Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

B. Helffer
D. Robert

Comportement asymptotique précisé du spectre d'opérateurs globalement elliptiques dans R^n

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. nº 2, p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A2_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1980-1981

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE PRECISE DU SPECTRE D'OPERATEURS GLOBALEMENT ELLIPTIQUES DANS $\mathbb{R}^n$.

par B. HELFFER et D. ROBERT

Exposé n° II

21 Octobre 1980

I. INTRODUCTION

Il est bien connu que le spectre de l'oscillateur harmonique $-\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ est constitué de la suite de valeurs propres de multiplicité 1 : $\lambda_j = 2j+1$. Plus généralement, soit $Q = q(x,D)$ un opérateur pseudodifférentiel symétrique tel que $\lim\limits_{|x| + |\xi| \to +\infty} \operatorname{Re} q(x,\xi) = +\infty$. Sous des hypothèses convenables [9] , le spectre de Q est une suite croissante $(\lambda_j)_{j\geqslant 1}$ de valeurs propres de multiplicité finie telle que $\lim\limits_{j\to+\infty} \lambda_j = +\infty$. Pour mesurer la croissance de cette suite, on introduit la fonction : $N(\lambda) = \operatorname{card}\{j;\ \lambda_j \leqslant \lambda\}$. Sous des conditions assez générales [9] , on a le résultat :

$$(1) \qquad N(\lambda) \sim (2\pi)^{-n}.\iint_{\operatorname{Re} q(x,\xi) \leqslant \lambda} dx d\xi \quad ; \quad \lambda \to +\infty$$

En particulier (1) est vérifiée sous les conditions suivantes :

(2) Soit $m > 0$. Pour tous $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_{\alpha\beta} > 0$ telle que :

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}\ (1+|x| + |\xi|)^{2m-|\alpha|-|\beta|}$$

(3) Il existe $E > 0$ telle que :

$$\operatorname{Re} q(x,\xi) \geqslant E(1 + |x| + |\xi|)^{2m}$$

(4) $q(x,D)$ est symétrique sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Sous ces hypothèses, L. Hörmander [8] a établi le résultat suivant : pour tout réel $\delta < \frac{2}{3}$, on a :

$$(5) \qquad N(\lambda) = (2\pi)^{-n} \iint_{\operatorname{Re} q(x,\xi) \leqslant \lambda} dx\, d\xi + O(\lambda^{(n-\delta)/m}); \quad \lambda \to +\infty$$

Pour $\delta < \frac{1}{2}$, l'estimation (4) a été établie dans [9] et [10] en utilisant deux méthodes différentes. Le passage de $\frac{1}{2}$ à $\frac{2}{3}$ permet, dans le cas homogène, de dégager le second terme dans le comportement de $N(\lambda)$ (cf. [8] formule (4.6) ou encore plus loin notre théorème 3). Supposons de plus que q vérifie :

(6) $$q \sim \sum_{j \geqslant 0} q_{2m-j} \qquad \text{(au sens classique)}$$

où q_{2m-j} est homogène de degré 2m-j en (x,ξ) dans $\mathbb{R}^{2n} \setminus (0)$

(7) $$q_{2m}(x,\xi) > 0 \quad \text{pour tout } (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus (0) .$$

L. Hörmander ([8] p.311) pose la question de savoir si on a encore (5) pour $\delta = 1$. L'objet de cet exposé est d'apporter une réponse positive à cette question. Dans un précédent travail [6] nous avons établi (5) avec $\delta = 1$ lorsque m est entier, q_{2m} est polynomial en (x,ξ) et $q_{2m-1} \equiv 0$. Dans un preprint récent [5] Guillemin-Sternberg établissent un résultat analogue en supposant : $q(-x,-\xi) = q(x,\xi)$ et $q_{2m-j} \equiv 0$ si j est impair . Leur méthode consiste à faire des transformations (♦) pour se ramener au cas d'opérateurs elliptiques sur une variété compacte et d'utiliser les résultats de Duistermaat-Guillemin [4] et Hörmander [7]. La méthode que nous utilisons est directe et consiste comme dans [4] et [7], à analyser la singularité à l'origine de la distribution tempérée :

$$S(t) = \text{Trace}[\exp -it.Q^{1/m}] .$$

Pour donner un sens à : $P = Q^{1/m}$ on se ramène au cas où :

(8) Il existe $\gamma > 0$ telle que $(Qu,u) \geqslant \gamma \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

En utilisant les travaux de J. Chazarain [2] , nous montrons que l'on peut réaliser e^{-itP} , pour $|t|$ assez petit, comme un opérateur intégral de Fourier global. Un argument de phase stationnaire nous permet alors d'analyser la singularité de S à l'origine et via un théorème taubérien d'estimer $N(\lambda)$.

II. ENONCE DES RESULTATS

D'après [9] on sait que P est un opérateur pseudodifférentiel de

---

♦ Voir le commentaire de L. Boutet de Monvel à la suite de cet exposé.

symbole : $p \sim \sum_{j\geqslant 0} p_{2-j}$ où p_{2-j} est homogène de degré 2-j dans $\mathbb{R}^{2n} \setminus (0)$.

On a en particulier :

(9) $$p_2 = (q_{2m})^{1/m}$$

(10) $$p_1 = (1/m)q_{2m}^{(1/m)-1} . q_{2m-1}$$

Notons par $\mathcal{L}$ l'ensemble des périodes des trajectoires périodiques du champ hamiltonien H_{p_2} de p_2.

Théorème 1 : Le support de la distribution tempérée : $S(t) = \mathrm{Trace}(e^{-itP})$ vérifie supp sing $S \subseteq \mathcal{L}$.

L'ellipticité de p_2 entraîne que 0 est un point isolé de $\mathcal{L}$. Soit $T_o > 0$ assez petit et tel que $]-T_o,T_o[\cap \mathcal{L} = \{0\}$. Donnons nous une fonction test $\rho \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ possédant les propriétés suivantes :

(i) ρ est paire, supp $\rho \subset]-T_o,T_o[$

(ii) $\rho \equiv 1$ et $\hat{\rho} > 0$ dans un voisinage de 0.

