Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. Derridj

Inégalités de Carleman et applications au $\bar{\partial}$

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. nº 6, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A7_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1980-1981

INEGALITES DE CARLEMAN ET APPLICATIONS AU $\bar{\partial}$

par M. DERRIDJ

Exposé 18 Novembre 1980

INTRODUCTION

Nous donnons ici quelques résultats concernant le $\bar{\partial}$: résolution d"un "problème de Cauchy" et application au prolongement de formes $\bar{\partial}$-fermées, en particulier des fonctions holomorphes.

Pour cela nous utilisons la méthode des inégalités de Carleman (voir A. Andreotti, E. Vesentini [2]) avec des fonctions poids liées au domaine (pour lequel on veut, par exemple, résoudre un problème de Cauchy) (voir L. Hörmander pour les méthodes L^2 avec poids [5]).

Le but de ce travail est d'essayer d'étendre à quelques domaines dont la forme de Levi peut dégéner et qui ne sont pas pseudoconvexes, des résultats connus, sur le prolongement des fonctions holomorphes. On a des résultats de prolongement local pour des formes $\bar{\partial}$ -fermées, qui, cependant, ne sont satisfaisants que dans le cas des fonctions (voir corollaire 5.2 et Th. 5.3).

Dans le cas strict, le problème de Cauchy a été abordé par R. Nirenberg [8] en utilisant les résultats d'Andreotti-Vesentini.

Dans le cas des formes, signalons les travaux de J. J. Kohn, H. Rossi [4] et A. Andreotti, C. D. Hill [1] .

QUELQUES NOTATIONS

On considère un domaine Ω borné de $\mathbb{C}^n$, une fonction $\varphi \in C^2(\mathbb{C}^n)$, positive. Pour deux fonctions u,v, on note $(u,v)_\varphi = \int_{\mathbb{C}^n} e^{\varphi} u.\bar{v}$, lorsque ceci a un sens; si u est une (O,q)-forme :

$$u = \sum_{|I|=q} u_I d\bar{z}_I ,$$

ainsi que v, on note :

$$(u,v)_\varphi = \sum_{|I|=q} (u_I,v_I)_\varphi .$$

Rappelons que

$$\bar{\partial}u = \sum_{|I|=q} \frac{\partial u_I}{\partial z_i} d\bar{z}_i \quad d\bar{z}_I = \sum_{|J|=q+1} (\Sigma\, \varepsilon_J^{iI} \frac{\partial u_I}{\partial z_i}) d\bar{z}_J$$

où ε^{iI}_{J} est le signe de la permutation $iI \longrightarrow J$.

On notera alors ϑ_φ l'adjoint formel de $\bar\partial$ pour $(\ ,\ )_\varphi$ c'est-à-dire que

$$(\vartheta_\varphi u,v)_\varphi = (u, \bar\partial v)_\varphi \ ,$$

si u est une (0,q)-forme pour tout $v \in \mathcal{D}^{q-1}$ où

$$\mathcal{D}^{q-1} = \{(0,q-1)\text{-formes } C^\infty \text{ à support compact}\}$$

Comme on travaillera sur Ω , on considèrera $\mathcal{D}^{q-1}(\Omega)$ l'espace des (0,q-1)-formes C^∞ à support compact dans Ω . Notons :

$$Q_\varphi(u,v) = (\bar\partial u,\bar\partial v)_\varphi + (\vartheta_\varphi u, \vartheta_\varphi v)_\varphi \quad ,u,v \in \mathcal{D}^q(\Omega)$$

$$\square_\varphi = \bar\partial\, \vartheta_\varphi + \vartheta_\varphi\, \bar\partial$$

Généralement on aura $q \geqslant 1$.

3. UN CALCUL DE $Q_\varphi(u,u)$ POUR $u \in \mathcal{D}^q(\Omega)$ ET SES CONSEQUENCES

En arrangeant d'une certaine façon les termes qui viennent de $\|\bar\partial u\|^2_\varphi$ et $\|\vartheta_\varphi u\|^2_\varphi$, on obtient une formule contenue dans la :

Proposition 3.1 : On a l'égalité

$$(3.1)\quad \left\{ \begin{aligned} Q_\varphi(u,u) &= \sum_{i \notin I} \left\| \frac{\partial u_I}{\partial z_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\, u_I \right\|^2_\varphi \\ &+ \sum_{|J|=q+1} \Big(\sum_{i,j \in J} \int_\Omega e^\varphi \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i \partial z_j}\, u^J_i\, \bar u^J_j \Big) \ ; \quad \forall\, u \in \mathcal{D}^q(\Omega) \end{aligned} \right.$$

où $u^J_i = \varepsilon^{iI}_J u_I$.

