Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

D. Tartakoff

Hypoellipticité analytique pour des opérateurs à caractéristiques multiples - Démonstration élémentaire

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 18 bis, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A20_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1980-1981

HYPOELLIPTICITE ANALYTIQUE POUR DES OPERATEURS A CARACTERISTIQUES MULTIPLES - DEMONSTRATION ELEMENTAIRE

par D. TARTAKOFF

Exposé n° XVIIIbis

17 Mars 1981

Récemment, G. Métivier a démontré le théorème suivant :

Théorème : *Soit $P(x,D)$ un opérateur pseudo-différentiel analytique avec symbole $P \sim P_m + P_{m-1} + \dots$ où $\Sigma = P_m^{-1}(0)$ est une variété analytique et symplectique sur laquelle P_m s'annule exactement à l'ordre k, les P_{m-j} au moins à l'ordre $k-2j$, $j \leqslant k/2$. Soit P aussi hypoelliptique avec perte de $k/2$ dérivées. Alors P est microlocalement hypoelliptique analytique.*

Nous voulons donner ici une démonstration complètement différente, suivant les idées de [T4,T5], c'est-à-dire, employant seulement des inégalités L^2.

Rappelons que P est hypoelliptique (analytique) si $u \in \mathcal{E}'$ et $Pu \in C^\infty(\omega)$ (analytique réel dans ω), ω ouvert, implique aussi que $u \in C^\infty(\omega)$ ($\mathcal{A}(\omega)$). On dit que P est microlocalement hypoelliptique (analytique) si $(x_0,\xi_0) \notin WF(Pu)$ $(WF_A(Pu)) \Rightarrow (x_0,\xi_0) \notin WF(u)$ $(WF_A(u))$. Ici $(x_0,\xi_0) \notin WF_A(v)$ veut dire que il y a une constante C_v, un cône $\Gamma \ni \xi_0$ et un voisinage ω de x_0 et pour chaque N une distribution $v_N \in \mathcal{E}'$, $v_N = v$ dans ω, avec

$$|\hat{v}_N(\xi)| \leqslant C_v^N \left(1 + \frac{|\xi|}{N}\right)^{-N}, \quad \xi \in \Gamma .$$

Remarques

1) Si $P = \sum_{j=1}^{2n} X_j^2 + X_0 + C$ dans R^{n+1} avec X_j des champs de vecteurs réels et tels que $\left\{\{X_j\},T\right\}$ forme une base de TR^{n+1}, la condition "Σ symplectique" n'est autre que la non-dégénérescence d'une matrice de Levi définie par $[X_i,X_j] \equiv C_{ij}T$ modulo $\{X_k\}$. P perd une dérivée si $C_{ij} \not\equiv 0$ en chaque point.

2) En général la condition que P soit hypoelliptique avec perte de k/2 dérivées est bien connue ; pour les opérateurs P dont les symboles s'annulent sur Σ comme dans le

théorème, c'est équivalent (voir [B1]) à l'injectivité dans $\mathcal{S}(R^n)$ de

$$\sigma^k_{(x_0,\xi_0)}(P)(y,D_y) = \sum_{|\alpha|+|\beta|+2j=k} \frac{1}{\alpha!\beta!} (\partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi P_{m-j}(x_0,\xi_0))y^\alpha D^\beta_y$$

pour $(x_0,\xi_0) \in \Sigma$.