Posons : $I(\tau) = \mathrm{Tr}\ [\int e^{-itP} \rho(t)\ e^{it\tau}\ dt]$

Théorème 2 :

a) Pour tout entier N, on a: $I(\tau) = O(|\tau|^{-N})$; $\tau \to -\infty$

b) Il existe une suite $(C_j)_{j\geqslant 0}$ de nombres complexes ne dépendant que de q telle que :

(11) $$I(\tau) \sim \sum_{j\geqslant 0} C_j\ \tau^{n-1-(j/2)} \quad ; \quad \tau \to +\infty$$

On a en particulier :

$$C_o = \frac{m}{n}(2\pi)^{-n} \int_{q_{2m} = 1} \frac{dS}{|\nabla q_{2m}|}$$

et

$$C_1 = -(n - 1/2)(2\pi)^{-n} \int_{q_{2m}=1} q_{2m-1} \frac{dS}{|\nabla q_{2m}|}$$

<u>Théorème 3</u> : $N(\lambda)$ a le comportement asymptotique suivant :

(12) $$N(\lambda) = \gamma_o . \lambda^{n/m} + \gamma_1 \lambda^{(n-1/2)/m} + O(\lambda^{(n-1)/m}) \quad ; \quad \lambda \to +\infty$$

où

$$\gamma_o = (2\pi)^{-n} \iint_{q_{2m} \leqslant 1} dx d\xi \quad \text{et} \quad \gamma_1 = -(2\pi)^{-n} \int_{q_{2m}=1} q_{2m-1} \frac{dS}{|\nabla q_{2m}|}$$

III. CONSTRUCTION D'UNE PARAMETRIX POUR UNE EQUATION DE SCHRÖDINGER

Soit $p \sim \sum_{j \geqslant o} p_{2-j}$ vérifiant les propriétés du paragraphe II, c'est-à-dire que p_{2-j} est C^∞ et homogène de degré 2-j dans $\mathbb{R}^{2n} \setminus (0)$ et que $p_2(x,\eta) > 0$ si $(x,\eta) \neq (0,0)$. De plus p_1 est réel.

On se propose de construire une paramétrix pour l'équation de Schrödinger :

(1) $$\begin{cases} (i\partial_t - p(x,D_x))\, \psi(t,x) = 0 \\ \qquad\qquad \psi(0,x) = f(x) \quad , \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Suivant la méthode (B-K-W) nous allons approcher la solution $\psi(t,x)$ dans un petit intervalle de temps autour de 0 (indépendant de f!) par une intégrale du type :

(2) $$(U_N(t)f)(x) = \iint e^{i(S_2(t,x,\eta)-y.\eta)}\, e^{iS_1(t,x,\eta)} \chi_\varepsilon(x,\eta)\, a_{(N)}(t,x,\eta) f(y)\, dy d\eta$$

où χ_ε est une fonction de troncature vérifiant :

$$\chi_\varepsilon(x,\eta) = \begin{cases} 0 & \text{si } |(x,\eta)| \leqslant \varepsilon/2 \\ 1 & \text{si } |(x,\eta)| \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

Nous allons construire $U_N(t)$ de sorte que $S_j(t,x,\eta)$ soit C^∞ et homogène de degré j en (x,η) dans $\mathbb{R}^{2n} \setminus (0)$ et $a_{(N)}(t,x,\eta) = \sum_{k=o}^{N} a_k(t,x,\eta)$ où a_k est C^∞ homogène de degré -k dans $\mathbb{R}^{2n} \setminus (0)$. On est conduit à étudier l'équation caractéristique :

(3) $$\begin{cases} \partial_t S_2(t,x,\eta) + p_2(x, \partial_x S_2(t,x,\eta)) = 0 \\ \qquad\qquad S_2(0,x,\eta) = x.\eta \end{cases}$$

<u>Lemme (III.1)</u> :

a) (Pour ce point, l'ellipticité de p n'est pas nécessaire).

Il existe $T > 0$ assez petit tel que (3) admette une solution $S_2 \in C^\infty(\,]-T,T[\, \times \mathbb{R}^{2n} \setminus (0), \mathbb{R})$, homogène de degré 2 en (x,η) et vérifiant : $(x,\eta) \neq (0,0)$ entraîne $(x, \partial_x S_2(t,x,\eta)) \neq (0,0)$. En particulier pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que :

$$(4) \qquad C_1 \cdot \lambda(x,\eta) \leqslant \lambda(x, \partial_x S_2(t,x,\eta)) \leqslant C_2\, \lambda(x,\eta)$$

pour $|t| \leqslant T$, $|(x,\eta)| \geqslant \varepsilon$ (on a posé : $\lambda(x,\eta) = (1+|x|^2+|\eta|^2)^{1/2}$)

b) Si p est elliptique alors il existe $\gamma > 0$ telle que :

$$(5) \qquad |\partial_t S_2(t,x,\eta)| \geqslant \gamma |(x,\eta)|^2 \quad \text{pour} \quad (t,x,\eta) \in\,]-T,T[\, \times \mathbb{R}^{2n} \setminus (0)$$

<u>Preuve</u> : a) La théorie classique de Hamilton-Jacobi montre que (3) admet une unique solution définie dans :

$$[-T',T'] \times \{(x,\eta) \in \mathbb{R}^{2n} \; ; \; \tfrac{1}{2} \leqslant |(x,\eta)| \leqslant \tfrac{3}{2}\} \quad \text{pour } T' > 0 \text{ assez petit.}$$

On a alors :

$$(6) \qquad |\partial_x S_2(t,x,\eta) - \eta| \leqslant |t| \sup_{[T',T'] \times \{\frac{1}{2} \leqslant |(x,\eta)| \leqslant 3/2\}} |\partial_t \partial_x S_2(t,x,\eta)|$$

(6) montre que pour $T > 0$ assez petit on a :

$$|\partial_x S_2(t,x,\eta) - \eta| \leqslant \frac{1}{4} \quad \text{dans } [-T,T] \times \{\tfrac{1}{2} \leqslant |(x,\eta)| \leqslant \tfrac{3}{2}\}$$

D'où il résulte que :

$$(7) \qquad |(x, \partial_x S_2(t,x,\eta))| \geqslant 1/4 \quad \text{dans} \quad \{|(x,\eta)| \geqslant \tfrac{1}{2}\}$$

Il est alors clair que l'on peut prolonger S_2 par homogénéité en une solution de (3) définie dans $[-T,T] \times \mathbb{R}^{2n} \setminus (0)$ et vérifiant (4).

b) L'ellipticité de p en (x,η) entraîne :

(8) $$|\partial_t S_2(t,x,\eta)| \geqslant \gamma|(x,\partial_x S_2(t,x,\eta))|$$

(7), (8) et l'homogénéité de S_2 impliquent (5).

Dans la suite, on se donne donc une phase $S_2(t,x,\eta)$ vérifiant la propriété a) du lemme (III.1).

Il est commode de modifier S_2 de façon à avoir une fonction C^∞ dans $[-T,T] \times \mathbb{R}^{2n}$. Soit $\varepsilon > 0$, (choisi tel que $|(x,\eta)| \geqslant \varepsilon$ si $p(x,\eta) \geqslant \frac{1}{2}$).

Soit $\tilde{S}_2 \in C^\infty([-T,T] \times \mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ vérifiant :

(9) $$\begin{cases} \tilde{S}_2(t,x,\eta) = S_2(t,x,\eta) & \text{pour } t \in [-T,T] \ , \ |(x,\eta)| \geqslant \varepsilon \\ \tilde{S}_2(0,x,\eta) = x.\eta & \text{pour tout } (x,\eta) \in \mathbb{R}^{2n} \ . \end{cases}$$

On aura besoin de la précision suivante :

<u>Lemme (III.2)</u> : On peut choisir $T > 0$ assez petit de sorte que l'on ait :

(10) $$|\partial_x\tilde{S}_2(t,x,\eta) - \partial_x\tilde{S}_2(t,y,\eta)| \leqslant (1/2).|x-y|$$

pour tout $t \in [-T,T]$ et tout $x,y,\eta \in \mathbb{R}^n$.

