Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

G. MÉTIVIER

Non hypoellipticité analytique pour des opérateurs à caractéristiques doubles

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. nº 12, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A11_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1981-1982

NON HYPOELLIPTICITE ANALYTIQUE POUR DES OPERATEURS A CARACTERISTIQUES DOUBLES

par G. METIVIER

Exposé n° XII

19 Janvier 1982

1. INTRODUCTION

Pour commencer rappelons brièvement comment se présente le problème de l'hypoellipticité analytique pour les opérateurs à caractéristiques doubles : considérons un opérateur (pseudo)-différentiel analytique P, de symbole principal réel p; soit (x_o, ξ_o) un point où $p(x_o, \xi_o) = 0$; on suppose que près de (x_o,ξ_o) l'ensemble caractéristique $\Sigma = p^{-1}(0)$ est une variété réelle analytique et que p s'annule exactement à l'ordre deux sur Σ ; on suppose enfin que P est sous-elliptique avec perte d'une dérivée.

Alors, selon F. Trèves [7] :

Théorème 1 : Si la variété Σ est symplectique autour de (x_o, ξ_o), P est hypoelliptique analytique au voisinage de (x_o, ξ_o).

Le problème est donc de savoir ce qui se passe lorsque Σ n'est pas symplectique en (x_o, ξ_o), et depuis le contre exemple de Baouendi-Goulaouic [1] on sait bien qu'il peut y avoir non hypoellipticité analytique. Dans [4] ce contre exemple a été étendu, essentiellement pour des opérateurs du type "somme de carrés de champs de vecteurs" et cet exposé se propose de donner une extension des résultats de [4] , la généralisation ayant lieu dans trois directions :

1) passage à la classe "naturelle" d'opérateurs à caractéristiques doubles introduite ci-dessus,
2) affaiblissement de l'hypothèse de non symplecticité,
3) suppression de l'hypothèse de transversalité pour étudier des opérateurs du type $D_x^2 + (x^2 + y^2)D_y^2$ (cf. [5])

Pour énoncer le résultat on utilisera la notion de feuille canonique : en un point $\rho \in \Sigma \subset T^*\mathbb{R}^n\backslash 0$, notons N_ρ le noyau de la restriction à Σ de la 2-forme canonique $\sigma = \sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge dx_j$ $(N_\rho = T_\rho\Sigma \cap T_\rho\Sigma^\perp$ l'orthogonalité étant relative à $\sigma)$. Alors on appelle feuille canonique (non triviale) de Σ toute variété analytique $V \subset \Sigma$ (de dimension $\geqslant 1$), connexe, et dont l'espace tangent est en tout point exactement $T_\rho V = N_\rho$.

Alors, avec les mêmes hypothèses sur P que pour le théorème 1, on a :

Théorème 2 : S'il existe une feuille canonique non triviale de Σ passant par (x_o,ξ_o), l'opérateur P n'est pas hypoelliptique analytique au voisinage de x_o.

Lorsque le rang de $\sigma|_\Sigma$ est constant et $<\dim \Sigma$, Σ est feuilletée par des feuilles canoniques non triviales; par conséquent P ne peut pas être hypoelliptique analytique. Plus généralement si Σ n'est pas symplectique en tout point d'un voisinage de (x_o, ξ_o), on peut trouver des points (x,ξ) aussi près que l'on veut de (x_o,ξ_o), autour desquels $\sigma|_\Sigma$ est de rang constant $<\dim \Sigma$; on a donc comme corollaire du théorème 2 :

<u>Théorème 3</u> : Si la variété Σ est non symplectique en tout point d'un voisinage de (x_o,ξ_o) (en particulier si Σ est de dimension impaire), P n'est pas hypoelliptique analytique au voisinage de x_o.

