Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

K. Taira

Semi-groupes et problèmes aux limites

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. nº 18, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A19_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 0 - 1 9 8 1

SEMI-GROUPES ET PROBLEMES AUX LIMITES

par K. TAIRA

Exposé No XVIII

17 Mars 1981

§ 0. INTRODUCTION.

Soit D un domaine borné d'un espace euclidien $\mathbb{R}^N$, $\overline{D}$ étant une variété compacte à bord ∂D de classe C^∞ et de dimension N, et soit $C(\overline{D})$ l'espace des fonctions à valeurs réelles et continues sur $\overline{D}$.

Un semi-groupe $\{T_t\}_{t\geq 0}$ fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur $C(\overline{D})$ est dit un semi-groupe de Feller sur $\overline{D}$ si les $\{T_t\}_{t\geq 0}$ sont positifs et contractants sur $C(\overline{D})$, i.e.,

$$f \in C(\overline{D}) \ , \ 0 \leq f \leq 1 \text{ sur } \overline{D} \Rightarrow 0 \leq T_t f \leq 1 \text{ sur } \overline{D} \ .$$

Il est connu qu'il correspond à un semi-groupe de Feller $\{T_t\}_{t\geq 0}$ sur $\overline{D}$ un processus de Markov fort $\mathfrak{X}$ sur $\overline{D}$ dont la probabilité de transition $P(t,x,dy)$ satisfait à :

$$(0.1) \qquad T_t f(x) = \int_{\overline{D}} P(t,x,dy)\, f(y) \quad , \quad f \in C(\overline{D})$$

et que, sous certaines hypothèses de continuité concernant la probabilité de transition $P(t,x,dy)$ telles que

$$(0.2) \qquad \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{|y-x|>\varepsilon} P(t,x,dy) = 0 \quad \text{pour tous } \varepsilon > 0 \text{ et } x \in \overline{D} \ ,$$

le générateur infinitésimal $\mathfrak{A}$ de $\{T_t\}_{t\geq 0}$ est décrit analytiquement comme suit (cf. [2], [4], [14]) :

i) Soit x un point fixé de l'intérieur D du domaine. Pour une fonction u de classe C^2 et appartenant au domaine de définition $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ de $\mathfrak{A}$, en développant $u(y) - u(x)$, on obtient d'après (0.1) et (0.2)

$$\begin{aligned}
(0.3) \quad \mathfrak{A}\, u(x) &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{T_t u(x) - u(x)}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int_{\overline{D}} P(t,x,dy) u(y) - u(x) \right) \\
&= \lim_{t\downarrow 0} \Big[\frac{1}{t} \int_{|y-x|>\varepsilon} P(t,x,dy) u(y) + \frac{1}{t} \int_{|y-x|\leq\varepsilon} (P(t,x,dy) - 1) u(x) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{t} \int_{|y-x|\leq\varepsilon} (y_i - x_i)\, P(t,x,dy) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{t} \int_{|y-x|\leq\varepsilon} (y_i - x_i)(y_j - x_j)\, P(t,x,dy) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \\
&\quad + \text{des termes de reste} \Big]
\end{aligned}$$

$$= c(x)\ u(x) + \sum_{i=1}^{N} b^{i}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}(x) ,$$

où les limites :

$$\begin{cases} c(x) = \lim\limits_{t \downarrow 0} \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_{|y-x| \le \varepsilon} (P(t,x,dy) - 1) , \\ b^{i}(x) = \lim\limits_{t \downarrow 0} \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_{|y-x| \le \varepsilon} (y_i - x_i)\ P(t,x,dy) , \\ a^{ij}(x) = \lim\limits_{t \downarrow 0} \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_{|y-x| \le \varepsilon} (y_i - x_i)(y_j - x_j)\ P(t,x,dy) \end{cases}$$

existent indépendamment de $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et satisfont à :

$$\begin{cases} 1^{o}) \quad c(x) \le 0. \\ 2^{o}) \quad a^{ij}(x) = a^{ji}(x) \quad \text{et} \\ \qquad \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \ge 0 , \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N . \end{cases}$$

Posons

$$(0.4) \qquad Au(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b^{i}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)\ u(x) .$$