<u>Preuve</u> : On a :

$$\partial_x\tilde{S}_2(t,x,\eta) - \partial_y\tilde{S}_2(t,x,\eta) = \int_0^t (\partial_x\, \partial_s\tilde{S}(s,x,\eta) - \partial_x\, \partial_s\tilde{S}(s,y,\eta))ds$$

(10) résulte alors du théorème des accroissements finis et du fait que :

$$\sup_{s,z,\eta} |\partial_s\, \partial_x^2\tilde{S}_2(s,z,\eta)| < +\infty \ .$$

On intoduit les espaces de symboles suivants :

$\nu \in \mathbb{R}$, $S^\nu = \{q \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n});\ |\partial_x^\alpha\partial_\eta^\beta q(x,\eta)| \leqslant C_{\alpha\beta}\ \lambda^{\nu-|\alpha|-|\beta|}(x,\eta)\}$

$\mu \in \mathbb{R}$, $A^\mu = \{a \in C^\infty(]-T,T[\times \mathbb{R}^{2n});\ |\partial_t^k\, \partial_x^\alpha\, \partial_\eta^\beta\, a(t,x,\eta)| \leqslant C_{k,\alpha,\beta}\ \lambda^{\mu+k}(x,\eta)\}$

En vue d'étudier la composition d'un symbole $q \in S^{\nu}$ et d'un opérateur intégral de Fourier, de phase $\tilde{S}_2$, on est amené à étudier :

$$b(t,x,\eta) = e^{-i\tilde{S}_2(t,x,\eta)} q(x,D_x) [e^{i\tilde{S}_2(t,.,\eta)} a(t,.,\eta)] (x)$$

Par un calcul formellement identique à celui fait dans (6) (§.3.1), on a :

(11) $$b(t,x,\eta) = \sum_{|\alpha| < N} b_\alpha(t,x,\eta) + b^{(N)}(t,x,\eta)$$

avec

(12) $$b_\alpha(t,x,\eta) = (\alpha!)^{-1} q^{(\alpha)}(x, \partial_x\tilde{S}_2(t,x,\eta)) D_y^\alpha[e^{i\psi(t,x,y,\eta)} a(t,y,\eta)]\Big|_{y=x}$$

où : $q^{(\alpha)}(x,\xi) = \partial_\xi^\alpha q(x,\xi)$

(13) $$\psi(t,x,y,\eta) = \tilde{S}_2(t,y,\eta) - \tilde{S}_2(t,x,\eta) + \langle x - y, \partial_x\tilde{S}_2(t,x,\eta)\rangle$$

On vérifie aisément que l'on a l'analogue du lemme (3.1) de (6) :

Lemme (III.3) : Pour tout multi indice α on a :

$$b_\alpha \in A^{\mu+\nu-|\alpha|}$$

Lemme (III.4) : Pour tout entier $N \leqslant 1$ on a : $b^{(N)} \in A^{\mu+\nu-N}$

Preuve : Il s'agit d'adapter la preuve du lemme (3.2) de [6] . On a :

(14) $$b^{(N)} = \sum_{N \leqslant |\alpha| < M} b_\alpha + b^{(M)}$$

Compte tenu du lemme (3.2) il nous suffit de montrer que pour tout $(k,\beta,\gamma) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ il existe $M > N$ et $C_{k,\beta,\gamma} > 0$ tels que :

(15) $$|\partial_t^k \partial_x^\beta \partial_\eta^\gamma b^{(M)}(t,x,\eta)| \leqslant C_{k,\beta,\gamma} .\lambda(x,\eta)^{\mu+\nu-N+k}$$

On a :

(16) $$b^{(M)}(t,x,\eta) = M \sum_{|\alpha|=M} (\alpha!)^{-1} \int_y \int_\xi \int_0^1 e^{i(\langle x-y,\xi\rangle+\psi(t,x,y,\eta))}$$

$$\xi^\alpha q^{(\alpha)}(x,\partial_x\tilde{S}_2(t,x,\eta) + \sigma\xi).a(t,y,\eta)(1-\sigma)^{M-1} d\sigma\, d\xi\, dy$$

d'où : $\partial_t^k \partial_x^\beta \partial_\eta^\gamma b^{(M)}(t,x,\eta)$ est une combinaison linéaire d'intégrales du type :

$$(17) \qquad E(t,x,\eta) = \int_y \int_\xi \int_0^1 e^{i<x-y,\xi>} \partial_x^{\beta''} \partial_y^{\alpha+\beta'} \partial_\eta^{\gamma'} \partial_t^{k'} (e^{i\psi(t,x,y,\eta)} a(t,y,\eta)) .$$

$$\partial_t^{k''} \partial_x^{\beta'''} \partial_\eta^{\gamma''} q^{(\alpha)} (x, \partial_x \tilde{S}_2(t,x,\eta) + \sigma\xi) (1-\sigma)^{M-1} d\sigma \, d\xi \, dy$$

où

$$(18) \qquad \begin{cases} |\beta'| + |\beta''| + |\beta'''| = |\beta| \\ |\gamma'| + |\gamma''| = |\gamma| \\ k' + k'' = k \end{cases}$$

En procédant comme dans [6] (lemme 3.3) on obtient :

$$(19)_1 \qquad |\partial_t^{\tilde{k}} \psi(t,x,y,\eta)| \leqslant C_{\tilde{k}} |x-y| . \lambda(x,\eta)(1+|x-y|) \qquad (\tilde{k} \in \mathbb{N})$$

$(19)_2$ Si $|\tilde{\alpha}| + |\tilde{\beta}| + |\tilde{\gamma}| \geqslant 1$, alors :

$$|\partial_t^{\tilde{k}} \partial_x^{\tilde{\alpha}} \partial_y^{\tilde{\beta}} \partial_\eta^{\tilde{\gamma}} \psi(t,x,y,\eta)| \leqslant C_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma},\tilde{k}} (1 + |x-y|)$$

On peut donc écrire :

$$(20) \qquad \partial_t^{k_1} \partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\beta_1} \partial_\eta^{\gamma_1} (e^{i\psi} a) = f(t,x,y,\eta) e^{i\psi(t,x,y,\eta)}$$

où f vérifie alors l'estimation : pour tout $\theta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_\theta > 0$ telle que :

$$(21) \qquad |\partial_y^\theta f(t,x,y,\eta)| \leqslant C_\theta \, \lambda(x,\eta)^{k_1+\mu} . (1+|x-y|)^{2k_1+|\alpha_1|+|\beta_1|+|\gamma_1|+\mu}$$