Le problème laissé en suspens par les théorèmes 1 et 3 est le cas où Σ est symplectique sauf en un ensemble de points $\Sigma' \ni \{x_o, \xi_o\}$; le théorème 2 permet de conclure lorsque Σ' contient une feuille canonique non triviale de Σ , le cas extrême étant celui où Σ' est exactement une feuille canonique : un exemple d'une telle situation est donné par l'opérateur dans $\mathbb{R}^4$:

$$D_x^2 + (xD_y + D_z)^2 + D_t^2 + (y + t(x^2 + y^2 + z^2))^2 D_y^2 \tag{1}$$

Lorsque Σ' ne contient pas de feuille canonique le problème de l'hypoellipticité analytique est largement ouvert; disons que si l'existence d'une feuille canonique semble indispensable pour faire marcher la construction ci-dessous, il n'y a pas lieu de croire (pour le moment) que cela soit un critère décisif pour le problème de l'hypoellipticité analytique. Par exemple, on sait que l'opérateur suivant n'est pas hypoelliptique analytique (Helffer-Pham The Lai-Robert [3] [6]) et il n'y a pas de feuille canonique non triviale dans sa variété caractéristique :

$$D_x^2 + (x^2 D_y + D_z)^2$$

(cet opérateur n'étant pas sous-elliptique avec perte d'une dérivée, par confort moral on aimerait bien savoir ce qui se passe pour
$D_x^2 + (x^2D_y + D_z)^2 + |D_y|$ ou $D_x^2 + (x^2D_y + D_z)^2 + D_t^2 + t^2D_y^2$).

Par contre, le théorème 2 est tout-à-fait cohérent avec un théorème de Grigis-Schapira-Sjöstrand [2] qui montrent que pour les opérateurs considérés ici il y a propagation des singularités analytiques le long des feuilles canoniques.

Terminons cette introduction en mentionnant rapidement une application du théorème 2 au problème de ∂-Neumann :

Théorème 4 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ faiblement pseudoconvexe, dont le bord $\partial\Omega$ est une variété analytique réelle. On suppose que par le $x_o \in \partial\Omega$ passe une variété analytique complexe $V^- \subset \partial\Omega$, de dimension $d \geq 1$, et qu'en tout point de V la forme de Lévi a exactement d valeurs propres nulles.

Alors le problème du $\bar{\partial}$-Neumann dans les (O,q)-formes ($q < n$) n'est pas hypoelliptique analytique au voisinage de x_o.

2. MODELES CANONIQUES

Pour démontrer le théorème 2 l'idée est de construire des solutions (asymptotiques) de $Pu = 0$. En fait il y a différents types de construction à faire correspondant à différentes situations géométriques. On commence par classifier un peu ces situations.

Nous sommes en présence d'une variété analytique réelle $\Sigma \subset T^*\mathbb{R}^n\backslash 0$, qui contient une feuille canonique non triviale V et (x_o,ξ_o) est un point de V. Σ est décrite par des équations $u_1 = \ldots = u_{d+2r} = 0$ homogènes de degré 1 ($d = \dim V$, $2r = \text{rang}\ \sigma_{|\Sigma}\ (x_o,\xi_o)$). Après combinaisons linéaires on peut supposer qu'aux points $\rho \in V$, $T_\rho V = N_\rho$ est engendré par les champs $H_{u_1},\ldots,H_{u_d}$. La variété $\tilde{\Sigma}$ d'équations $u_{d+1} = \ldots = u_{d+2r} = 0$ est symplectique et dans des coordonnées canoniques homogènes convenables $x = (x',y)$, $\xi = (\xi',\eta)$, $\tilde{\Sigma}$ est d'équations $g = 0$, $\eta = 0$.

Pour la feuille V deux cas de figure peuvent se présenter :

Lemme 1 : ou bien V est transverse à l'axe du cône, ou bien V est homogène.

Preuve : Le champ radial $L = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ commute aux H_{u_j}. V étant engendré par les flots des H_{u_j} ($j = 1,\ldots,d$) on voit que si L est tangent à V en un point, il est tangent à V en tout point.

Dans le cas transverse on montre aisément que dans des coordonnées canoniques homogènes convenables $x = (t,y,z)$, $\xi = (\tau,\eta,\zeta)$, V est donné par les équations :

$$y = 0 \quad , \quad \eta = 0 \quad , \quad \tau = 0 \quad , \quad z = 0 \quad , \quad \zeta = (0,\ldots,0,1)$$

Dans le cas homogène, on peut mettre les équations de V sous la forme suivante :

$$y = 0,\quad \eta = 0\ ,\quad \tau = 0\ ,\quad z = 0\ ,\quad \zeta' = 0$$

où l'on note $z = (z',z_\nu)$, $\zeta = (\zeta', \zeta_\nu)$.