3) Après une transformation canonique analytique Φ au voisinage de (x_0,ξ_0), $\Sigma = \{x_1 = \dots = x_\nu = \xi_1 = \dots = \xi_\nu = 0\}$ et si on utilise un opérateur intégral de Fourier associé à Φ on rend P sous la forme

$$P = \Sigma \tilde{C}_I(x,D)A_I$$

$$A_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \quad A_{\nu+j} = x_j \frac{\partial}{\partial x_n} \quad , \quad j \leqslant \nu \ .$$

On ajoute des variables et on obtient

$$P = \Sigma \tilde{\tilde{C}}_I(x,D)X_I \quad \text{où}$$

$$(1) \qquad \begin{cases} X'_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j} - y_j \dfrac{\partial}{\partial t} \\ X''_j = \dfrac{\partial}{\partial y_j} \end{cases} .$$

Aussi on peut multiplier par un opérateur elliptique de façon que, microlocalement,

$$(2) \qquad P = \sum_{|I|=k} C_I(x,D)X_I$$

les $C_I(x,D)$ étant des opérateurs pseudo-différentiels analytiques d'ordre 0. Les mêmes hypothèses restent valables et l'hypoellipticité analytique de ce P implique celle du P initial. De plus, on sait d'après le travail de Helffer Nourrigat [H1] que

$$(3) \qquad \sum_{|I|\leq k} \| X_I v\|_{L^2} \leq C(\| P_{(x_0,\xi_0)} v\|_{L^2} + \| v\|_{L^2})$$

où $P_{(x_0,\xi_0)}$ désigne $\sum_{|I|=k} C_I(x_0,\xi_0) X_I$.

4) Quand P est donné par (2) avec des coefficients variables, nous avions déjà résolu le problème (pour k=2, mais la démonstration reste applicable pour d'autres k) dans [T4], sous l'hypothèse (3) pour P au lieu de $P_{(x_0,\xi_0)}$. Trèves l'avait fait aussi dans [T6] pour k=2 dans le cas pseudo-différentiel. La démonstration de Métivier [M2] est assez proche de celle de Trèves où on construit des paramétrixes de type $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

5) A partir de (3), on peut permettre que les coefficients $C_I(x,D_x)$ soient des matrices, c'est-à-dire, on peut aussi traiter des systèmes qui satisfont à (3).

<u>Histoire et applications</u>

D'origine, les opérateurs sous-elliptiques viennent de l'analyse complexe, le problème de $\bar\partial$-Neumann, et le Laplacien complexe au bord $\square_b \simeq \bar\partial_b \bar\partial_b^* + \bar\partial_b^* \bar\partial_b$. Là, le $\bar\partial_b$ est un complexe formé des champs de vecteurs L_j holomorphes et tangents au bord d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ à frontière $\partial\Omega$ C^∞ (ou analytique). Même dans le cas où Ω est strictement pseudo-convexe, on n'a que l'estimation

$$(4) \qquad \sum_{i,j=1}^{2n-2} \| X_i X_j v\|_{L^2} + \| Tv\|_{L^2} \leq C(\| \square_b v\|_{L^2} + \| v\|_{L^2})$$

où les X_i sont les parties réelles et imaginaires des L_i et T, aussi tangent à la frontière est indépendent des X_j. La forme de Levi peut dégénérer dans certains cas (où $\Box_b$ opère sur des formes) sans perdre l'estimation (3) (c'est-à-dire que la condition Y(q) de Kohn permet, quelques fois, des valeurs propres de C_{ij} identiquement nulles).

Alors on s'est posé la question du lien entre les estimations sous-elliptiques (4) et l'hypoellipticité analytique, parce que d'après le travail de Kohn ([K1]) on sait déjà que (3) implique l'hypoellipticité C^∞ (et, d'après [T1], dans les classes de Gevrey G^g $s \geqslant 2$). L'exemple de Baouendi-Goulaouic a montré qu'il existe des opérateurs de la forme ΣX_j^2 qui perdent une dérivée et qui sont hypoelliptiques dans G^s, $s \geqslant 2$, mais ne le sont pas dans l'analytique.