Posons d'autre part :

$$g(t,x,\xi,\eta,\sigma) = \partial_t^{k''} \partial_x^{\beta'''} \partial_\eta^{\gamma''} q^{(\alpha)} (x, \partial_x S_2 + \sigma\xi) \, (1-\sigma)^{M-1}$$

On a alors : pour tout $\theta' \in \mathbb{N}^n$, il existe $C'_{\theta'} > 0$ telle que :

$$(22) \qquad |\partial_\xi^{\theta'} g(t,x,\xi,\eta,\sigma)| \leqslant C'_{\theta'} \, \lambda(x,\eta)^{k''} . \lambda^{\nu-|\alpha|} (x, \partial_x \tilde{S}_2(t,x,\eta) + \sigma\xi) \quad .$$

On est donc ramené à estimer :

$$F(t,x,\eta) = \int_y \int_\xi \int_o^1 e^{i(<x-y,\xi> + \psi(t,x,y,\eta))} f(t,x,y,\eta)$$

$$. \ g(t,x,\xi,\eta,\sigma)(1-\sigma)^{M-1} d\sigma \ d\xi \ dy$$

f vérifiant (21), g vérifiant (22) .

Posons : $\phi(t,x,\xi,y,\eta) = <x-y,\xi> + \psi(t,x,y,\eta)$

On a :

$$(23) \qquad \begin{cases} \partial_y \phi(t,x,\xi,y,\eta) = \partial_x \tilde{S}_2(t,y,\eta) - \partial_x \tilde{S}_2(t,x,\eta) - \xi \\ \\ \partial_\xi \phi(t,x,\xi,y,\eta) = x - y \end{cases}$$

Il résulte de (10) et (23) que l'on a :

$$(24) \qquad |\partial_y \phi(t,x,\xi,y,\eta)|^2 + |\partial_\xi \phi(t,x,\xi,y,\eta)|^2 \geqslant (1/4)(|x-y| + |\xi|)^2$$

(24) conduit à faire la troncature suivante :

Soit $\delta \in C_o^\infty(\mathbb{R})$, $\qquad \delta(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } |u| \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } |u| \geqslant 2 \end{cases}$

Pour $\varepsilon_o > 0$, à choisir, on pose :

$$F_1(t,x,\eta) = \int_y \int_\xi \int_o^1 e^{i\phi(t,x,\xi,y,\eta)} f(t,x,y,\eta) g(t,x,\xi,\eta,\sigma).$$

$$. \ (1-\delta)\left(\frac{|\xi|^2 + |x-y|^2}{\varepsilon_o^2(1+|x|^2+|y|^2+|\xi|^2+|\eta|^2)}\right) dy \ d\xi \ d\sigma$$

et $F_2(t,x,\eta) = F(t,x,\eta) - F_1(t,x,\eta)$.

On estime alors F_1 en intégrant par parties à l'aide de l'opérateur :

$$L = (|\partial_y \phi|^2 + |\partial_\xi \phi|^2)^{-1} . (< \partial_y \phi, \ \partial_y > + <\partial_\xi \phi, \ \partial_\xi >) \quad .$$

En effet, sur le support de l'amplitude définissant F_1, on a, d'après (24) :

$$|\partial_y\phi|^2 + |\partial_\xi\phi|^2 \geqslant \frac{\varepsilon_o^2}{4} (1 + |x|^2 + |y|^2 + |\xi|^2 + |\eta|^2)$$

En utilisant (21) et (22) on obtient :

(25) Pour tout $K > 0$ il existe $C''_K > 0$ telle que :

$$| F_1(t,x,\eta) | \leqslant C''_K . \lambda^{-K}(x,\eta)$$

D'autre part :

(26) $$F_2(t,x,\eta) = \int_y \int_\xi \int_o^1 e^{i(<x-y,\xi> +\psi)} \delta\left(\frac{|\xi|^2 + |x-y|^2}{\varepsilon_o^2(1+|x|^2 + |y|^2+|\xi|^2+|\eta|^2)}\right).$$

$$. f(t,x,y,\eta).g(t,x,\xi,\eta,\sigma)dy\, d\xi\, d\sigma$$

Pour tout entier M_1 on a :

(27) $$F_2(t,x,\eta) = \int_y \int_\xi \int_o^1 e^{i(<x-y,\xi>+\psi)} (1+|x-y|^2)^{-M_1} f(t,x,y,\eta).$$

$$. (1 - \Delta_\xi)^{M_1} \left[\delta\left(\frac{|\xi|^2+|x-y|^2}{\varepsilon_o^2(1+|x|^2+|y|^2+|\xi|^2+|\eta|^2)}\right).g(t,x,\xi,\eta,\sigma)\right] dyd\xi d\sigma$$

sur le support de l'amplitude définissant F_2 on a :

(28) $$|x - y|^2 + |\xi|^2 \leqslant 2\, \varepsilon_o(1 + |x|^2 + |y|^2 + |\xi|^2 + |\eta|^2)$$

D'autre part, d'après le lemme (III.1), il existe $\tilde{C} > 0$ telle que

(29) $$|x| + |\eta| \leqslant \tilde{C}_1 (1 + |x| + |\partial_x \tilde{S}_2(t,x,\eta)|)$$

(29) entraîne :

(30) $$|x| + |\eta| \leqslant \tilde{C}_1 (1 + |x| + |\partial_x \tilde{S}_2(t,x,\eta) + \sigma\xi| + |\xi|) \qquad (\sigma \in [0,1])$$

D'où il existe $\tilde{C}_2 > 0$ telle que :

$$(31)\qquad (1+|x|+|\zeta|+|y|+|\eta|) \leqslant \tilde{C}_2(1+|x|+|\partial_x\tilde{S}_2(t,x,\eta)+\sigma\xi|+|x-y|+|\xi|)$$

(31) et (28), pour $\varepsilon_o > 0$ assez petit, entrainent :

$$(32)\qquad 1+|x|+|\xi|+|y|+|\eta| \leqslant \tilde{C}_3(1+|x|+|\partial_x\tilde{S}_2(t,x,\eta)+\sigma\xi|)$$

Choisissons M_1 tel que : $2M_1 \geqslant 2k+M+|\beta|+|\gamma|$

On a alors, en utilisant (21), (22) et (32) :

$$(33)\qquad |(1+|x-y|^2)^{-M_1} f(.)(1-\Delta_\xi)^{M_1}[\delta(.).g(.)]| \leqslant$$
$$\tilde{C}_4.\ \lambda^{\mu+k}(x,\eta).(1+|x|+|y|+|\xi|+|\eta|)^{\nu-M}$$

(33) entraîne alors :

$$(34)\qquad |F_2(t,x,\eta)| \leqslant \tilde{C}_5.\ \lambda^{\mu+k+\nu+2n-M}(x,\eta)$$

On choisit donc : $M \geqslant N+2n$ alors (34) et (25) pour $K \geqslant N-\mu-\nu-k$ entraînent (15).