A partir de là on obtient facilement :

<u>Proposition 1</u> : Il existe des coordonnées canoniques homogènes $x = (t,y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\nu$, $\xi = (\tau,\eta,\zeta)$ telles que les équations de Σ aient la forme suivante :

i) dans le cas V transverse :

$$y = 0\ ;\quad \eta = 0\ ;\quad \tau_j = \phi_j(t,z,\zeta)$$

ii) dans le cas V homogène :

$$y = 0\ ;\quad \eta = 0\ ;\ \tau_j = \phi_j(t,z',\zeta)\ ;\ z_\nu = \psi(t,z',\zeta)$$

les fonctions Φ_j et ψ s'annulant à l'ordre 2 la variété $z = 0$, $\zeta' = 0$.

Pour des raisons techniques dans le cas V homogène on distingue un certain nombre de sous-cas, et finalement on distinguera les cas suivants :

<u>Cas 1</u> : V transverse à l'axe du cône

Exemples : $D_t^2 + D_y^2 + y^2D_z^2$

$$D_{t_1}^2 + (D_{t_2} + t_1z^2D_z)^2 + D_y^2 + y^2D_z^2$$

<u>Cas 2</u> : V homogène de dim $\geqslant 2$

Exemples : $D_t^2 + D_y^2 + (y^2 + z^2)D_z^2$

opérateur (1)

<u>Cas 3</u> : V homogène de dim 1 et dim $\Sigma \geqslant 2$

Exemples : $D_y^2 + (y^2 + z_1^2)(D_{z_1}^2 + D_{z_2}^2)$

<u>Cas 4</u> : Σ est réduite à l'axe du cône

Exemples : $D_y^2 + (y^2 + z^2)D_z^2$.

Dans la suite de l'exposé on va surtout esquisser la démonstration du théorème 2 dans le cas 1. Le cas 2 se traite de manière similaire avec des complications techniques supplémentaires. Le cas 3 peut se ramener au cas 1, car dans tout voisinage de (x_o,ξ_o) il existe des feuilles transverses à l'axe du cône. Le cas 4 se traite par une construction complètement différente, qu'on esquissera au paragraphe 5.

3. METHODE DE DEMONSTRATION. CAS dim $\Sigma \geqslant 2$

L'idée est de construire des solutions asymptotiques de Pu = O sous la forme :

$$u_\lambda(x) = e^{i\lambda x\,\xi_o}\, a(\sqrt{\lambda}\,(x - x_o),\lambda)$$

On a :

$$Pu_\lambda(x) = e^{i\lambda x\xi_o}\, P(x_o + \frac{y}{\sqrt{\lambda}}, \lambda\,\xi_o + \sqrt{\lambda}\, D_y)a(y,\lambda)\Big|_{y = \sqrt{\lambda}\,(x - x_o)}$$

On cherche a sous forme asymptotique $a(y,\lambda) \sim \sum_{j\geqslant o} \lambda^{-j/2} a_j(y)$, et en écrivant le développement de Taylor :

$$P(x_o + \frac{y}{\sqrt{\lambda}}, \lambda\xi_o + \sqrt{\lambda}\, D_y) \sim \lambda^{m-1} \sum_{j\geqslant o} \lambda^{-j/2} P_j(y,D_y)$$

(m étant l'ordre de P), on aboutit aux équations :

$$\begin{cases} P_o a_o = 0 \\ P_o a_j = - \sum\limits_{\ell=1}^{j} P_\ell\, a_{j-\ell} \end{cases}$$

La première étape consiste à résoudre les équations $P_o a_o = 0$ et $P_o a = b$ dans des (chaines d') espaces convenables. Ensuite il faut montrer que les opérateurs P_ℓ opèrent de manière convenable dans ces chaines d'espaces et pour cela on est amené à faire des hypothèses restrictives sur la forme des P_ℓ, c'est-à-dire en fait sur le développement de Taylor en (x_o,ξ_o) du symbole principal de P. Or la traduction géométrique de ces hypothèses s'avère être précisément l'existence d'une feuille canonique passant par (x_o,ξ_o).