On a alors d'après (0.3)

$$(0.5) \qquad \mathfrak{A}u(x) = Au(x) , \quad u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}) \cap C^2(D) .$$

ii) De même façon, pour un point fixé x' du <u>bord</u> ∂D du domaine, choisissant des coordonnées locales $x = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N)$ avec $x \in D$ si $x_N > 0$ et $x \in \partial D$ si $x_N = 0$, on a

$$(0.6) \quad Lu(x') = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}(x') + \sum_{i=1}^{N-1} \beta^{i}(x') \frac{\partial u}{\partial x_i}(x') + \gamma(x')\, u(x')$$

$$+ \mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') - \delta(x')\ Au(x')$$

$$= 0 , \quad u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}) \cap C^2(\overline{D}) .$$

Ici

$$\begin{cases} 1^o) & \alpha^{ij}(x') = \alpha^{ji}(x') \quad \text{et} \\ & \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\xi_i\xi_j \geq 0 \quad , \quad \xi' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1} \; . \\ 2^o) & \gamma(x') \leq 0 \; . \\ 3^o) & \mu(x') \geq 0 \; . \\ 4^o) & \delta(x') \geq 0 \; . \\ 5^o) & n \text{ est la normale unitaire intérieure à } \partial D \text{ en } x' \; . \end{cases}$$

La condition L sera appelée la condition aux limites de Ventcel'.

Du point de vue des probabilités, le résultat ci-dessus peut être interprété comme suit : une particule dans le processus de diffusion (processus de Markov fort à chemins continus) $\mathfrak{X}$ sur $\overline{D}$ est gouvernée par l'équation $\frac{\partial}{\partial t} - A$ dans l'intérieur D du domaine, et elle obéit à la condition L sur le bord ∂D du domaine. Notons que les termes $\sum_{i,j} \alpha^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_i \beta^i \frac{\partial u}{\partial x_i}$, γu, $\mu \frac{\partial u}{\partial n}$ et $\delta A u$ de L correspondent respectivement à la diffusion le long du bord, au phénomène d'absorption, de réflexion et de viscosité.

Analytiquement, via le célèbre théorème de Hille-Yosida dans la théorie des semi-groupes, il peut être interprété comme suit : un semi-groupe de Feller $\{T_t\}_{t\geq 0}$ sur $\overline{D}$ est décrit par un opérateur différentiel elliptique dégénéré A du second ordre et une condition aux limites de Ventcel' L si les chemins du processus de Markov fort $\mathfrak{X}$ correspondant à $\{T_t\}$ sont continus. On est ainsi ramené à l'étude de problèmes aux limites non-elliptiques pour (A,L) dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Nous nous intéressons alors au :

Problème : Inversement, étant données des données analytiques (A,L), peut-on construire un semi-groupe de Feller $\{T_t\}_{t\geq 0}$ sur $\overline{D}$?

Remarque : Dans le cas $N = 1$, ce problème a été complètement résolu du point de vue des probabilités et aussi analytique par Feller, Dynkin, Itô-McKean, Jr. et Ray. On va donc considérer le cas $N \geq 2$.

Dans [2], Bony, Courrège et Priouret ont démontré que, sous l'hypothèse d'ellipticité pour l'opérateur différentiel A, si la matrice $(\alpha^{ij}(x'))$ est définie strictement positive sur ∂D, il existe alors un semi-groupe de Feller $\{T_t\}_{t\geq 0}$ sur $\overline{D}$ dont le générateur infinitésimal $\mathfrak{A}$ satisfait aux conditions (0.5) et (0.6). Intuitivement, leur résultat implique que si une particule se diffuse partout le long du bord, il existe alors un semi-groupe de Feller $\{T_t\}_{t\geq 0}$ sur $\overline{D}$ correspondant à un tel phénomène de diffusion.

Dans [11], l'auteur a généralisé leur résultat au cas où la matrice $(\alpha^{ij}(x'))$ est définie non-négative sur ∂D, sous certaine hypothèse analytique concernant la condition aux limites L ([11], théorème 1). Mais le sens intuitif de cette hypothèse n'est pas tellement clair du point de vue des probabilités.