Mais en 1976 ([T2]) on a introduit une autre condition

(5) $$\det (C_{ij}) \neq 0$$

pour obtenir l'hypoellipticité dans G^s $1 < s < 2$ et dans certaines classe quasi-analytiques. Ensuite en 1978, Trèves [T6] et l'auteur ([T4], [T5]) ont démontré le cas analytique sous cette hypothèse. La démonstration de Trèves, limitée au cas de caractéristiques doubles avec P_m réel mais permettant des coefficients pseudo-différentiels, mais scalaires, donne une paramétrixe ; la nôtre n'était pas limitée à k=2, traitait des systèmes dont les coefficients étaient des fonctions et n'employait que des inégalités L^2.

Après microlocalisation (voir ci-dessus) le théorème de Métivier n'est autre que l'ancienne situation avec des coefficients pseudo-différentiels, et outre les X_i, plusieurs T_k pour donner l'espace tangent, avec la condition $\det(C_{ij}) \neq 0$ généralisée à

(6) $$\Sigma = P_m^{-1}(0) \quad \text{symplectique .}$$

De plus, on sait d'après les travaux de Métivier [M1], Grigis [G1], R. Lascar [L1] et Sjöstrand [S1] que l'on a besoin d'une condition sur Σ pour avoir l'hypoellipticité analytique. Si (6) est violée en chaque point de ω, on n'a jamais l'analyticité sur des groupes et sous la condition que P^* soit hypoelliptique en général.

Comme autre application de notre méthode, nous avons étudié, avec L.P. Rothschild, des cas d'opérateurs P invariants à gauche et homogènes sur le groupe de Heisenberg,qui ne sont pas hypoelliptiques mais qui le sont si on ajoute $\lambda T^{d/2}, |\lambda| \leqslant \varepsilon$ (d = ordre homogène de P), comme par exemple $\square_b$ sur des fonctions. On écrit :

$$Q_o = \frac{1}{2\Pi i} \int_\Gamma \lambda^{-1} (P+\lambda T^{d/2})^{-1} d\lambda, \; B_o = \frac{1}{2\Pi i} \int_\Gamma (P+\lambda T^{d/2})^{-1} d\lambda$$

où Γ est un petit lacet dans $\mathbb{C}$ qui contient 0. On a $PQ_o = I - T^{d/2} B_o$, $T^{d/2} B_o$ est le projecteur orthogonal sur $R(P)^\perp$ et, en appliquant nos estimations uniformément en λ à $(P+\lambda T^{d/2})$, on obtient que Q_o et B_o conservent l'analyticité localement. (Voir aussi [M3]).

<u>Démonstration (esquisse) du Théorème</u>

Nous n'avons besoin que d'adapter les méthodes de [T5] au cas des coefficients pseudo-différentiels. Signalons d'abord que nous avons pu simplifier la démonstration donnée dans [T5]. Nous esquissons ici la démonstration simplifiée du Théorème dans le cas des coefficients qui sont des fonctions, et nous indiquons ce qui change quand les coefficients sont pseudo-différentiels.

Prenons Pu = 0 dans ω. (Ceci ne limite pas la généralité du Théorème, d'après le Théorème de Cauchy-Kawalevski. Dans le cas microlocal on peut aussi prendre Pu = 0 microlocalement). Alors il suffit de montrer que dans $\omega' \subset\subset \omega$,

$$\| D^\alpha u \|_{L^2(\omega')} \leqslant C^{|\alpha|} |\alpha|!$$

ou bien, d'après le théorème de Nelson, que

$$\| X^I \, T^b u \|_{L^2(\omega')} \leqslant \tilde{C}^{|I|+b} \, (|I|+b)!$$

(Microlocalement, on doit montrer qu'il existe $Q_N \equiv 1$ au voisinage de ω' et $\psi_N(\xi)$ à support dans un cône contenant $\xi_o = (0,\ldots,0,\xi_n)$ et $\equiv 1$ dans un sous-cône $\Gamma' \cap \{|\xi| \geqslant 2N\}$ avec

$$\| X^I \, T^b \, \psi_N(D) \, Q_N(x) u \|_{L^2} \leqslant C^N N^{|I|+b} \quad \text{pour } |I| + b \leqslant N \ .)$$