On se donne maintenant une deuxième phase : $S_1(t,x,\eta) \in C^\infty([-T,T]\times\mathbb{R}^2\setminus(0),\mathbb{R})$, homogène de degré 1 en (x,η) et soit $\tilde{S}_1 \in C^\infty([-T,T]\times\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ telle que :

$$\tilde{S}_1(t,x,\eta) = S_1(t,x,\eta) \quad \text{pour } t\in[-T,T] \quad \text{et} \quad |(x,\eta)| \geqslant \varepsilon$$

On a le :

<u>Lemme (III.5)</u> : Soit $a \in A^\mu$, homogène de degré μ dans $\{|(x,\eta)| \geqslant \varepsilon\}$. On a alors :

$$e^{-i(\tilde{S}_2+\tilde{S}_1)} p(x,D_x)(e^{i(\tilde{S}_2+\tilde{S}_1)}a) = p_2(x,\partial_x\tilde{S}_2)a$$
$$+\ [p_1(x,\partial_x\tilde{S}_2)+\sum_{j=1}^{n}\partial_{\xi_j}p_2(x,\partial_x\tilde{S}_2)\,\partial_{x_j}\tilde{S}_1]\ a$$
$$+\ \gamma_o(a)+\gamma_1(a)+\ldots+\gamma_{N-1}(a)+\gamma^{(N)}(a)$$

où $\gamma_j(a)$ est homogène de degré $\mu - j$ dans $\{|(x,\eta)| \geqslant \varepsilon\}$ et où $\gamma^{(N)}(a) \in A^{\mu-N}$. On a en particulier :

$$\gamma_o(a) = [p_o(x,\partial_x\tilde{S}_2) + \sum_{j=1}^{n} \partial_{\xi_j} p_1 . \partial_{x_j}\tilde{S}_1 - \frac{1}{2i}\sum_{j,k} \partial^2_{\xi_j\xi_k} p_2(x,\partial_x\tilde{S}_2)\partial^2_{x_jx_k}\tilde{S}_2$$

$$+ \sum_{j,k} \partial^2_{\xi_j\xi_k} p_2(x,\partial_x\tilde{S}_2)\partial_{x_j}\tilde{S}_1 . \partial_{x_k}\tilde{S}_1]\, a + \frac{1}{i}\sum_j \partial_{\xi_j} p_2(x,\partial_x\tilde{S}_2)\, \partial_{x_j} a$$

Preuve : On remarque simplement que : $t \mapsto e^{i\tilde{S}_1(t,x,\eta)}.a(t,x,\eta)$ est de classe A^μ et on applique le lemme (III.3) en ordonnant les termes par degré d'homogénéité.

Il résulte de ce qui précède que, pour approcher le groupe unitaire $U(t) = e^{-itP}$, on résout, dans $]-T,T[\, \times \{(x,\eta) \in \mathbb{R}^{2n},\ |(x,\eta)| > \varepsilon/2\}$ successivement les équations :

$$(35)\qquad \begin{cases} -\partial_t\tilde{S}_2 - p_2(x,\partial_x\tilde{S}_2) = 0 \\ \tilde{S}_2(0,x,\eta) = x.\eta \end{cases}$$

$$(36)\qquad \begin{cases} -\partial_t\tilde{S}_1 - p_1(x,\partial_x\tilde{S}_2) - \sum_{j=1}^{n} \partial_{\xi_j} p_2(x,\partial_x\tilde{S}_2)\partial_{x_j}\tilde{S}_1 = 0 \\ \tilde{S}_1(0,x,\eta) = 0 \end{cases}$$

la première équation de transport s'écrit :

$$(37)\qquad \begin{cases} i\partial_t a_o - \gamma_o(a_o) = 0 \\ a_o(0,x,\eta) = 1 \end{cases}$$

Pour $k \geqslant 1$, la $k^{\text{ième}}$ équation de transport s'écrit :

$$(38)\qquad \begin{cases} i\partial_t a_k - \gamma_o(a_k) = \gamma_1(a_{k-1}) + \dots + \gamma_k(a_o) \\ a_k(0,x,\eta) = 0 \end{cases}$$

(35) a été résolue dans le lemme (III.1).

Ensuite on résout (36) par homogénéité. On désigne par $S_j(t,x,\eta)$ la fonction homogène de degré j coïncidant avec $\tilde{S}_j(t,x,\eta)$ dans $|(x,\eta)| \geq \varepsilon$. De la même manière, on résout (37) et (38) par homogénéité. Soit alors : $a_{(N)} = a_0 + \ldots + a_N$ où a_j est homogène de degré $-j$ et vérifie la $j^{\text{ième}}$ équation de transport dans $\{|(x,\eta)| > \varepsilon/2\}$. Pour $\varepsilon > 0$ soit $\chi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant :

$$\chi_\varepsilon(x,\eta) = \begin{cases} 1 & \text{si } |(x,\eta)| \geq 2\varepsilon \\ 0 & \text{si } |(x,\eta)| \leq \varepsilon \end{cases}$$

On pose alors :

$$U_N(t)f(x) = \iint e^{i(S_2(t,x,\eta)+S_1(t,x,\eta) - y.\eta)} a_{(N)}(t,x,\eta)\ \chi_\varepsilon(x,\eta) f(y)\,dy\,d\!\!\!{}^-\eta$$

$U_N(t)$ vérifie :

$$(39) \qquad \begin{aligned} (i\partial_t - p(x,D_x)) \circ U_N(t) &= R_N(t) \\ U_N(0) &= \dot{I}d + K_N \end{aligned}$$

où $R_N(t)$ est un opérateur intégral de Fourier global et où K_N est un opérateur à noyau dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$. On a :

$$(40) \qquad R_N(t)f(x) = \iint e^{i(S_2(t,x,\eta)+S_1(t,x,\eta) - y.\eta)} . r_N(t,x,\eta) f(y)\,dy\,d\!\!\!{}^-\eta$$

où $r_N \in A^{-N-1}$.

On a la propriété de régularité suivante :

<u>Lemme (III.6)</u> : Pour tout entier $j \geq 0$ et tout réel $s \geq 0$ il existe un entier $N(j,s)$ tel que pour $N \geq N(j,s)$ on a :

$$R_N \in C^j(]-T,T[\ ;\ \mathcal{L}(B^{-s},B^s)) .$$

où $B^s = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) ; (-\Delta+|x|^2)^s.u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ et $B^{-s} = (-\Delta + |x|^2)^s.(L^2(\mathbb{R}^n))$, munis des structures hilbertiennes naturelles.