Dans cette note, on améliorera ce résultat comme suit (théorème 3) : sous l'hypothèse d'ellipticité pour l'opérateur A, si

(0.7) une particule passe l'ensemble $M = \{x' \in \partial D \,;\, \mu(x') = 0\}$, où aucun phénomène de diffusion n'a lieu, au bout d'un temps fini (hypothèse (A)),

il existe alors un semi-groupe de Feller $\{T_t\}_{t\geq 0}$ sur $\overline{D}$ correspondant à un tel phénomène de diffusion.

De plus, on donnera des théorèmes d'existence abstraits de semi-groupes de Feller $\{T_t\}_{t\geq 0}$ sur $\overline{D}$ en termes de problèmes aux limites pour (A,L) à paramètres réels α et λ tels que

$$\begin{cases} (\alpha - A)u = f & \text{dans } D \;, \\ (\lambda - L)u = \varphi & \text{sur } \partial D \;, \end{cases}$$

en généralisant des résultats de Sato-Ueno [9] au cas où l'opérateur différentiel A est non-elliptique sur $\overline{D}$ (théorème 1 et corollaire 2). Intuitivement, notre hypothèse de non-ellipticité concernant l'opérateur A est la suivante (hypothèse (H)) :

(0.8) <u>Une particule gouvernée par l'équation</u> $\frac{\partial}{\partial t} - A$ <u>se diffuse partout dans</u> D <u>et sort de</u> $\overline{D} = D \cup \partial D$ <u>au bout d'un temps fini</u>.

§ 1. ENONCE DES RESULTATS.

On commence par énoncer des théorèmes d'existence abstraits de semi-groupes de Feller $\{T_t\}_{t\geq 0}$ sur $\overline{D}$.

Pour l'opérateur A donné par (0.4), supposons qu'il existe un sous-ensemble ouvert G de $\mathbf{R}^N$, qui contient $\overline{D}$, tel que les coefficients de A satisfont à :

$$(1.1)\quad \begin{cases} 1^o) \quad a^{ij} \in C^\infty(G) \quad \text{avec } a^{ij} = a^{ji} \text{ et} \\ \qquad \sum_{i,j=i}^{N} a^{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geq 0\ ,\ x \in G,\ \xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N) \in \mathbf{R}^N . \\ 2^o) \quad b^i \in C^\infty(G) \ . \\ 3^o) \quad c \in C^\infty(G) \text{ avec } c(x) \leq 0 \text{ dans } D . \end{cases}$$

L'hypothèse fondamentale concernant l'opérateur A est la suivante :

(H) <u>L'algèbre de Lie</u> $\mathcal{L}(X_1,X_2,\ldots,X_N)$ <u>sur</u> $\mathbf{R}$ <u>engendrée par les champs de vecteurs</u> $X_i = \sum_{j=1}^{N} a^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$ <u>est de rang</u> N <u>en tout point de</u> D <u>et le bord</u> ∂D <u>est non-caractéristique par rapport à l'opérateur</u> A, i.e., $\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x')n_i n_j > 0$ <u>sur</u> ∂D <u>où</u> $n = (n_1,n_2,\ldots,n_N)$ <u>est la normale unitaire intérieure à</u> ∂D <u>en</u> x'.

Le sens intuitif de l'hypothèse (H) est, comme mentionné dans (0.8), qu'une particule partant d'un point arbitraire de D peut se diffuser <u>partout</u> dans D et sortir de $\overline{D} = D \cup \partial D$ au bout d'un temps <u>fini</u> (cf. remarque 2.3).

Supposons que les coefficients de la condition aux limites de Ventcel' L donnée par (0.6) satisfont à :

(1.2)

1°) α^{ij} sont les composantes d'un tenseur contravariant symétrique de classe C^∞ et de type (2,0) sur ∂D et

$$\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\,\xi_i\,\xi_j \geq 0, \quad x' \in \partial D, \quad \xi' \in T^*_{x'}(\partial D) \text{ où } T^*_{x'}(\partial D)$$

est l'espace cotangent à ∂D en x'.

2°) $\beta^i \in C^\infty(\partial D)$.

