$ car

---

(1) qui implique en particulier que

$$- \Delta u + |u|^{p-1}u = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) .$$

$\int_0^1 \frac{r^{N-1}}{r^{p(N-2)}}\,dr = \infty$ (à cause de l'hypothèse $p \geqslant \frac{N}{N-2}$) . On notera que cet argument ne s'applique plus si $p < \frac{N}{N-2}$ - ce qui est cohérent avec le Théorème 2. Au lieu de chercher à mettre en forme cette idée, j'indique maintenant un résultat de régularité (dû essentiellement à Brézis-Veron [6]) qui implique directement le Théorème 1 :

Théorème 3 : On suppose que $p \geqslant \frac{N}{N-2}$ (avec $N \geqslant 3$). Soit $u \in L^p_{loc}(\Omega \setminus \{0\})$ vérifiant

(4) $$- \Delta u + |u|^{p-1}u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\}).$$

Alors $u \in C^2(\Omega)$ (et même $u \in C^\infty(\Omega)$ si p est un entier).

Démonstration du Théorème 3 : Pour simplifier la présentation (mais ceci n'est pas essentiel !) on fixe $N = 3$, $p = 3$ et $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \ ; \ |x| < 1\}$. Autrement dit $u \in L^3_{loc}(\Omega \setminus \{0\})$ vérifie

(5) $$- \Delta u + u^3 = 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\}).$$

1ère étape : On a $u \in C^\infty(\Omega \setminus \{0\})$.

Démonstration : L'inégalité de Kato [8] exprime que

$$\Delta|u| \geqslant (\Delta u) \text{ sign } u \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\}).$$

D'où l'on déduit, grâce à (5), que

(6) $$\Delta|u| \geqslant |u|^3 \geqslant 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\}),$$

et donc $|u|$ est sous-harmonique dans $\Omega \setminus \{0\}$. Par conséquent $u \in L^\infty_{loc}(\Omega \setminus \{0\})$ (1)
D'où $\Delta u \in L^\infty_{loc}(\Omega \setminus \{0\})$, $u \in C^1(\Omega \setminus \{0\})$, etc...

---

(1) On notera que le "bootsrap" usuel ne s'applique pas ici. En effet $u \in L^3_{loc}(\Omega \setminus \{0\}) \Rightarrow \Delta u \in L^1_{loc}(\Omega \setminus \{0\}) \Rightarrow u \in L^q_{loc}(\Omega \setminus \{0\}) \quad \forall q < 3$ (on marche à l'envers !).

<u>2ème étape</u> : On a

(7) $$|u(x)| \leqslant \frac{3}{|x|} \qquad \text{pour} \qquad 0 < |x| < \frac{1}{2}\,.$$

<u>Démonstration</u> : On applique une technique introduite par Loewner-Nirenberg [10]. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^3$ avec $0 < |x_0| < \frac{1}{2}$ et soit $R < |x_0|$. On considère la fonction

$$U(x) = \frac{3R}{R^2 - |x - x_0|^2} \quad \text{définie sur } B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^3\,;\, |x - x_0| < R\}.$$

Un calcul aisé montre que U vérifie :

(8) $$-\Delta U + U^3 \geqslant 0 \qquad \text{sur} \quad B_R(x_0),$$

et d'autre part on a

(9) $$u \leqslant U = +\infty \qquad \text{sur} \quad \partial B_R(x_0).$$

Comparant (5) et (8) à l'aide du principe du maximum-appliqué sur $B_R(x_0)$, il vient

$$u \leqslant U \qquad \text{sur} \quad B_R(x_0).$$

En particulier $u(x_0) \leqslant U(x_0) = \frac{3}{R}$ pour tout $R < |x_0|$.