Partant de cette égalité, nous allons introduire des hypothèses qui affaiblissent de façon naturelle celles qu'on a dans le cas strict (cas où un certain nombre de valeurs propres de la Hessienne de φ sont strictement positives).

Soient $\lambda_{i,J}$ des fonctions continues (non nécessairement positives) telles que

$$\sum_{i,j \in J} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial z_j} u_i^I u_j^J \geqslant \sum_{i \in J} \lambda_{i,J} |u_i^J|^2 .$$

Posons $\qquad \lambda_I(\varphi) = \sum_{i \notin I} \lambda_{i,(iI)}$

Hypothèse $(*)_q$: $\lambda_q(\varphi) = \inf_{|I|=q} \lambda_I(\varphi) \geqslant 0.$

Corollaire 3.2 : Sous l'hypothèse $(*)_q$ on a

$$\int_\Omega e^\varphi \lambda_q(\varphi) |u|^2 \leqslant Q_\varphi(u,u) \qquad \forall\, u \in \mathcal{D}^q(\Omega) .$$

Dans le cas où $\lambda_q(\varphi)$ est strictement positive dans $\overline{\Omega}$ on en déduit une majoration de $\int_\Omega e^\varphi |u|^2$, par $Q_\varphi(u,u)$. Mais ici, nous nous intéressons au cas non strict. Nous allons cependant avoir une majoration de $\int_\Omega e^\varphi |u|^2$ par $Q_\varphi(u,u)$ en exploitant toute l'égalité 3.1.

Pour mieux éclairer cette partie, considérons des fonctions $\mu : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, de classe C^2 telles que :

$$\mu' \geqslant 1 \ , \ \mu'' \geqslant 0 .$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.3 : On a l'inégalité

$$\int_\Omega e^{\mu(\varphi)} \lambda_q(\varphi) |u|^2 + \frac{1}{C_\mu} \|u\|^2_{\mu(\varphi)} \leqslant Q_{\mu(\varphi)}(u,u) \qquad \forall\, u \in \mathcal{D}^q(\Omega) . \tag{3.2}$$

Cette inégalité nous montre que $\|u\|^2_{\mu(\varphi)}$ est dominé par $Q_{\mu(\varphi)}(u,u)$, mais en utilisant une constante C_μ (qui dépend de μ). Alors que si $\lambda_q(\varphi) \geqslant c > 0$, on aurait une majoration sans constante C_μ .

L'inégalité (3.2) se démontre en utilisant les termes

$$\sum_{i \in I} \left\| \frac{\partial u_I}{\partial z_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} u_I \right\|^2_{\mu(\varphi)}$$

dans l'égalité (3.1), l'inégalité de Poincaré (Ω est borné!) et le fait que :

Hessienne $(\mu(\varphi)) = \mu'(\varphi).\text{Hessienne } (\varphi) + \mu''(\varphi)|\partial\phi|^2$, donc $\geqslant$ Hessienne (φ) . Le fait que $\|u\|^2_{\mu(\varphi)}$ est dominé par $Q_{\mu(\varphi)}(u,u)$, permet de dire que, étant donné $f \in L^2_{(0,q)}(\Omega)$, il existe u_μ unique dans $\mathcal{H}_\mu$ ($\mathcal{H}_\mu$ complété de $\mathcal{D}^q(\Omega)$ pour $Q_{\mu(\varphi)}$) tel que :

$$Q_{\mu(\varphi)}(u_\mu,\psi) = (f,\psi)_{\mu(\varphi)} \qquad \forall\, \psi \in \mathcal{H}_\mu$$

(c'est de l'analyse fonctionnelle).

Supposons de plus $\bar{\partial} f = 0$, alors en posant

$$v_\mu = \vartheta_{\mu(\varphi)} u_\mu$$

on obtient (voir [2])

$$\bar{\partial} v_\mu = f \ .$$

4. INEGALITES DE CARLEMAN ET APPLICATIONS

Dorénavant μ et v_μ ont les significations données précédemment.