Finalement on aboutit pour les a_j à des estimations qui sont grosso modo du type suivant :

(2) $$|D_y^\alpha a_j(y)| \leqslant C^{|\alpha|+j+1} (|\alpha|+j)!\, e^{K|y|}$$

En outre on fait en sorte que $a_o(0) = 2$. On pose $a(x,\lambda) = \sum_{j<\varepsilon\sqrt{\lambda}} \lambda^{-j/2} a_j(\sqrt{\lambda}x)$ et $u_\lambda(x) = e^{i\lambda x.\xi_o} a(x,\lambda)$. ($\varepsilon > 0$ assez petit); on a alors les estimations suivantes pour x voisin de x_o :

(3) $$\begin{cases} |D_x^\alpha P u_\lambda(x)| \leqslant C_\alpha e^{K\sqrt{\lambda}|x|-\delta\sqrt{\lambda}} \\ |D_x^\alpha a(x,\lambda)| \leqslant M^{|\alpha|+1} |\alpha|!\, \lambda^{|\alpha|/2} e^{K\sqrt{\lambda}|x|} \\ |a(0,\lambda)| \geqslant 1 \quad \text{pour } \lambda \text{ grand}. \end{cases}$$

Ces estimations ne sont pas suffisantes pour construire directement une fonction non analytique telle que P_u le soit : il faudrait essentiellement pour Pu_λ une estimation en $e^{-\delta\lambda}$ et pas seulement en $e^{-\delta\sqrt{\lambda}}$. Cependant on peut conclure en utilisant les inégalités de [4] (Théorème 3.1), ou en procédant de la façon suivnate :

on appellera parametrix analytique de P sur le voisinage $\omega \times \Gamma$ de (x_o,ξ_o) un opérateur R borné de $H^s_{comp}(\tilde{\omega})$ dans $H^{-s}_{loc}(\tilde{\omega})$ (pour un certain $s \geqslant 0$, et $\tilde{\omega}$ voisinage de $\bar{\omega}$), préservant l'analyticité locale dans ω, et tel que, si $\varphi \in C_o^\infty(\tilde{\omega})$ vaut 1 sur ω, le front d'onde analytique de $u - R\varphi pu$ ne rencontre pas $\omega \times \Gamma$, pour tous les u de $H^{s+m}_{comp}(\tilde{\omega})$.

Si P est à symbole principal réel et sous-elliptique avec perte d'une dérivée (plus généralement si P est résoluble) il existe R_1 tel que $PR_1 u = u$ pour $u \in C_o^\infty(\omega)$ (ω voisinage assez petit de x_o). Si P est hypoelliptique analytique et si $\varphi \in C_o^\infty(\omega)$ vaut 1 sur un voisinage de x_o, $R = R_1\varphi$ est une parametrix analytique de P au voisinage de x_o. Le théorème 2 résulte donc du théorème suivant :

<u>Théorème 5</u> : Soit P un opérateur dont le symbole principal s'annule, au voisinage de (x_o,ξ_o), exactement à l'ordre 2 sur une variété Σ de dimension $\geqslant 2$. Si par (x_o,ξ_o) passe une feuille canonique non triviale de Σ. P n'admet pas de parametrix analytique au voisinage de (x_o,ξ_o).

Montrons rapidement pourquoi les estimations (3) rendent impossible l'existence d'une paramétrix analytique, et nous aurons réduit la démonstration du théorème 5 (et du théorème 2 dans le cas dim $\Sigma \geqslant 2$) à la construction de solutions asymptotiques convenables.

Supposons que R soit une parametrix analytique sur le voisinage $\omega \times \Gamma$ de (x_o,ξ_o). Fixons $\varphi \in C_o^\infty(\tilde{\omega})$ valant 1 sur ω. Donnons nous χ Gevrey d'ordre σ $(1 < \sigma < 2)$ à support dans la boule $|x| \leqslant 2$ et valant 1 pour $|x| \leqslant 1$. Pour $\rho > 0$ on notera $\chi_\rho(x) = \chi(x/\rho)$ et $u_{\rho,\lambda} = \chi_\rho\, u_\lambda$. On prend ρ assez petit pour que le support de $\chi_{6\rho}$ soit contenu dans ω. D'après (3) on a :

$$(4) \qquad |D_x^\alpha P u_{6\rho,\lambda}(x)| \qquad C_\alpha\, e^{(K6\rho\, -\delta)\sqrt{\lambda}}$$

$$\text{pour } |x| \leqslant 6\rho$$

avec les mêmes constantes K et δ qu'en (3).