<u>Preuve</u> : Il suffit de considérer le cas où $s = m$, m entier ≥ 1. On aura prouvé le lemme (III.6) si l'on montre que pour tous multiindices $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ $|\alpha+\beta| \leq 2m$, $|\alpha'+\beta'| \leq 2m$ alors :

$$x^{\alpha} . \partial_x^{\beta} \circ R_N(.) \circ x^{\alpha'} . \partial_x^{\beta'} \in C^j(]-T,T[, \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n)))$$

On montre facilement que pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$(x^{\alpha} \partial_x^{\beta} . R_N(t) . x^{\alpha'} \partial_x^{\beta'} f)(x) =$$

$$\iint e^{i(S_2(t,x,\eta)+S_1(t,x,\eta)-y.\eta)} \tilde{r}_N(t,x,\eta) f(y) dy\, d\eta$$

où : $\tilde{r}_N \in A^{-N-1+4m}$ or :

$$\partial_t^k \tilde{r}_N \in A^{-N-1+4m+j} \qquad \text{pour } k \leqslant j$$

On en déduit facilement le lemme (III.6) pour N assez grand

IV. SINGULARITES DE TRACE (e^{-itP})

Dans cet exposé nous limitons notre étude au voisinage de O. La preuve du théorème 1 paraîtra dans un prochain travail.

Lemme (IV.1) : Soit $\rho \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, supp $\rho \subset]-T,T[$. Alors pour tout entier $j \geqslant 1$ il existe $N_j > 0$ et $C_j > 0$ tels que :

$$\left|\text{Trace} \int (U(t) - U_{N_j}(t)) e^{it\tau} . \rho(t) dt\right| \leqslant C_j (1 + |\tau|)^{-j}$$

pour tout $\tau \in \mathbb{R}$.

Preuve : D'après [9] on sait que pour tout $s > n$ il existe une constante universelle $\gamma_s > 0$ telle que tout opérateur $T \in \mathcal{L}(B^{-s},B^s)$ est à trace comme opérateur de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même et vérifie :

(41) $$\|T\|_{Tr} \leqslant \gamma_s \|T\|_{\mathcal{L}(B^{-s},B^s)}$$

Or d'après le lemme (III.5) il existe N_j telle que :

$$U_{N_j}(.) - U(.) \in C^j(]-T,T[, \mathcal{L}(B^{-(2n+1)},B^{2n+1}))$$

Il suffit alors d'appliquer (27) à l'opérateur :

$$\int D_t^j (U_{N_j}(t) - U(t)) e^{it\tau} \rho(t) dt$$

après avoir intégré par parties.

Il résulte de ce qui précède que l'on est ramené à étudier la distribution "Trace"$U_N(t)$. Il résulte de [2] que le noyau de l'opérateur : $\int U_N(t) e^{it\tau} \rho(t) dt$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. On a donc :

$$(42) \quad I_N(\tau) = \mathrm{Trace}\left(\int U_N(t) e^{it\tau} \rho(t) dt\right) = \iiint e^{i\psi(t,x,\eta,\tau)} \rho(t) \chi_\varepsilon(x,\eta) a_{(N)}(t,x,\eta) dx d\eta dt$$

où $\psi(t,x,\eta,\tau) = S_2(t,x,\eta) + S_1(t,x,\eta) - x.\eta + t\tau$.

$I_N(\tau)$ est donc une somme de termes du type :

$$G_k(\tau) = \iiint e^{i\psi(t,x,\eta,\tau)} \rho(t) \chi_\varepsilon(x,\eta) b(t,x,\eta) dt dx d\eta$$

où b est homogène de degré $-k$ en (x,η) $(k \in \mathbb{N})$.

<u>Lemme IV.2)</u> : Il existe C et $\gamma_o > 0$ tels que :

$$|(x,\eta)| \geqslant C|\tau|^{1/2} \text{ entraîne } |\partial_t S_2(t,x,\eta) + \tau| \geqslant \gamma_o(|\tau| + |x|^2 + |\eta^2|)$$

<u>Preuve</u> : On a :

$$\begin{aligned} |\partial_t S_2(t,x,\eta) + \tau| &\geqslant |\partial_t S_2(t,x,\eta)| - |\tau| \\ &\geqslant \gamma|(x, \ )|^2 - |\tau| \qquad \text{(lemme (III.1))} \\ &\geqslant (C^2\gamma - 1)|\tau| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |\partial_t S_2(t,x,\eta) + \tau| &\geqslant \gamma|(x,\eta)|^2 - \frac{1}{C^2}|(x,\eta)|^2 \\ &\geqslant \frac{\gamma C^2 - 1}{C^2} . |(x,\eta)|^2 \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir : $\gamma . C^2 > 1$.

On introduit une fonction de troncature $\chi_C \in C_o^\infty(\mathbb{R}^{2n})$,

$$\chi_C(x,\eta) = \begin{cases} 1 & \text{si } |(x,\eta)| \leqslant C \\ 0 & \text{si } |(x,\eta)| \geqslant 2C \end{cases}$$

On pose : $G'_k(\tau) = \iiint e^{i\psi(t,x,\eta,\tau)} \rho(t)\chi_\varepsilon(x,\eta)\chi_C(|\tau|^{-\frac{1}{2}}x, |\tau|^{-\frac{1}{2}}\eta)\, b(t,x,\eta)\,dt\,dx\,d\eta$

$G''_k(\tau) = G_k(\tau) - G'_k(\tau)$

Des intégrations par parties à l'aide de l'opérateur

$$M_\tau = \frac{\partial_t}{|\partial_t S_2(t,x,\eta) + \tau|}$$

montre que $G''_k(\tau) = O(|\tau|^{-\infty})$ pour $|\tau| \to +\infty$.

Pour étudier G'_k on fait le changement de variables :

$$\begin{cases} x = |\tau|^{1/2}.\tilde{x} \\ \eta = |\tau|^{1/2}\,\tilde{\eta} \end{cases}$$

On pose également : $\lambda = |\tau|$; $e = \operatorname{sgn} \tau$. On obtient alors :

$$F_k(\lambda) = G'_k(\tau) = \lambda^{n-k/2} \iiint e^{i\lambda[S_2(t,x,\eta)+\lambda^{-\frac{1}{2}}S_1(t,x,\eta)-x\,\eta+et]}$$

$$.\ \rho(t)\chi_\varepsilon(\lambda^{\frac{1}{2}}x, \lambda^{\frac{1}{2}}\eta)\ \chi_C(x,\eta)b(t,x,\eta)\,dt\,dx\,d\eta$$

Afin de se ramener au théorème de la phase stationnaire on va étudier le comportement de :

$$H(\lambda,u) = \iiint e^{i\lambda[S_2(t,x,\eta)+uS_1(t,x,\eta)- x.\eta + et]}$$

$$\chi_\varepsilon(\lambda^{\frac{1}{2}}x, \lambda^{\frac{1}{2}}\eta).C(t,x,\eta)\,dt\,dx\,d\eta$$

où u est un petit paramètre : $u \in [0,u_0]$, $u_0 > 0$ et

$C(t,x,\eta) \in C_0^\infty(]-T,T[\times \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\eta)$.

Désignons par Σ_u la variété critique de la phase φ_u dans l'intégrale définissant $H(\lambda,u)$.