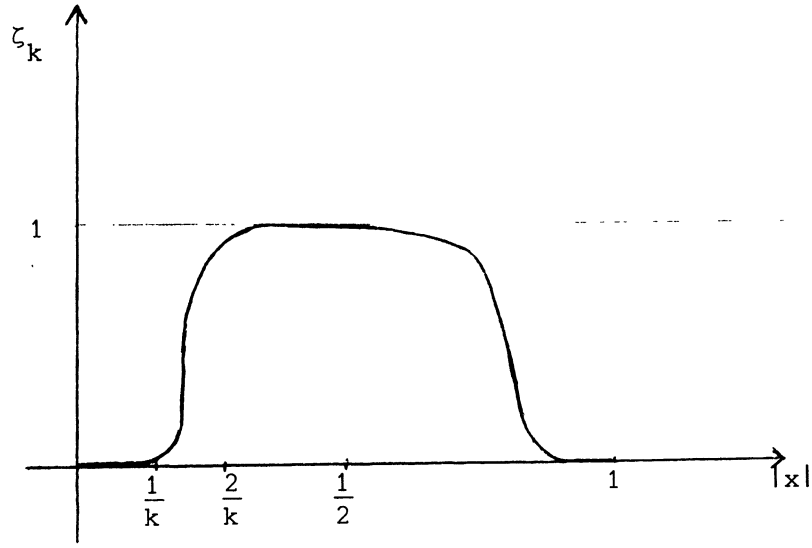
Avec le même argument pour $-u$ on obtient (7).

<u>3ème étape</u> : On a $u \in L^3_{loc}(\Omega)$.

<u>Démonstration</u> : On choisit une suite de fonctions (ζ_k) dans $\mathcal{D}_+(\Omega \setminus \{0\})$ telle que

$$\begin{cases} \zeta_k(x) = 0 & \text{pour } |x| < \frac{1}{k} \\ \zeta_k(x) = 1 & \text{pour } \frac{2}{k} < |x| < \frac{1}{2} \\ \zeta_k(x) = \zeta(x) & \text{pour } \frac{1}{2} < |x| < 1 \\ |\Delta \zeta_k(x)| \leqslant Ck^2 & \text{pour } \frac{1}{k} < |x| < \frac{2}{k} \end{cases}$$

où ζ est une fonction fixée indépendante de k :



Grâce à (6) on a

$$\int |u|^3 \zeta_k \leqslant \int |u| \; |\Delta \zeta_k| \leqslant Ck^2 \int_{\frac{1}{k} < |x| < \frac{2}{k}} |u| + \int_{\frac{1}{2} < |x| < 1} |u| \, |\Delta \zeta| \tag{10}$$

Appliquant la 2ème étape on en déduit que

$$\int |u|^3 \;\; \zeta_k \;\leqslant\; Ck^2 \int_{1/k}^{2/k} r \, dr + C \leqslant C$$

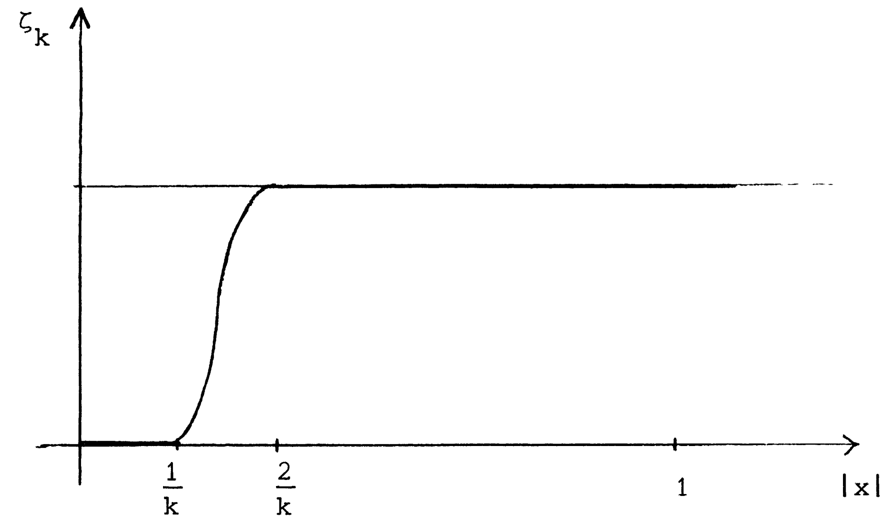
On conclut par Fatou que $\displaystyle\int_{|x| < \frac{1}{2}} |u|^3 < \infty.$