L'emploi de l'inégalité

(7) $$\sum_{|K| \leqslant k} \| X^K v \|_{L^2} \leqslant C(\| Pv \|_{L^2} + \| v \|_{L^2})$$

avec $v = X^I Q_o u$, $Q_o \in C_o^\infty(\omega)$ donne tout de suite le crochet $[P, Q_o X^I]$ qui contient $C|I|$ termes de la forme (coef. de $P)Q_o X^{I+K'}$ Tu avec $|K'| = |K| + k - 2$. Itérant, on obtient $C^{|I|/2} |I|(|I|-2) \ldots (2)$ termes de la forme (coef.)$Q_o X^{K''} T^{|I|/2}$ u avec $|K''| \leqslant k$. Il est inutile de continuer sans bien localiser T^q parce que $[X, Q_o T^q] = (XQ_o)T^q$ échange un X (donc $T^{1/2}$) pour Q'. La bonne localisation est donnée par :

(8) $$\begin{aligned}(T^s)_{Q_o} &= \sum_{|\alpha+\beta| \leqslant s} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!\beta!} (X'^{\alpha} X''^{\beta} Q_o) \, X'^{\beta} X''^{\alpha} \, T^{s-|\alpha+\beta|} \\ &= Q_o T^s - \sum_j (X'_j Q_o) X''_j T^{s-1} + \sum_j (X''_j Q_o) X'_j T^{s-1} + \ldots\end{aligned}$$

ou $X'_j = X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - y_j \frac{\partial}{\partial t}$, $X''_j = X_{\nu+j} = \frac{\partial}{\partial y_j}$, $T = \frac{\partial}{\partial t}$.

Lemme :
$$[X'_j\ ,\ (T^s)_{Q_o}] \equiv 0$$
$$[X''_j\ ,\ (T^s)_{Q_o}] \equiv (T^{s-1})_{TQ}$$

modulo C^s *termes de la forme* $Q_o^{(s+1)}\ X^{I_s} / s!$ *où* $|I_s| = s$. *Aussi, si* $g(x,y,t)$ *est de classe* C^∞,

$$[(T^s)_{Q_o},g] = \sum_{0<i+2j+k'\leqslant s} C_{ijKs}\ C^{i+j}\ g^{(i+j+k')}$$

$$(9) \qquad \underset{|\mu|\leqslant i,\ |\nu'|+|\nu''|\leqslant|\nu|=j}{\text{supremum}}\ y^{\mu+\nu'+\nu''} \circ X'^{\nu-\nu'-\nu''} \circ (T^{s-i-2j-k'})_{Q_o\,(i+j+|\nu''|)} \circ X''^{\nu'}$$

où $C_{ijKs} = (s-i-j)!\ /\ i!j!k'!(s-i-j-k')!$.

(Si on remplace g par un des $C_I(x,D)$ les $[X'^{\beta}\ X''^{\alpha}\ T^{s-|\alpha+\beta|}\ ,\ C_I(x,D)]$ restent comme dans le Lemme puisque $[X,C_I]$ est très explicite, mais au lieu de $X'^{\alpha}\ X''^{\beta}\ Q_o$ on doit écrire $ad^{\alpha}_{X'}\ ad^{\beta}_{X''}\ (Q_N(x)\ \psi_N(D))$ et son crochet avec $C_I(x,D)$ contient des termes donnés par la formule de Leibnitz (tous explicites) et un reste).