<u>Lemme IV.3</u> : Il existe $u_o > 0$ et $T > 0$ assez petits tels que $\operatorname{supp} C \cap \Sigma_u = \{(t,x,\eta) \in \operatorname{supp} C \mid t = 0 \text{ et } p_2(x,\eta) + up_1(x,\eta) = e\}$ pour tout $u \in [0,u_o]$.

<u>Preuve</u> : Σ_u est déterminé par les équations :

$$\partial_t S_2(t,x,\eta) + u.\partial_t S_1(t,x,\eta) + e = 0 \tag{43}$$

$$\partial_x S_2(t,x,\eta) + u\partial_x S_1(t,x,\eta) = \eta \tag{44}$$

$$\partial_\eta S_2(t,x,\eta) + u\, \partial_\eta S_1(t,x,\eta) = x \tag{45}$$

D'après les conditions initiales imposées à S_2 et S_1, on a :

$$\varphi_u(t,x,\eta) = t(\sigma_2(t,x,\eta) + u\sigma_1(t,x,\eta) + e) \tag{46}$$

où $\sigma_2(0,x,\eta) = \partial_t S_2(0,x,\eta)$

On a alors :

$$\partial_x \sigma_2(t,x,\eta)|_{t=0} = -\partial_x p_2(x,\eta) \tag{47}$$

$$\partial_\eta \sigma_2(t,x,\eta)|_{t=0} = -\partial_\eta p_2(x,\eta) \tag{48}$$

En utilisant (43) et (44) il vient :

$$p_2(x,\eta - u.\partial_x S_1(t,x,\eta)) = e + u\,\partial_t S_1(t,x,\eta)$$

Pour $u_o > 0$ on a donc :

$$(t,x,\eta) \in \operatorname{Supp} C \cap \Sigma_u \;,\; u \in [0,u_o] \quad \text{entraînent :}$$

$$|p_2(x,\eta) - e| \leqslant \frac{1}{2}\ .$$

Or $p_2 \geqslant 0$ par hypothèse. D'où si $e = -1$ on a $\operatorname{supp} C \cap \Sigma_u = \emptyset$. On suppose donc $e = 1$. Sur $\operatorname{Supp} C \cap \Sigma_u$ on a alors :

$$\frac{1}{2} \leqslant p_2(x,\eta) \leqslant \frac{3}{2}\ .$$

D'autre part sur Σ_u on a :

(49) $$t(\partial_x \sigma_2(t,x,\eta) + u\,\partial_x \sigma_1(t,x,\eta)) = 0$$

(50) $$t(\partial_\eta \sigma_2(t,x,\eta) + u\,\partial_\eta \sigma_1(t,x,\eta)) = 0$$

L'ellipticité de p_2 implique qu'il n'a pas de valeurs critiques dans $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. On voit donc que, quitte à diminuer T, (47), (48), (49) et (50) entraînent $t = 0$. On en déduit le lemme (IV.3). Il résulte donc de ce qui précède et du théorème de la phase non stationnaire :

<u>Proposition IV.4</u> : a) Il existe $T > 0$ assez petit tel que

$$\text{Supp sing } S \cap]-T,T[\; = \{0\}$$

b) Pour tout $M > 0$ on a :

$$I(\tau) = O(|\tau|^{-M}) \qquad \text{pour} \quad \tau \to -\infty \quad .$$

(IV.5) <u>Preuve du théorème 2</u> : Elle résulte de l'étude d'intégrales du type $H(\lambda,u)$ avec $e = 1$, u étant considéré comme un petit paramètre, par la méthode de la phase stationnaire.

Il existe $u_0 > 0$ et une partition C^∞ de l'unité $(\varphi_j)_{1 \leqslant j \leqslant J}$ sur $\{\frac{1}{2} \leqslant p_2(x,\eta) \leqslant \frac{3}{2}\}$ telle que sur le support de φ_j il existe un entier k, $1 \leqslant k \leqslant n$ tel que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

$(i)_k$ $$\left|\frac{\partial p_2}{\partial x_k} + u\frac{\partial p_1}{\partial x_k}\right| > 0$$

$(ii)_k$ $$\left|\frac{\partial p_2}{\partial \eta_k} + u\frac{\partial p_1}{\partial \eta_k}\right| > 0 \qquad \text{pour tout } u \in [0,u_0]$$

on est ainsi ramené à étudier des intégrales du type :

$$F(\lambda,u) = \iiint e^{i\lambda\varphi_u(t,x,\eta)} \chi_\varepsilon(\lambda^{\frac{1}{2}}x, \lambda^{\frac{1}{2}}\eta)\,\rho(t)\varphi(x,\eta)b(t,x,\eta)\,dt\,dx\,d\eta$$

où l'on suppose par exemple que $\left|\frac{\partial p_2}{\partial x_1} + u\frac{\partial p_1}{\partial x_1}\right| > 0$ sur supp φ .

Le théorème de la phase stationnaire avec dépendance d'un paramètre, donne pour $F(\lambda,u)$ un développement :

(51) $$F(\lambda,u) = d_{1,\varphi}(u).\,\lambda^{-1} + \ldots + d_{N,\varphi}(u)\,\lambda^{-N} + O(\lambda^{-N-1}) \qquad \lambda \to +\infty$$

où $O(\lambda^{-N-1})$ est uniforme par rapport à $u \in [0,u_0]$. De plus les coefficients $d_{j,\varphi}$ sont des fonctions C^∞ au voisinage de 0. On obtient alors un développement de $F(\lambda, \lambda^{-\frac{1}{2}})$ à partir de (51) en développant $d_{j,\varphi}(u)$ par la formule de Taylor au voisinage de 0.

En regroupant les informations précédentes on obtient le résultat annoncé dans le théorème 2.

Un calcul plus précis permet de déterminer les coefficients C_0 et C_1, que l'on peut d'ailleurs retrouver en utilisant un résultat de [9] et la :

Proposition (IV.6) : Posons : $\zeta(s) = \mathrm{Tr}(Q^{-s})$ ζ est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ dont les pôles sont simples et appartiennent à la suite : $(\frac{n}{m} - \frac{j}{2m})_{j \geqslant 0}$. De plus on a :

$$\boxed{C_j = \mathrm{Res}(\zeta, \frac{n}{m} - \frac{j}{2m})}$$

Preuve : Elle est analogue à celle donnéee dans [4] dans le cas des variétés compactes.

On est maintenant en mesure de prouver le théorème 3. Pour cela posons : $M(\lambda) = N(\lambda^m)$. Comme dans le cas des variétés compactes ([4] et [7]) on utilise un argument taubérien qui s'appuie sur le :

Lemme IV.7 : Il existe $\gamma > 0$ telle que :

$$|M(\lambda + \mu) - M(\lambda)| \leqslant \gamma(1+ |\mu|)^n(1 + |\lambda|)^{n-1}$$

pour tout λ , $\mu \in \mathbb{R}$.

Preuve : Elle est analogue à celle donnée dans [4] .