<u>4ème étape</u> : On a

$$- \Delta u + u^3 = 0 \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

<u>Démonstration</u> : On choisit une suite (ζ_k) de fonctions régulières telles que

$$\begin{cases} \zeta_k(x) = 0 & \text{pour } |x| < \frac{1}{k} \\ \zeta_k(x) = 1 & \text{pour } \frac{2}{k} < |x| < 1 \\ |\nabla \zeta_k| \leqslant Ck & \\ |\Delta \zeta_k| \leqslant Ck^2 & \end{cases}$$



Etant donnée $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ il s'agit de vérifier que

$$- \int u \, \Delta \varphi + \int u^3 \varphi = 0.$$

D'après (5) on sait que

$$- \int u \, \Delta(\varphi \zeta_k) + \int u^3 (\varphi \zeta_k) = 0 .$$

Par Lebesgue et la 3ème étape on a

$$\int u (\Delta\varphi) \, \zeta_k \longrightarrow \int u (\Delta \varphi)$$

et

$$\int u^3 \varphi \zeta_k \longrightarrow \int u^3 \varphi .$$

Il reste donc à vérifier que

$$\int u \, \nabla \varphi \, . \, \nabla \zeta_k \longrightarrow 0$$

et que

$$\int u \, \varphi \, \Delta \zeta_k \longrightarrow 0 .$$

Par Hölder (et grâce à l'étape 3) on a

$$\left| \int u \, \nabla\varphi . \nabla\zeta_k \right| \leqslant Ck \int_{\frac{1}{k} < |x| < \frac{2}{k}} |u| \leqslant \frac{C}{k}$$

$$\left| \int u \, \varphi \, \Delta\zeta_k \right| \leqslant Ck^2 \int_{\frac{1}{k} < |x| < \frac{2}{k}} |u| \leqslant C\left[\int_{\frac{1}{k} < |x| < \frac{2}{k}} |u|^3 \right]^{1/3} \to 0$$

<u>5èmé étape</u> : On a $u \in C^2(\Omega)$.

<u>Démonstration</u> : Reprendre l'étape 1 sur Ω (au lieu de $\Omega \setminus \{0\}$).

<u>Remarque 1</u> : Le théorème 3 exprime que si $p \geqslant \frac{N}{N-2}$, toute singularité isolée pour l'équation (1) est <u>éliminable</u> (1). Lorsque $p < \frac{N}{N-2}$ des singularités isolées peuvent appraître et on sait même les <u>classifier</u> (voir Véron [11] et Brezis-Lieb [4]). Par exemple si $N = 3$, $p = 3/2$ et si $u \in C^2(\Omega \setminus \{0\})$, $u \geqslant 0$ vérifie

$$- \Delta u + u^{3/2} = 0 \qquad \text{sur} \qquad \Omega \setminus \{0\},$$

alors on a seulement trois possibilités

- ou bien $u(x)$ est régulière en $x = 0$
- ou bien $u(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{C}{|x|}$ avec $C > 0$ constante arbitraire
- ou bien $u(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{144}{|x|^4}$.

<u>Principe de la démonstration du Théorème 2</u>

Supposons pour simplifier que Ω est borné. Soit (f_n) une suite de fonctions régulières telles que

$$\begin{cases} f_n \rightharpoonup f \text{ faiblement au sens des mesures} \\ \|f_n\|_{L^1} \leqslant C . \end{cases}$$

On résoud le problème

---

(1) Plus généralement Véron [12] prouve qu'une variété singulière de dimension d est éliminable pour l'équation (1) si $p \geqslant \frac{N-d}{N-d-2}$.

$$(11)\qquad \begin{cases} -\ \Delta u_n + |u_n|^{p-1}u_n = f_n & \text{sur } \Omega \\ \qquad\qquad u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

[grâce à la méthode variationnelle, par exemple :

$$\underset{v \in H^1_o \cap L^p}{\mathrm{Min}} \left\{\frac{1}{2} \int |\nabla v|^2 + \frac{1}{p}\int |v|^p - \int f_n\, v\right\}]$$

On établit les estimations :

$$(12)\qquad \begin{cases} \|\Delta u_n\|_{L^1} \leqslant C \\ \|u_n\|_{L^p} \leqslant C \end{cases}$$

(ces estimations sont naturelles : chaque terme de (11) reste borné dans L^1 quand la somme reste bornée).