Par ailleurs on écrit que :

$$u_{\rho,\lambda} = \chi_\rho\{R\, \chi_{3\rho}\, Pu_{6\rho,\lambda} + R\varphi[\chi_{3\rho},P]u_{6\rho,\lambda} + (I - R\,\varphi\, P)u_{3\rho,\lambda}\}$$

$$= \chi_\rho\{u'_{\rho,\lambda} + v_{\rho,\lambda} + w_{\rho,\lambda}\}$$

$v_{\rho,\lambda}$ est analytique pour $|x| < 3\rho$ et $w_{\rho,\lambda}$ est analytique sur $\omega \times \Gamma$. En outre les normes dans H^{s+m} de $u_{6\rho,\lambda}$ et $u_{3\rho,\lambda}$ sont en $O(e^{K'\rho\sqrt{\lambda}})$ $(K' = 12K)$. On en déduit avec (4) que l'on a :

$$(5) \qquad |\hat{u}_{\rho,\lambda}(\xi)| = O(e^{(K'\rho\, -\, \delta)\sqrt{\lambda}}) + O(e^{K'_\rho\sqrt{\lambda} - \alpha|\xi|^{1/\sigma}})$$

pour ξ dans un cône $\Gamma' \subset\subset \Gamma$ ($\alpha > 0$ est indépendant de ρ).

D'autre part les estimations (3) montrent que :

$$(6) \qquad |\grave{u}_{\rho,\lambda}(\xi)| = O(e^{(2K\rho -\, \delta')\sqrt{\lambda}}(1 + |\xi|)^{-(n+1)})$$

pour $|\xi - \lambda\xi_o| \geqslant \varepsilon\lambda$, $\lambda \geqslant \rho^{-2/(2-\ )}$, avec δ' (dépendant de ε) indépendant de ρ.

Choisissant ρ assez petit ($\rho \leq \delta/2K'$, $\rho \leq \delta'/4K$) on déduit de (5) et (6) que pour λ grand on a

$$|u_{\rho,\lambda}(0)| = O(e^{-\delta'' \sqrt{\lambda}})$$

avec $\delta'' > 0$, et ceci est incompatible avec la dernière estimation de (3).

4. SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES. CAS TRANSVERSE

Dans ce paragraphe nous donnons quelques détails sur la démonstration du théorème 5 dans le cas où la feuille canonique V est transverse à l'axe du cône. Le théorème 5 est clairement microlocal et invariant par transformation canonique : on se placera donc dans des coordonnées $x = (t,y,z) \in \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''} \times \mathbb{R}^{\nu}$ telles que les équations de Σ aient la forme indiquée à la proposition 1. Pour simplifier on supposera aussi que le symbole principal de P est réel.

Nous cherchons a solution de $P(x, \lambda\xi_o + D_x)a \sim 0$ sous la forme

$$a(x,\lambda) \sim \sum_{j\geq o} \lambda^{-j/2} a_j(\sqrt{\lambda}\, t_1, \sqrt{\lambda} y, \sqrt{\lambda} z, t)$$

les fonctions $a_j(s,y,t)$ étant définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n''} \times \mathbb{R}^{\nu} \times \Omega$, Ω étant un voisinage de O dans $\mathbb{R}^{n'}$.

Le calcul asymptotique s'obtient alors en effectuant le développement de P le long de V :

$$P(t,\frac{y}{\sqrt{\lambda}}, \frac{z}{\sqrt{\lambda}} , \sqrt{\lambda}\, D_s + D_t, \sqrt{\lambda}\, D_y, \lambda\zeta_o + \sqrt{\lambda} D_z) \sim \sum_{j\geq o} \lambda^{m-f-j/2} P_j$$

où les P_j sont de la forme :

$$(7) \quad P_j = \sum_{|\alpha|+|\alpha'|+|\beta|+|\beta'|+k+2|\gamma|\leq j+2} P_{j,\alpha,\alpha',\beta,\beta',k,\gamma}(t) y^{\alpha} D_y^{\alpha'} z^{\beta} D_z^{\beta'} D_s^k D_t^{\gamma}$$

les coefficients étant holomorphes en t et vérifiant :

$$(8) \qquad |P_{j,\alpha,\alpha',\beta,\beta',k,\gamma}(t)| \leq C^{j+1}(2 + j-|\alpha| - |\alpha'|-|\beta|-|\beta'| -k-2|\gamma|)!$$

En outre P_o apparaît comme un opérateur $P_o(t,y,D_y,D_o)$ en y, D_y, D_s dépendant de t comme paramètre. On peut faire en sorte que :

$$(9) \qquad P_o(0;y,D_y,D_s) = D_s^2 + \sum_{j=1}^{n''} \mu_j(y_j^2 + D_{y_j}^2) + \mu_o$$

les μ_j $(j = 1,\dots,n'')$ étant des réels > 0.