(IV.8) Preuve du théorème 3 : On pose : $\theta(\lambda) = (2\pi)^{-1}.\hat{\rho}(-\lambda)$. On remarque alors que l'on a :

$$\int_{-\infty}^{\lambda} I(\tau)d\tau = (\theta * M)(\lambda).$$

Pour $n \geqslant 2$ le théorème 2 donne :

$$(\theta * M)(\lambda) = \gamma_0 \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-\frac{1}{2}} + O(\lambda^{n-1}), \quad \lambda \to +\infty \tag{52}$$

(52) est encore valable pour $n = 1$ car alors $C_2 = 0$. En effet : $C_2 = \mathrm{Res}(\zeta, 0)$ et il résulte de [9] que ζ est holomorphe en 0.

On déduit alors facilement le théorème 3 de (52) et du lemme (IV.7).

V. AUTRES RESULTATS

Nous indiquons ici quelques résultats qui prolongent dans différentes directions l'étude précédente. Les démonstrations de ces résultats paraîtront ailleurs.

Théorème (V.1) : Soit Γ l'adhérence dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble : $\{\lambda_j^{1/m} - \lambda_k^{1/m} \; ; \; j,k \geqslant 1\}$. Si $\Gamma \neq \mathbb{R}$ alors toutes les trajectoires de H_{p_2} sont périodiques.

Remarques (V.2) : Lorsque F est périodique nous pensons pouvoir établir un résultat de localisation de la suite $(\lambda_j^{1/m})_{j \geqslant 1}$ analogue à celui obtenu par Weinstein [11] et Colin de Verdière [3] sur une variété compacte.

Dans [5] Guillemin-Sternberg font une étude analogue à la nôtre avec l'hypothèse supplémentaire : Q commute avec l'opérateur de symétrie : $\Sigma u(x) = u(-x)$ i.e. : $[Q, \Sigma] = 0$ (54). Si $q_w(x,\xi)$ désigne le symbole de Weyl de Q il n'est pas difficile de voir que (54) équivaut à :

(55) $$q_w(-x,-\xi) = q_w(x,\xi) \quad \text{pour tout } (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n} .$$

De (54) on déduit clairement qu'il existe une base de fonctions propres de Q : $(\varphi_j)_{j \geqslant 1}$, φ_j étant associée à λ_j, telle que φ_j est soit paire soit impaire. On pose alors :

$$N^+(\lambda) = \mathrm{card}\{j, \lambda_j \leqslant \lambda , \ \varphi_j \text{ est paire}\}$$

$$N^-(\lambda) = \mathrm{card}\{j, \lambda_j \leqslant \lambda , \ \varphi_j \text{ est impaire}\}$$

Pour étudier $N(\lambda)$ la méthode de Guillemin et Sternberg consiste à étudier séparément $N^+(\lambda)$ et $N^-(\lambda)$. Notre méthode permet également de retrouver ces résultats :

Théorème (V.3) :

$$N^+(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\gamma_o \lambda^{\frac{n}{m}} + \gamma_1 . \lambda^{(n-\frac{1}{2})/m}\right) + O(\lambda^{n-1}), \qquad \lambda \to +\infty$$

$$N^-(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\gamma_o \lambda^{\frac{n}{m}} + \gamma_1 . \lambda^{(n-\frac{1}{2})/m}\right) + O(\lambda^{n-1}), \qquad \lambda \to +\infty$$

Dans une autre direction, A. M. Charbonnel [1] vient d'établir l'analogue dans $\mathbb{R}^n$ d'un théorème de Colin de Verdière sur le spectre de k opérateurs qui commutent.

Pour terminer signalons que l'on peut étendre certains des résultats précédents à des situations quasi-homogènes : soit $q \sim \sum_{j \geq o} q_{M-j}$ où M est réel > 0 et où il existe des entiers k, $\ell \geq 1$ tels que :

$$q_{M-j}(\rho^k x, \rho^\ell . \xi) = \rho^{M-j} . q_{M-j}(x,\xi)$$

on suppose :

(39) $\qquad Q = q(x,D)$ est formellement autoadjoint

(40) $\qquad q_M(x,\xi) > 0$ si $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus (0)$.

Sous ces hypothèses on obtient l'analogue des théorèmes 1 et 2 à condition de définir S(t) par :

(41) $$S(t) = \text{Trace} \exp(-it\, Q^{(k+\ell)/M}) = \sum_{j \geq 1} \exp(-it\lambda_j^{(k+\ell)/M})$$

$(\lambda_j)_{j \geq 1}$ étant la suite des valeurs propres de Q. L'analogue du théorème 3 devient alors :

Théorème (V.5) :

$$N(\lambda) = \sum_{j=o}^{k+\ell-1} \gamma_j . \lambda^{(n(k+\ell)/M)-j/M} + O(\lambda^{(n-1)(k+\ell)/M})$$

pour $\lambda \to +\infty$.

En particulier, pour l'oscillateur quartique : $-\frac{d^2}{dx^2} + x^4$ on obtient :

$$N(\lambda) = \gamma_o \lambda^{3/4} + O(1), \qquad \lambda \to +\infty \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. M. Charbonnel : Spectre conjoint d'opérateurs pseudodifférentiels qui commutent. Séminaire de l'Université de Nantes, Oct. 80.

[2] J. Chazarain : Spectre d'un hamiltonien quantique et mécanique classique. Comm. in P.D.E. 5 n° 6 (1980) (595-644).

[3] Y. Colin de Verdière : Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes périodiques. Comm. Math. Helvetici 54 (1979) 508-522.

[3]' Y. Colin de Verdière : Spectre conjoint d'opérateurs qui commutent. (à paraître).

[4] J. J. Duistermaat and V. Guillemin : The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics. Inv. Math. 29 (1975) 39-79.

[5] V. Guillemin and S. Sternberg : The metaplectic representation, Weyl operators and spectral theory. Preprint.

[6] B. Helffer et D. Robert : Comportement semi-classique du spectre d'hamiltoniens quantiques elliptiques. A paraître.

[7] L. Hörmander : The spectral function of an elliptic operator. Acta Math. 121 (1968) 193-218.

[8] L. Hörmander : On the asymptotic distribution of the eigenvalues of pseudodifferential operators in $\mathbb{R}^n$. Arkiv. för Mat. 17 n°2 (1979) 296-313.

[9] D. Robert : Propriétés spectrales d'opérateurs pseudodifférentiels. Comm. in P.D.E. 3 (1978) 755-826.

[10] V. M. Tuloskii and M. A. Šubin : On asymptotic distribution of eigenvalues of pseudodifferential operators on $\mathbb{R}^n$. Math. USSR Sbornik 21 (1973) 565-583.

[11] A. Weinstein : Asymptotics of eigenvalue cluster for the Laplacian plus a potential. Duke Math. Journal 44 (1977). 883-892.

[12] K. Asada and D. Fujiwara : On some oscillatory transformation in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Japan J. Math. 4 (1978) p. 299-361.

*
* *
*