On applique alors un résultat de compacité :

<u>Lemme 1</u> : L'ensemble :

$$\{v \in W^{1,1}_o(\Omega)\ ,\qquad \Delta v \in L^1 \quad \text{et} \quad \|\Delta v\|_{L^1} \leqslant 1\}$$

est relativement compact dans $L^q(\Omega)$ pour chaque $q < \frac{N}{N-2}$.

A l'aide du Lemme 1 on peut extraire une sous-suite (encore notée u_n) telle que

$$\begin{cases} u_n \to u \quad \text{dans } L^q(\Omega)\ , \quad \forall\, q < \frac{N}{N-2} \\ |u_n|^{p-1}u_n \to |u|^{p-1}u \quad \text{dans } L^1(\Omega) \end{cases}$$

(on utilise ici de façon essentielle l'hypothèse $p < \frac{N}{N-2}$)

On en déduit que u vérifie en particulier :

$$(13)\qquad -\int u\,\Delta\varphi + \int |u|^{p-1}u\varphi = \int f\,\varphi$$

$$\forall\, \varphi \in C^2(\bar{\Omega})\ ,\quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\ .$$

Ceci est la définition d'une solution faible de (1) ; on montre enfin que (13) admet au plus une solution.

Remarque 2 : Lorsque $f \in L^1(\Omega)$ on conclut sans faire appel au Lemme de compacité, mais en utilisant un argument de suite de Cauchy. Soit (f_n) une suite de fonctions régulières telles que $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$ (fortement). Soit u_n la solution de (11). Bien entendu, on a les estimations (12) mais de plus on a

$$\int \big|\, |u_n|^{p-1}u_n - |u_m|^{p-1}u_m \big| \leqslant \int |f_n - f_m|\ .$$

Par conséquent :

$$u_n \to u \quad \text{dans} \quad L^q(\Omega) \qquad \forall\, q < \frac{N}{N-2}$$

et de plus

$$|u_n|^{p-1}u_n \to |u|^{p-1}\,u \qquad \text{dans} \quad L^1(\Omega)$$

(sans hypothèse sur p).

§ 3. LE CAS PARABOLIQUE

Considérons maintenant le problème

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + |u|^{p-1}u = 0 & \text{sur} \quad Q = \Omega \times\,]0,T[\\ u(x,t) = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times\,]0,T[\\ u(x,0) = f(x) & \text{sur} \quad \Omega \end{cases}$$

avec $1 < p < \infty$; la donnée initiale f(x) appartient à $L^1(\Omega)$ ou plus généralement est une mesure. Lorsque $f \in L^1(\Omega)$ on a le :

<u>Théorème B</u> : On suppose que Ω est borné régulier ou bien que $\Omega = \mathbb{R}^N$. Alors pour tout $f \in L^1(\Omega)$ il existe $u \in L^p(Q)$ unique solution de (14) (en un sens à préciser).

Pour établir le Théorème B on peut adapter la démonstration du Théorème A (voir Remarque 2) ou bien utiliser la version non linéaire du Théorème de Hille-Yosida dûe à Crandall- Liggett [7] .

Lorsque f est une <u>mesure</u> la situation est plus complexe. Les résultats suivants sont dûs à Brezis-Friedman [3] .

<u>Théorème 4</u> : On suppose que $p \geqslant \frac{N+2}{N}$ $(N \geqslant 1)$. Alors <u>il n'existe pas</u> de fonction $u \in L^p_{loc}(Q)$ vérifiant

$$u_t - \Delta u + |u|^{p-1}u = 0 \qquad \text{dans} \qquad \mathcal{D}'(Q)$$

telle que

$$\lim_{t \to 0} \text{ ess} \int u(x,t)\ \varphi(x) = \varphi(0) \qquad \forall\ \varphi \in C_c(\Omega) .$$

Donc, par exemple $(N = 1,\ p = 3)$ <u>il n'existe pas de solution locale</u> du problème

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u^3 = 0 \\ \qquad u(x,0) = \delta(x). \end{cases}$$

Par contre si $p < \frac{N+2}{N}$, on a un résultat positif.