Enfin dans l'expression (7) de P_1 les coefficients des termes pour lesquels $|\beta|+|\beta'| + 2|\gamma| = 3$ sont nuls.

Pour étudier P_o on développe suivant la base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^{n''})$ des fonctions de Hermite $\varphi_\alpha(\alpha \in \mathbb{N}^{n''})$. On pose $\lambda_\alpha = \sum_{j=1}^{n''} (2\alpha_j + 1)\mu_j + \mu_o$ et on note δ_α une racine carrée à partie réelle $\geqslant 0$ de δ_α. On choisit alors δ réel > 0 distinct de tous les $\mathcal{R}e\, \delta_\alpha$ et tel que $\delta > \mathcal{R}e\, \delta_o$; on pose

$$L = \max_{\mathcal{R}e\, \delta_\alpha < \delta} (1 + |\delta_\alpha|)$$

et on introduit l'espace G des fonctions d'une variable s sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\|u\|_G = \sup_{j\in \mathbb{N}} \sup_{s\in \mathbb{R}} L^{-j} e^{-\delta|s|} |D_s^j u(s)| < +\infty .$$

On introduit aussi ψ_β $(\beta \in \mathbb{N}^\nu)$ la base des fonctions de Hermite en z, et pour $\varepsilon > 0$ on note E_ε [resp F_ε] l'espace des fonctions

$$u(s,y,z,t) = \sum_{\alpha;\beta} u_{\alpha,\beta}(s,t)\, \varphi_\alpha(y)\psi_\beta(y)$$

telles que les $u_{\alpha,\beta}$ soient holomorphes en t, $|t| < \varepsilon$, à valeurs dans G et vérifient :

$$\|u\|_{F_\varepsilon} = \sup_{\alpha,\beta} \sup_{|t|<\varepsilon} e^{\varepsilon(|\alpha| + |\beta|)} \|u_{\alpha,\beta}(.,t)\|_G < +\infty$$

$$[\text{resp} \|u\|_{F_\varepsilon} = \sup_{\alpha,\beta} \sup_{|t|<\varepsilon} \frac{e^{\varepsilon(|\alpha|+|\beta|)}}{1 + |\alpha|} \|u_{\alpha,\beta}(.,t)\|_G < +\infty].$$

On a alors :

<u>Lemme 2</u> : i) il existe $\varepsilon_o > 0$ et $a_o \in F_{\varepsilon_o}$ solution de $P_o a_o = 0$ et telle que $a_o(0) = 1$.

ii) il existe un opérateur R borné de E_ε dans F_ε uniformément en $\varepsilon \in]0,\varepsilon_o]$, et tel que $P_o R = Id$.

<u>Preuve</u> : Il suffit de faire la démonstration pour l'opérateur Q du membre de droite de (9) et d'appliquer un argument élémentaire de perturbation.

La fonction suivante est dans F_1 et solution de $Q\,\tilde{a}_o = 0$ et $\tilde{a}_o(0) \neq 0$:

$$\tilde{a}_o(s,y,z,t) = e^{\delta_o s}\ \varphi_o(y)\ \psi_o(z)$$

Pour résoudre dans F_ε l'équation $Q_o a = b \in E_\varepsilon$ s'il suffit de résoudre les équations

$$(D_s^2 + \delta^2)u = f \tag{10}$$

et de montrer que si $f \in G$ il existe une solution $u \in G$ telle que $\|u\|_G \leqslant \frac{C_o}{1+|\alpha|}\|f\|_G$. On obtient cette solution en convolant f par $e^{-\delta_\alpha |s|}$ si $\Re e\ \delta_\alpha > \delta$, et en résolvant le problème de Cauchy avec données initiale $u(0) = D_s u(0) = 0$ si $\Re e\ \delta_\alpha < \delta$.