3°) $\gamma \in C^\infty(\partial D)$ avec $\gamma(x') \leq 0$ sur ∂D.

4°) $\mu \in C^\infty(\partial D)$ avec $\mu(x') \geq 0$ sur ∂D.

5°) $\delta \in C^\infty(\partial D)$ avec $\delta(x') \geq 0$ sur ∂D.

Quand on construit un semi-groupe de Feller $\{T_t\}_{t\geq 0}$ sur $\overline{D}$, on utilisera une classe $\{S_t^\alpha\}_{t\geq 0}$ $(\alpha \geq 0)$ de semi-groupes de Feller sur ∂D (cf. remarque 3.1). Pour cela, introduisons la définition suivante :

<u>Définition 1.1</u> : Une condition aux limites de Ventcel' L est dite <u>transversale</u> sur ∂D si

(1.3) $$\mu(x') + \delta(x') > 0 \quad \text{sur } \partial D \quad .$$

Intuitivement, puisque d'après (1.3) le phénomène de réflexion ou bien de viscosité a lieu sur le bord ∂D, l'hypothèse de transvrsalité de L implique qu'il existe une relation entre des processus de Markov sur $\overline{D}$ et des processus de Markov sur ∂D. Une interprétation en termes de probabilités de cette relation est donnée par Ueno [13].

On peut maintenant énoncer le

<u>Théorème 1</u> : Soit A un opérateur différentiel satisfaisant à (1.1) et à l'hypothèse (H) et soit L une condition aux limites de Ventcl' satisfaisant à (1.2) et à l'hypothèse de transversalité. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

[I] (EXISTENCE) Il existe des constantes $\alpha \geq 0$ et $\lambda \geq 0$ telles que le problème aux limites

$$\begin{cases} (\alpha - A)u = 0 & \text{dans } D\,, \\ (\lambda - L)u = \varphi & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

admette une solution $u \in C^\infty(\overline{D})$ pour toute $\varphi \in C^\infty(\partial D)$.

[II] (UNICITE) Pour un $\alpha > 0$, on a

$$\begin{cases} u \in C(\overline{D}) \ , \quad (\alpha - A)u = 0 \text{ dans } D, \ Lu = 0 \text{ sur } \partial D \\ \Rightarrow u = 0 \text{ dans } D . \end{cases}$$

Il existe alors un semi-groupe de Feller $\{T_t\}_{t\geq 0}$ sur $\overline{D}$ dont le générateur infinitésimal $\mathfrak{A}$ est donné par :

$$(1.4)\begin{cases} \text{a) Le domaine de définition } \mathcal{D}(\mathfrak{A}) \text{ de } \mathfrak{A} \text{ est} \\ \qquad \mathcal{D}(\mathfrak{A}) = \{u \in C(\overline{D}) \ ; \ Au \in C(\overline{D}),\ Lu = 0\} \ . \\ \text{b) } \mathfrak{A}u = Au \text{ pour } u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}) \ . \end{cases}$$

<u>Remarque 1.2</u> : Dans le théorème 1, Au est prise au sens de distributions et la condition aux limites Lu peut être définie comme distribution sur ∂D pour $u \in C(\overline{D})$ telle que $Au \in C(\overline{D})$, car le bord ∂D est non-caractéristique par rapport à l'opérateur A (cf. [5], théorèmes 4.3.1 et 2.5.6).

En général, il y a une relation étroite entre l'unicité et la régularité des solutions de problèmes aux limites. En effet, on obtient le

<u>Corollaire 2</u> : Soient A et L comme dans le théorème 1 et supposons que la condition [I] et la condition suivante (remplaçant la condition [II]) sont satisfaites :

[III] (REGULARITE) Pour un $\alpha > 0$, on a

$$\begin{cases} u \in C(\overline{D}),\ (\alpha - A)u = 0 \text{ dans } D,\ Lu \in C^\infty(\partial D) \\ \Rightarrow u \in C^\infty(\overline{D}) \ . \end{cases}$$

Il existe alors un semi-groupe de Feller $\{T_t\}_{t\geq 0}$ sur $\overline{D}$ dont le générateur infinitésimal $\mathfrak{A}$ satisfait à (1.4) et coïncide avec l'extension fermée minimale dans $C(\overline{D})$ de la restriction de A à l'espace $\{u \in C^2(\overline{D}) \ ; \ Lu = 0\}$.