Ainsi c'est clair qu'il faut estimer généralement des choses comme les suivantes $(|I| + |J| \geqslant k)$; écrivant G_{A,Q_o} pour $X^I\ T^P(T^s)_{Q_o^{(r)}}\ T^q\ X^J$ où $A = (I,p,s,r,q,J)$, avec $|A| = |I| + p + s + q + |J|$, l'inégalité (7) donne, avec le Lemme,

$$(10) \qquad \|G_{A,Q_o}u\|_{L^2} \leqslant C(\|[P,G_{A_1,Q_o}]u\| + \|\sum_{j=2}^{2d+1} C_j\ G_{A_j,Q_o}u\|_{L^2})$$

où $A_1 = (I_1,p,s,r,q,J_1)$ avec $|I_1| + |J_1| + k = |I| + |J|$ et les $C_j\ G_{A_j,Q_o}$ viennent second terme à droite dans (7) et des crochets de quelques X avec $(T^s)_{Q_o^{(r)}}$ si $|I|$ n'est pas assez grand pour appliquer (7) directement. Ainsi chaque $C_j\ G_{A_j,Q_o}$ a $A_j = (I_j,\ p,\ s-1,\ r+1,\ q,\ J_j)$ avec $|I_j| + |J_j| = |I| + |J|$ et $C_j = 1$ ou $A_j = (I_j,\ p,\ 0,\ r+s+1,\ q,\ J_j)$ avec $|I_j| + |J_j| = |I| + |J| - 1 + s$ et $C_j = C^s/s!$ ou $A_j = (I_j,\ p,\ s,\ r,\ q,\ J_j)$, $|I_j| + |J_j| = |I| + |J| - k$.

Dans $[P, G_{A_1,Q_o}]$, les termes qui viennent de (coef.) $[X,\ G_{A_1,Q_o}]$ sont exactement comme ceux ci-dessus avec aussi des cas où $[X_i, X_j]$ donne T : dans ce cas la constante $C_j \leqslant d(|I| + |J| - k)$ et $A_j = (I_j,\ p',\ s,\ r,\ q',\ J_j)$ avec $|I_j| + |J_j| = |I| + |J| - 2$ et $p' + q' = p + q + 1$. Pour l'instant nous laissons le terme [(coef. de P), $G_{A_1,Q_o}]X^k u$.

Pour bien contrôler les autres, on voit que dans chaque cas, $|A_j| < |A|$, et quand $(T^s)_{Q_o^{(r)}}$ disparaît, il est remplacé par $C^s\ Q_o^{(s+r+1)}\ X^s/s!$. On introduit une norme formelle

$$|||G_{A,Q_o}|||_N = C_o^s\ N^{|A|+r+s}/s\ !$$

et $$|||\Sigma\ C_j\ G_{A_j,Q_o}|||_N = \Sigma|C_j|\ \ |||G_{A_j,Q_o}|||_N\ .$$

Ainsi chacun des termes que nous avons obtenu a (si $C_o > C$)

$$|||C_j\ G_{A_j,Q_o}|||_N \leqslant C|||G_{A,Q_o}|||_N\ .$$

Alors, évidemment :

$$\| G_{A,Q_o} u\|_{L^2} \leqslant C \sup_{\substack{|A'|<|A| \\ |||G_{A',Q_o}|||_N \leqslant |||G_{A,Q_o}|||_N}} \| G_{A',Q_o} u\|_{L^2} + C\, \| [(\text{coef. de } P),\ G_{A_1,Q_o}]\ X^k u\|_{L^2} \tag{11}$$

Il est convenable, pour traiter [coef., G_{A',Q_o}], d'écrire X_g, T_g pour des champs de vecteurs qui n'agissent que sur g et X_*, T_* pour ceux qui n'agissent pas sur g. Ainsi, par exemple,

$$T^a(gv) = (T_g+T_*)^a\, gv = \Sigma\binom{a}{a'}\,(T_g^{a'})\,(T^{a-a'}v)\ .$$

Et comme norme formelle :

$$|||\Sigma\, C_j\, X_g^{K_j}\, T_g^{t_j}\, X_*^{I_j}\, T_*^{P_j}\, (T_*^{s_j})_{Q_o(r_j)}\, T_*^{q_j}\, X_*^{J_j}|||_{N,C_g}$$