Proposition 4.1 : Soit f une (0,q)-forme telle que $\frac{f^2}{\lambda_q(\varphi)} \in L^1_{(0,q)}(\Omega)$. Alors :

$$(4.1) \qquad \int_\Omega e^{\mu(\varphi)} |v_\mu|^2 \leqslant 4 \int_\Omega e^{\mu(\varphi)} \frac{|f|^2}{\lambda_q(\varphi)} \ .$$

Ce sont les inégalités de Carleman, adaptées à notre situation (dans [2] , $\lambda_q(\varphi)$ ne figure pas car $\lambda_q(\varphi) \geqslant C > 0$).

Les inégalités (4.1) permettent de déduire un résultat de type "problème de Cauchy".

Théorème 4.1 : Soit φ vérifiant $(*)_q$ et $[\lambda_q(\varphi)]^{-1} \in L^1(\Omega)$. Soit $\omega \subset\subset \Omega$ défini par $\omega = \{\varphi < c\}$. Soit $f \in L^\infty_{(0,q)}(\Omega)$ telle que $\bar{\partial} f = 0$ et $\operatorname{supp}(f) \subset \bar{\omega}$. Alors il existe $u \in L^2_{(0,q-1)}(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} \operatorname{supp}(u) \subset \bar{\omega} \\ \bar{\partial} u = f \end{cases}$$

Corollaire 4.2 : Sous les hypothèses précédentes sur φ et ω, soit f une (0,q-1)-forme $\bar{\partial}$-fermée dans $\Omega\backslash\bar{\omega}$, de classe C^1 dans $\bar{\Omega}\backslash\omega$. Alors il existe une (0,q-1)-forme $\tilde{f} \in L^2_{(0,q-1)}(\Omega)$ $\bar{\partial}$-fermée dans Ω telle que $\tilde{f}|_{\Omega|\bar{\omega}} = f$.

On a un analogue pour une intersection d'un nombre fini de domaines définis par des fonctions φ_i vérifiant les hypothèses précédentes.

<u>Théorème 4.3</u> : Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, des fonctions positives, de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$ telles que l'on ait :

$$\lambda_I(\varphi_j) \geqslant g \ , \ |I| = q \ , \ j = 1,\ldots,p \qquad g^{-1} \in L^1_{loc}(\mathbb{C}^n) \qquad g \geqslant 0$$

Soit $\varphi = \max(\varphi_j)$ et $\omega = \{\varphi < c\}$, $\bar{\omega} \subset \Omega$.

Soit f une $(0,q)$-forme, $\bar{\partial}$-fermée dans Ω, à support dans $\bar{\omega}$, $f \in L^\infty(\Omega)$. Alors, il existe $u \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \bar{\partial} u = f \\ \operatorname{supp}(u) \subset \bar{\omega} \end{cases}$$

En utilisant les régularisées $\varphi_\varepsilon = \varphi * \chi_\varepsilon$ de φ , où $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \chi(\frac{x}{n})$ et χ ne dépendant que de $|x|$, on se ramène essentiellement à montrer les trois lemmes suivants.

<u>Lemme 4.4</u> : Soient $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$, p fonctions de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$ et $\varphi = \max(\varphi_i)$. Supposons que :

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z_i \partial \bar{z}_k}(z) a_i \bar{a}_k \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(z) |a_i|^2 \quad , \quad \forall z \in \bar{\Omega}$$

où λ_i sont des fonctions continues dans $\bar{\Omega}$, et pour tout vecteur a.

Alors on a, au sens des distributions :

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} a_i \bar{a}_k \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |a_i|^2$$

<u>Lemme 4.5</u> : Posons $\varphi_\varepsilon = \varphi * \chi_\varepsilon$, $\lambda_{i,\varepsilon} = \lambda_i * \chi_\varepsilon$, $\chi_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-n} \chi(\frac{z}{\varepsilon})$, χ ne dépendant que de $|z|$. Alors

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial z_i \partial \bar{z}_k}(z) a_i \bar{a}_k \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,\varepsilon}(z) |a_i|^2$$

pour tout vecteur $a = (a_1,\ldots,a_n)$.

<u>Lemme 4.6</u> : Soit g continue telle que $\frac{1}{g} \in L^1_{loc}(\mathbb{C}^n)$. Alors $\frac{1}{g_\varepsilon} \in L^1_{loc}(\mathbb{C}^n)$ et, pour tout compact K

$$\|\frac{1}{g_\varepsilon}\|_{L^1(K)} \leqslant \|\frac{1}{g}\|_{L^1(K_1)}$$

où

$$K_1 = \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z,K) \leqslant 1\}.$$

Cependant, il y a beaucoup de cas intéressants où on n'a pas une minoration des λ_I par une fonction continue positive dont l'inverse est dans L^1_{loc}; ce sont les cas où les λ_I majorent le module d'une fonction holomorphe.