Comme application simple du corollaire 2, on considère le cas où l'opérateur différentiel A est <u>elliptique</u> sur $\overline{D}$, i.e., il existe une constante $C_o > 0$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geq C_o\,|\xi|^2,\ x \in \overline{D},\ \xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N) \in \mathbb{R}^N \quad ,$$

car $\overline{D}$ est compact.

Pour énoncer une hypothèse concernant la condition aux limites L, introduisons quelques notations et définitions.

Pour les coefficients α^{ij} de L, posons

$$\Phi = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x') \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes_S \frac{\partial}{\partial x_j} \quad ,$$

qui appartient à l'espace $\Gamma(\partial D, T(\partial D) \otimes_S T(\partial D))$ des champs de tenseurs contravariants symétriques de classe C^∞ et de type (2.0) sur ∂D. Ici $\otimes_S$ est le produit tensoriel symétrique. Désignons par $\Gamma(\partial D, T^*(\partial D))$ (resp. $\Gamma(\partial D, T(\partial D))$) l'espace des champs de vecteurs covariants (resp. contravariants) de classe C^∞ sur ∂D. En utilisant Φ, on peut alors définir une application

$$\Psi : \Gamma(\partial D, T^*(\partial D)) \qquad \Gamma(\partial D, T(\partial D))$$

par

$$\Psi(\zeta') = \Phi(\zeta', \cdot) \quad \text{pour } \zeta' \in \Gamma(\partial D, T^*(\partial D)) \quad .$$

En termes de coordonnées locales $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$, pour $\zeta' = \sum_{i=1}^{N-1} \zeta_i\, dx_i$ on a $\Psi(\zeta') = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij}(x')\, \zeta_i \frac{\partial}{\partial x_j}$. On pose :

$$Y = \text{l'image de } \Psi = \{\Psi(\zeta')\,;\, \zeta' \in \Gamma(\partial D, T^*(\partial D))\} \quad .$$

Cela étant, l'hypothèse fondamentale concernant la condition aux limites L est la suivante :

(A) <u>L'algèbre de Lie</u> $\mathcal{L}(Y)$ <u>sur</u> $\mathbb{R}$ <u>engendrée par</u> Y <u>est de rang</u> $N-1$ <u>en tout point de l'ensemble</u> $M = \{x' \in \partial D\,;\, \mu(x') = 0\}$.

Le sens intuitif de l'hypothèse (A) est, comme mentionné dans (0.7), qu'une particule partant d'un point arbitraire de M, où aucun phénomène de réflexion n'a lieu, peut sortir de M au bout d'un temps <u>fini</u> (cf. remarque 2.3).

Voici le théorème qui fait l'objet de cette note :

<u>Théorème 3</u> : Soit A un opérateur différentiel satisfaisant à (1.1) et à l'hypothèse d'ellipticité sur $\overline{D}$ et soit L une condition aux limites satisfaisant à (1.2) et à l'hypothèse de transversalité. Supposons que l'hypothèse (A) est satisfaite. On a alors la conclusion du corollaire 2.

<u>Remarque 1.3</u> : Dans le cas $\alpha^{ij} \equiv 0$ sur ∂D, i.e.,

$$(0.6)' \qquad Lu(x') = \sum_{i=1}^{N-1} \beta^i(x') \frac{\partial u}{\partial x_i}(x') + \gamma(x')\, u(x') + \mu(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') - \delta(x')\, Au(x') \quad ,$$

on a démontré dans [11] le résultat suivant ([11], théorème 4) :

<u>Théorème 4</u> : Soient A et L (donnée par (0.6)') comme dans le théorème 3. Supposons que

(A') le champ de vecteurs $\beta = (\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^{N-1})$ sur ∂D est non nul sur $M = \{x' \in \partial D \,;\, \mu(x') = 0\}$ et aucune courbe intégrale maximale de β n'est entièrement contenue dans M.

On a alors la conclusion du corollaire 2.