$$= \Sigma|C_j|\ \ |||X_g^{K_j}\, T_g^{t_j}\, X_*^{I_j}\, T_*^{P}\, (T_*^{s_j})_{Q_o(r_j)}\, T_*^{q_i}\, X_*^{J_i}|||\ _{N,C_g}$$

avec $|||X_g^K\, T_g^t\, X_*^I\, T_*^P(T_*^s)_{Q_o(r)}\, T_*^q\, X_*^J|||_{N,C_g} = C_g^{|K|+t}(|K|+t)!\,|||X^I\, T^P(T^s)_{Q_o}\, T^q\, X^J|||_N$.

Maintenant ce n'est pas difficile de calculer [coef., G_{A',Q_o}] (voir (2.18)-(2.24) de [T5]). On obtient aussi que

$$||\,[\text{coef.},\ G_{A_1,Q_o}]\overset{k}{X}u||_{L^2} \leqslant C \sup_{\substack{|A'|<|A| \\ |||G_{A',Q_o}|||_N \leqslant |||G_{A,Q_o}|||_N}} ||\,G_{A',Q_o}u||_{L^2}$$

si on prend $C_o \gg C_g$. (Quand $|I| + |J| = k+1$, c'est possible d'obtenir un A_1 avec $|I'| + |J'| = k-1$, $p'+q' = p+q+1$, $|A_1| < |A|$. Alors c'est impossible d'utiliser (7) complètement, mais peu importe ; après deux itérations le $|A'|$ sera réduit comme ci-dessus).

Si on continue répétant tout ça quand $|I| + |J| \geqslant k-1$, éventuellement ($\leqslant 2N_o$ fois) on n'aura que des G_{A',Q_o} "simples" : $|I| + |J| \leqslant k$ et $s = 0$. Et si on commence avec

$$\sup_{|I|+b\leqslant N_o} \| X^I \, T^b u\|_{L^2(\omega')} \leqslant \sup_{|I|+b\leqslant N_o} \| X^I (T^b)_{Q_o} u\|_{L^2}$$

où $Q_o \equiv 1$ au voisinage de $\overline{\omega}'$, les $G_{A',Q}$ simples qu'on obtient auront $r \leqslant N_o$ et $p + q + |I| + |J| \leqslant N_o/2$ (le $(T^b)_{Q_o}$ est devenu $(T^b)_{Q_o}$ et disparaît éventuellement, et les nouveaux T viennent seulement comme $[X_i,X_j]$). Compte tenu des $|||' \; |||_N$, on a

$$\sup_{|I|+b\leqslant N_o} \| X^I T^b u\|_{L^2(\{Q_o=1\})} / N_o^{\;|I|+b} \leqslant$$

(12)
$$\leqslant C^{N_o} \sup_{r\leqslant N_o} \left(\frac{|Q_o^{(r)}|}{N_o^{(r)}} \right) \sup_{|I'|+b' \leqslant \frac{N_o}{2}} \frac{\| X^{I'} T^{b'} u\|}{(\frac{N_o}{2})^{|I'|+b'}} \; L^2(\{\mathrm{supp}\; Q_o\})$$

Pour les Q, on prend une suite $Q = Q_o ,\ldots,Q_{\log_2 N_o}$, $Q_j \equiv 1$ sur $\omega_j \subset\subset \omega_{j+1}$, $Q_j \in C_o^\infty(\omega_{j+1})$, $\omega_o = \omega'$, $\omega_{\log_2 N_o} = \omega$ avec $d_j = \frac{d}{2^j} = \mathrm{dist}\,(\omega_j,\omega_{j+1}^C)$ et

$$|D^\alpha Q_j| \leqslant C_1^{|\alpha|+1} N_o^{|\alpha|} d^{-|\alpha|} \quad \text{si } |\alpha| \leqslant N_o/2^j$$

avec C_1 universelle. (Ces Q "presque analytiques" sont dues à Mandelbrojt-Enrenpreis).