La définition des E_ε et F_ε montre que les opérateurs D_s, y_j, D_{y_j} , z_k, D_{z_k} et D_t sont d'ordre respectifs 0, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2 et 1 dans ces chaînes. En outre les $y^\alpha D_y^{\alpha'} D_s^k$ pour $|\alpha| + |\alpha'| + k \leqslant 2$ sont bornés de F_ε dans E_ε . On voit alors que les opérateurs P_ℓ sont d'ordre ℓ de la chaîne F_ε dans la chaîne E_ε et si on définit par récurrence sur j,

$$a_j = -R \sum_{=1}^{j} P_\ell\, a_{j-\ell}$$

à partir de la fonction a_o du lemme 2, on voit que les a_j sont dans F_ε pour tout $\varepsilon < \varepsilon_o$ et que l'on a, avec une constante C convenable :

$$\|a_j\|_F \leqslant C\ \left(\frac{C_j}{\varepsilon_o - \varepsilon}\right)^j$$

Les estimations (2) en résultent et le théorème 5 suit .

5. LE CAS $\dim \Sigma = 1$

Pour terminer cet exposé indiquons très succintement comment se traite le cas où la dimension de Σ est 1. Pour cela limitons-nous à l'exemple dans $\mathbb{R}^2$:

$$P = D_x^2 + (x^2 + y^2)\, D_y^2 .$$

En fait, il s'avère que le "bon" exemple serait plutôt :

$$P_1 = D_x^2 + x^2 D_y^2 + (yD_y + \frac{1}{2}\, x\, D_x)^2$$

En effet, on vérifie aisément qu'il existe une (unique) fonction $f(t)$ $(t > 0)$ telle que :

$$\begin{cases} t^2 f''(t) + 3t\, f'(t) + f(t) - 4t^2 f(t) = 0 \\ f(t) = e^{-2t}\, t^{-3/2}\, (1 + O(t^{-1})) \qquad (t \to +\infty) \end{cases}$$

On définit alors :

$$u(x,y) = \int_1^\infty e^{it^2 y - (tx)^2/2}\, f(t)\, dt$$

On voit alors que $P_1 u(x,y) = \frac{1}{4}(f'(1) + x^2 + 1 - 2iy) f(1)) e^{iy - x^2/2}$ est analytique à l'origine alors que u ne l'est pas puisque pour $\varepsilon < 0$ assez petit :

$$|\partial_y^k\, u(0,0)| = |\int_1^\infty t^{2k}\, f(t)dt| \geqslant \varepsilon^{+(k+1)}(2k)!$$

Pour montrer la non hypoellipticité analytique de P l'idée est de considérer des fonctions du type :

$$u(x,y) = \int e^{it^2 y}\, a(tx,t)dt$$

L'équation $Pu = 0$ conduit à une équation du type :

$$t^2(D_x^2 + x^2 + D_t^2)a + t\,\mathcal{P}_1 a + \mathcal{P}_2 a = 0 \tag{11}$$

($\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ étant des opérateurs en D_t, D_x et x)

On résoud (11) asymptotiquement en t et on montre alors que

$$Pu = \int e^{it^2 y} b(tx,t)dt$$

avec $[b(x,t)| = O(e^{-t \text{ Log } t})$.

Cette estimation n'implique malheureusement pas que Pu soit analytique, mais on peut conclure soit en utilisant les inégalités de [4] soit en suivant une démarche parallèle à celle indiquée au paragraphe 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. BAOUENDI, C. GOULAOUIC : Non analytic hypoellipticity for some degenerate operators; Bull. Amer. Math. Soc. , 78 (1972), p.483.

[2] A. GRIGIS, P. SCHAPIRA, J. SJÖSTRAND : Propagation des singularités analytiques pour des opérateurs à caractéristiques multiples; C. R. Acad. Sc., 293 (1981) p. 397-400.

[3] B. HELFFER : Conditions nécessaires d'hypoanalyticité pour des opérateurs invariants à gauche sur un groupe nilpotent gradué; Séminaire d'Analyse Univ. Nantes, n° 12, année 1978-79 .

[4] G. METIVIER : Une classe d'opérateurs non hypoelliptiques analytiques; Indiana J. Math, 29 (1980) p. 823-860.

[5] G. METIVIER : Non hypoellipticité analytique pour $D_x^2 + (x^2 + y^2)D_y^2$; C. R. Acad. Sc., 292 (1981) p.401-404.

[6] PHAM THE LAI, D. ROBERT : Sur un problème aux valeurs propres non linéaires; Israel J. of Math.

[7] F. TREVES : Analytic hypoellipticity of a class of pseudodifferential operators with double characteristics. Comm. in Partial Diff. Equ., 3 (1978), 475-642.

***