L'hypothèse (A') a le même sens intuitif que l'hypothèse (A).

§ 2. <u>PRELIMINAIRES</u>.

2.1 La construction du semi-groupe de Feller $\{T_t\}_{t \geq 0}$ sur $\overline{D}$ reposera sur la variante suivante du théorème de Hille-Yosida (cf. [15]) :

<u>Théorème 2.1</u> : (i) Soient $\{T_t\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe de Feller sur $\overline{D}$ et $\mathfrak{A}$ son générateur infinitésimal. On a alors :

(a) le domaine de définition $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$ de $\mathfrak{A}$ est dense dans $C(\overline{D})$.

(b) Pour $\alpha > 0$, l'équation $(\alpha - \mathfrak{A})u = f$ admet une solution unique $u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ pour toute $f \in C(\overline{D})$. On définit l'opérateur de Green $(\alpha - \mathfrak{A})^{-1} : C(\overline{D}) \to C(\overline{D})$ par $u = (\alpha - \mathfrak{A})^{-1} f$ pour toute $f \in C(\overline{D})$.

(c) L'opérateur $(\alpha - \mathfrak{A})^{-1}$ $(\alpha > 0)$ est non-négatif sur $C(\overline{D})$.

(d) L'opérateur $(\alpha - \mathfrak{A})^{-1}$ $(\alpha > 0)$ est borné sur $C(\overline{D})$ et de norme $\|(\alpha - \mathfrak{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$.

ii) Inversement, si $\mathfrak{A}$ est un opérateur linéaire sur $C(\overline{D})$ satisfaisant à la condition (a) et s'il existe une constante $\alpha_0 \geq 0$ telle que pour tout $\alpha > \alpha_0$ les conditions (b) - (d) sont satisfaites, alors $\mathfrak{A}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller $\{T_t\}_{t\geq 0}$ sur $\overline{D}$.

2.2 Pour vérifier les conditions (a) - (d) du théorème 2.1, on utilisera une classe $\{S_t^\alpha\}_{t\geq 0}$ $(\alpha \geq 0)$ de semi-groupes de Feller sur ∂D (cf. remarque 3.1). Autrement dit, on ramènera le problème de construction de semi-groupes de Feller sur $\overline{D}$ au même problème pour des semi-groupes de Feller sur ∂D.

Le théorème suivant nous permet de réaliser ce plan.

<u>Théorème 2.2</u> (cf. [10]) : Soit A un opérateur différentiel satisfaisant à (1.1) et à l'hypothèse (H) et soit $\alpha \geq 0$. Alors le problème de Dirichlet :

$$(D) \qquad \begin{cases} (\alpha - A)u = f & \text{dans } D, \\ u_{|\partial D} = \varphi & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

admet une solution unique u dans $C(\overline{D})$ pour toutes $f \in C(\overline{D})$ et $\varphi \in C(\partial D)$.

<u>Remarque 2.3</u> : On donne une interprétation en termes de probabilités de l'hypothèse (H). Dans [10], Stroock-Varadhan ont démontré que le processus de diffusion $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_N(t))$ qui a

$$\sum_{i,j} a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$ comme générateur différentiel et partant

d'un point $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ de D, peut être approché par la fonction suivante $\Phi(t) = (\Phi_1(t), \Phi_2(t), \ldots, \Phi_N(t))$:

$$(2.1) \qquad \Phi_i(t) = x_i + 2\int_0^t \sum_{j=1}^N a^{ij}(\Phi(s))\, \Psi_j(s)\, ds + \int_0^t \left(b^i(\Phi(s)) - \sum_{j=1}^N \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}(\Phi(s))\right) ds ,$$

où $\Psi(t) = (\Psi_1(t), \Psi_2(t), \ldots, \Psi_N(t)) : [0,\infty) \to \mathbb{R}^N$ est une fonction mesurable bornée arbitraire, approchant le mouvement brownien standard $B(t) = (b_1(t), B_2(t), \ldots, B_N(t))$.