Si on itère (12), la prochaine fois avec N_o remplacé par $N_o/2$ partout et Q_o par Q_1, on arrive à la fin à

$$\sup_{|I|+b\leqslant N_o} \| X^I T^b u\|_{L^2(\omega')} \leqslant \tilde{C}^{N_o} N_o^{\;N_o} \| u\|_{H^d(\omega)}$$

avec $\tilde{C}$ indépendant de N_0. Cela donne l'analyticité.

Dans le cas où les coefficients sont pseudo-différentiels, la démonstration suit les mêmes lignes ; bien sûr c'est plus compliqué de passer d'une $Q\psi$ à une autre - et il y a plusieurs cas où l'on doit estimer des opérateurs à symboles nuls et aussi des crochets $[Q(x),\psi(D)]$ et un reste qui interviennent quand on veut remplacer $P_{(x_0,\xi_0)}$ dans (3) par P. Les détails seront publiés ailleurs.

BIBLIOGRAPHIE

[A1] K.G. Anderson :
Propagation of analyticity of solutions of partial differential equations with constant coefficients ;
Arkiv für Mat. 8(1970) 277-302.

[B1] L. Boutet de Monvel, A. Grigis et B. Helffer :
Paramétrixes d'opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples ;
Astérisque 34-5(1976) 93-121.

[B2] L. Boutet de Monvel et P. Krée :
Pseudo-differential operators and Gevrey classes ;
Ann. Inst. Fourier Grenoble 17(1967) 295-323.

[G1] A. Grigis :
Propagation des singularités sur des groupes de Lie nilpotents de rang 2 ;
A paraître.

[H1] B. Helffer, J. Nourrigat :
Hypoellipticité pour des groupes nilpotents de rang de nilpotence 3 ;
Comm. in P.D.E., III (8) (1978) 643-743.

[K1] J.J. Kohn :
Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds I ;
Annals of Math. 78 (1963) 112-148

[L1] R. Lascar :
Propagation des singularités et hypoellipticité pour des opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques doubles ;
Comm. in P.D.E. III (3) (1978) 201-247.

[M1] G. Métivier :
Une classe d'opérateurs non hypoelliptiques analytiques ;
Indiana J. Math., à paraître.

[M2] G. Métivier :
Analytic hypoellipticity for operators with multiple characteristics ;
Comm. P.D.E. Janvier, 1981.

[M3] G. Métivier :
Hypoellipticité analytique sur des goupes nilpotents de rang 2 ;
Duke Math. J. 47 (1980), 195-221.

[S1] J. Sjöstrand :

Propagation of singularities for operators with multiple involutive characteristics ;

Ann. Institut Fourier Grenoble 26 (1) (1976) 141-55.

[T1] D.S. Tartakoff :

Gevrey hypoellipticity for subelliptic boundary value problems ;

Comm. Pure Appl. Math. 26 (1973) 251-312.

[T2] D.S. Tartakoff :

Local Gevrey and quasi analytic hypoellipticity for $\square_b$ *;*

Bull. A.M.S. 82 (1976) 740-742.

[T3] D.S. Tartakoff :

On the global real analyticity of solutions to $\square_b$ *;*

Comm. P.D.E. I (1976) 283-311.

[T4] D.S. Tartakoff :

Local analytic hypoellipticity for $\square_b$ *on non-degenerate Cauchy-Riemann manifolds ;*

Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 75 (1978) 3027-3028.

[T5] D.S. Tartakoff :

The local real analyticity of solutions to $\square_b$ *and the* $\bar{\partial}$*-Neumann problem ;*

Acta Mathematica 145 (1980) 77-204.

[T6] F. Trèves :

Analytic hypoellipticity of a class of pseudo-differential operators ;

Comm. in P.D.E. III (1978) 475-642.