<u>Théorème 5</u> : On suppose que Ω est borné régulier ou bien que $\Omega = \mathbb{R}^N$. Soit $p < \frac{N+2}{N}$. Alors pour tout $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ (mesure bornée), il existe $u \in L^p(Q)$ unique solution de (14) (en un sens à préciser [(1)]) .

Comme pour le cas elliptique le théorème 4 se déduit d'un résultat

(1) en particulier u est régulière sur $\bar{\Omega} \times]0,T[$ et

$$\lim_{t \to 0} \int u(x,t)\ \varphi(x) = \int f(x)\ \varphi(x) \qquad \forall\ \varphi \in C_c(\Omega).$$

concernant l'élimination des singularités :

<u>Théorème 6</u> : On suppose que $p \geqslant \frac{N+2}{N}$ $(N \geqslant 1)$. Soit $u \in L^p_{loc}(Q)$ vérifiant

$$u_t - \Delta u + |u|^{p-1}u = 0 \qquad \text{dans} \qquad \mathcal{D}'(Q)$$

et

$$\lim_{t \to 0} \text{ ess} \int u(x,t)\ \varphi(x) = 0 \qquad \forall\ \varphi \in C_c(\Omega \setminus \{0\})$$

Alors $u \in C^2(\Omega \times [0,T[)$.

On notera que le <u>Théorème 6 contraste avec la situation linéaire</u> usuelle puisque la solution élémentaire $E(x,t)$ de l'équation de la chaleur vérifie :

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \Delta E = 0 \qquad \text{sur} \qquad Q$$

et

$$\lim_{t \to 0} \int E(x,t)\ \varphi(x) = 0 \qquad \forall\ \varphi \in C_c(\Omega \setminus \{0\}) ,$$

mais $E(x,t)$ est singulière au point $(0,0)$.

<u>Remarque 3</u> : Lorsque $p < \frac{N+2}{N}$ il existe des fonctions $u(x,t)$ vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + |u|^{p-1}u = 0 & \text{sur} \quad Q \\ u(x,0) = 0 & \text{pour } x \neq 0 \end{cases}$$

avec u régulière en tout point $(x,t) \neq (0,0)$ et u singulière en $(0,0)$ (appliquer le Théorème 5, par exemple avec $f = \delta$). Mais on ne sait pas encore classifier les singularités (voir Remarque 1).

REFERENCES

[1] Ph. Benilan, H. Brezis : Some variational problems of the Thomas-Fermi type, in Variational inequalities, Cottle, Gianessi, Lions ed., Wiley (1980) p. 53-73.

[2] Ph. Benilan, H. Brezis, M. Crandall : A semi-linear elliptic equation in $L^1(\mathbb{R}^N)$, Ann. Sc. Norm. Pisa 2 (1975) p. 523-555.

[3] H. Brezis, A. Friedman : Non linear parabolic equations involving measures as initial conditions, J. Math. Pures et Appl. (à paraître).

[4] H. Brezis, E. Lieb : Long range potentials in Thomas-Fermi theory, Comm. Math. Physics 65 (1979) p. 231-246.

[5] H. Brezis, W. Strauss : Semi linear, second order elliptic equations in L^1, J. Math. Soc. Japan 25 (1973) p. 565-590.

[6] H. Brezis, L. Véron : Removable singularities for some non linear elliptic equations, Archive Rat. Mech. Anal. 75 (1980) p. 1-6 .

[7] M. Crandall, T. Liggett : Generation of semi-groups of non linear transformations on general Banach spaces, Amer. J. Math. 93 (1971) p. 265-298.

[8] T. Kato : Schrödinger operators with singular potentials, Israel J. Math. 13 (1972) p. 135-148.

[9] E. Lieb, B. Simon : The Thomas-Fermi theory of atoms, molecules and solids, Adv. in Math. 23 (1977) p. 22-116.

[10] C. Loewner, L. Nirenberg : Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations, in Contributions to Analysis Acad. Press (1974) p. 245-272.

[11] L. Véron : Singular solutions of some non linear elliptic equations, J. Non linear Analysis, 5 (1981) p. 225-242.

[12] L. Véron : Singularités éliminables d'équations elliptiques non linéaires, J. Diff. Eq. 41 (1981) p. 87-95.

* * * *