<u>Théorème 4.1 bis</u> : Soit φ vérifiant $(*)_q$ et supposons qu'il existe une fonction h holomorphe dans $\mathbb{C}^n$ telle que :

$$\lambda_q(\varphi) \geqslant |h| \quad \text{dans } \bar{\Omega}$$

soit f une $(0,q)$-forme telle que :

a) $|f|^2/h \in L^1(\Omega)$

b) $\text{supp}\,(f) \subset \bar{\omega} = \{\varphi \leqslant c\}$ et $\bar{\partial} f = 0$

Alors il existe $u \in L^2_{(0,q-1)}(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \text{supp}\,(u) \subset \bar{\omega} \\ \bar{\partial} u = f. \end{cases}$$

<u>Théorème 4.3 bis</u> : Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ des fonctions positives, de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$ telles que l'on ait :

$$\lambda_I(\varphi_j) \geqslant |h| \quad , |I| = q \quad , j = 1,\ldots,p, \quad h \text{ holomorphe}$$

soit $\varphi = \max(\varphi_j)$ et $\omega = \{\varphi < c\}$, $\omega \subset\subset \Omega$. Soit f une $(0,q)$-forme $\bar{\partial}$-fermée dans Ω, à support dans $\bar{\omega}$, s'écrivant sous la forme $f = h\,g$, avec $g \in L^2(\Omega)$. Alors il existe $u \in L^2_{(0,q-1)}(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \bar{\partial} u = f \\ \text{supp}\,(u) \subset \bar{\omega}\,. \end{cases}$$

Remarque : Les théorèmes 4.1 bis et 4.3 bis n'ont pas d'intérêt en eux-mêmes : cependant on les utilisera pour montrer le théorème de prolongement de fonctions holomorphes que l'on a en vue : Pour montrer le théorème 4.3 bis on utilise le

Lemme 4.7 : Soit φ_ε la régularisée de φ (comme dans le lemme 4.5). Alors on a :

$$\int e^{\mu(\varphi_\varepsilon)} \frac{|f|^2}{\lambda_q(\varphi_\varepsilon)} \leqslant \int e^c \frac{|f|^2}{|h|}$$

où $\mu(\varphi_\varepsilon) \leqslant c$ sur supp(f).

Il suffit de remarquer que $|h|$ est pluri-sous-harmonique et que $|h|_\varepsilon$ décroit alors vers $|h|$. (voir [6]).

5. PROLONGEMENT LOCAL

Maintenant on donne un résultat sur le "Problème de Cauchy local" pour $\bar\partial$, qui permettra de déduire un résultat de prolongement.

Soit donc ω un ouvert relativement compact de Ω, donné par $\{\varphi < c\}$. On considère $z_o \in \partial\omega$: on considère les hypothèses suivantes :

$(C_{1,q})$: $\lambda_q(\varphi)$ et $\lambda_{q+1}(\varphi)$ majorent $|h|$ au voisinage de z_o où h est une fonction holomorphe telle que $h \not\equiv 0$.

$(C_{2,q})$ Pour tout voisinage V de z_o, il existe une fonction φ_V positive de classe C^2 telle que $\omega \cap \{\varphi_V > 1\} \subset V$, $\varphi_V(z_o) = 3/2$ et $\lambda_q(\varphi_V)$ et $\lambda_{q+1}(\varphi_V)$ majorent $|h|$.

(C) Les composantes irréductibles h_i de h, au voisinage de z_o, sont telles que

$$Z(h_i) \cap C_{\overline{\omega}} \neq \emptyset , \quad \forall i$$

où $Z(h_i)$ est la variété des zéros de h_i.

Théorème 5.1 : Supposons $(C_{1,q})$ et $(C_{2,q})$ satisfaites. Soit f une (0,q) forme s'écrivant $f = h^2 g$ avec

$$\mathrm{supp}(g) \subset \overline{\omega} \cap U, \quad \bar\partial g = 0 \text{ dans } U, \quad g \in C^1(U)$$

où U est un voisinage de z_o.

Il existe un voisinage V de z_o et $u \in L^2_{(0,q-1)}(V)$ tel que

$$\begin{cases} \bar{\partial} u = f \text{ dans } V \\ \operatorname{supp}(u) \subset \bar{\omega} \cap V \end{cases}$$

Pour montrer ce théorème on utilise le théorème 4.3 bis.

<u>Corollaire 5.2</u> : Supposons $(C_{1,q})$ et $(C_{2,q})$ satisfaites. Soit f une (0,q-1)-forme telle que $f = h^2 g$ où

$$\bar{\partial} g = 0 \text{ dans } U \cap C_{\bar{\omega}} \quad , \; g \in C^1(U \cap C_{\omega}).$$

Il existe une (0,q-1)-forme $\tilde{f}$, $\bar{\partial}$-fermée dans un voisinage V de z_o telle que

$$\begin{cases} \tilde{f} \in L^2(V) \\ \tilde{f}\Big|_{C_{\bar{\omega}} \cap V} = f \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : Là aussi, le théorème 5.1 et le corollaire 5.2 ne sont pas très satisfaisants dans la mesure où on ne peut travailler qu'avec des formes f qui ont h^2 en facteur. Cependant nous allons en déduire un résultat satisfaisant dans le cas des fonctions : lorsqu'on a l'hypothèse (C_3). Cette hypothèse est très naturelle elle est automatiquement satisfaite par un domaine ω pseudo-convexe dont la frontière ne contient pas une hypersurface complexe (signalons que E. Bedford et J. E. Fornaess ont montré que pour ω à frontière analytique réelle et pseudoconvexe au voisinage de z_o, une condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction holomorphe dans $U \cap C_{\bar{\omega}}$ se prolonge en une fonction holomorphe dans un voisinage de z_o est que $\partial\omega$ ne contienne pas, au voisinage de z_o, d'hypersurface complexe [3]).

<u>Théorème 5.3</u> : Suppsons $(C_{1,q})$ $(C_{2,q})$ et (C) satisfaites. Soit f une fonction holomorphe dans $U \cap C_{\bar{\omega}}$, de classe C^1 dans $U \cap C_{\omega}$. Alors f se prolonge en une fonction holomorphe dans un voisinage de z_o.

On utilise pour la démonstration le corollaire 5.2.

<u>Remarque</u> : A. Douady et N. Sibony m'ont fait remarquer que la condition (C) est toujours vérifiée par un domaine ω pseudocpnvexe, de classe C^2, dont la frontière ne contient pas au voisinage de z_o, d'hypersurface complexe (on utilise

pour cela l'existence pour ω d'une fonction d'exhaustion, pluri-sous-harmonique dans ω , continue dans $\overline{\omega}$).

Exemples :

1) Considérons le domaine $\sum_{i=1}^{n} |z_i|^{2p_i} - 1 < 0$, dans $\mathbb{C}^n$. On posera $\varphi = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^{2p_i}$. Alors on a :

$$\lambda_I = \sum_{i \notin I} p_i^2 \, |z_i|^{2(p_i-1)}$$

Une condition suffisante pour étendre à $\omega = \{\varphi < 1\}$ une forme de degré $(0,q)$, $\overline{\partial}$-fermée dans $\Omega \setminus \overline{\omega}$, où Ω est un voisinage de $\overline{\omega}$ est que :

$$\{ \sum_{j \in J} |z_j|^{2(p-1)} \}^{-1}$$

soit localement intégrable où $p = \max(p_i)$ et J de longueur $n-q$.

Il suffit donc que $\max(p_i-1) < n-q$.

2) On considère, près de 0, le domaine dans $\mathbb{C}^4$ défini par

$$\omega = \{ |z_1|^2 + |z_4|^2 (|z'|^2 - |z_4|^2) < 1\} \quad \text{où} \quad z' = (z_2, z_3).$$

Alors pour ce domaine, les hypothèses du théorème 5.3 sont satisfaites, et ω n'est pas pseudo-convexe au voisinage du point $z^0 = \{1,0,0,0\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Andreotti, C. D. Hill : E. E. convexity and the H. Lewy problem part I : reduction to vanishing theorems, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 26 (1972).

[2] A. Andreotti, E. Vesentini : Carleman estimates for the Laplace Beltrami equation on complex manifolds. Publ. I.H.E.S., vol. 24-25.

[3] E. Bedford, J. E. Fornaess : Local extension of C. R. function from weakly pseudo-convex boundaries.

[4] J. J. Kohn, H. Rossi : on the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold, Ann. of Math. 81 (1965).

[5] L. Hörmander : L^2-estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$-operator. Acta Math. 113 (1965).

[6] L. Hörmander : Introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand.

[7] H. Lewy : On the local character.... Ann. of Maths 64 (1956).

[8] R. Nirenberg : On the H. Lewy extension phenomenon. Trans. Amer. Math. Soc. vol 168 (1972).

*
* *
*