D'autre part, on a le résultat suivant :

Théorème 2.4 ([3]) : Soit D un domaine de $\mathbb{R}^N$ et soit $\{Z_j\}_{j=1}^r$ un système de champs de vecteurs réels de classe C^∞ sur D. Si l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(Z_1, Z_2, \ldots, Z_r)$ sur $\mathbb{R}$ engendrée par $\{Z_j\}$ est de rang N en un point x_o de D, il existe alors un voisinage $U(x_o)$ de x_o tel que tout point x de $U(x_o)$ peut être joint à x_o par une chaîne finie de trajectoires de $\{\pm Z_j\}_{j=1}^r$.

Par conséquent, en choisissant les fonctions Ψ_j dans la formule (2.1) assez grandes pour que $\sum_j a^{ij}\Psi_j$ domine $b^i - \sum_j \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}$ et en utilisant le théorème 2.4 avec $Z_i = \sum_j a^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$ $(1 \le i \le N)$, on voit que l'hypothèse (H) peut être interprétée du point de vue des probabilités comme au paragraphe 1.

De même, on peut donner une interprétation en termes de probabilités de l'hypothèse (A) comme au paragraphe 1.

§ 3. ESQUISSE DES DEMONSTRATIONS.

3.1 Démonstration du théorème 1 : 1) En vertu du théorème 2.2, on peut introduire des opérateurs linéaires $G^o_\alpha : C(\overline{D}) \to C(\overline{D})$ (opérateur de Green) et $H_\alpha : C(\partial D) \to C(\overline{D})$ (opérateur harmonique) par les relations suivantes :

$$(3.1) \qquad \begin{cases} (\alpha - A)G^o_\alpha f = f & \text{dans } D, \\ G^o_\alpha f|_{\partial D} = 0 & \text{sur } \partial D. \end{cases}$$

$$(3.2) \qquad \begin{cases} (\alpha - A)H_\alpha \Psi = 0 & \text{dans } D, \\ H_\alpha \Psi|_{\partial D} = \Psi & \text{sur } \partial D. \end{cases}$$

D'après les formules de probabilités pour G^o_α et H_α dues à Stroock-Varadhan [10], on obtient que l'opérateur G^o_α (resp. H_α) est non-négatif et borné et de norme $\|G^o_\alpha\| \leq \frac{1}{\alpha}$ (resp. $\|H_\alpha\| \leq 1$).

2) Puisque l'opérateur différentiel $\alpha - A$ est hypoelliptique dans D (cf. [8]) et partiellement hypoelliptique par rapport à ∂D (cf. [5]) d'après l'hypothèse (H), il résulte de (3.1) et (3.2) que G^o_α (resp. H_α) applique $C^\infty(\overline{D})$ (resp. $C^\infty(\partial D)$) dans $C^\infty(\overline{D})$. On peut définir des opérateurs linéaires $LG^o_\alpha : C(\overline{D}) \to C(\partial D)$ et $LH_\alpha : C(\partial D) \to C(\partial D)$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} LG^o_\alpha : f \longrightarrow L(G^o_\alpha f) & (f \in C^\infty(\overline{D})) \ . \\ LH_\alpha : \Psi \longrightarrow L(H_\alpha \Psi) & (\Psi \in C^\infty(\partial D)) \ . \end{cases}$$

On obtient alors que l'opérateur LG^o_α se prolonge en un opérateur linéaire borné et non-négatif de $C(\overline{D})$ dans $C(\partial D)$; on le désignera par $\overline{LG^o_\alpha}$.
De plus, en utilisant le principe du maximum pour l'opérateur différentiel $A - \alpha$ (cf. [10]), on voit que l'opérateur LH_α se prolonge en un opérateur linéaire fermé de $C(\partial D)$ dans $C(\partial D)$; on le désignera par $\overline{LH_\alpha}$.

3) On peut maintenant établir le théorème 1 comme suit (cf. [9], théorème 5.2) :

1°) Si la condition [I] est satisfaite, alors l'opérateur $\overline{LH_\alpha}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller $\{S^\alpha_t\}_{t \geq 0}$ sur ∂D.

2°) Si pour un $\alpha \geq 0$ l'opérateur $\overline{LH_\alpha}$ engendre un semi-groupe de Feller $\{S^\alpha_t\}_{t\geq 0}$ sur ∂D, alors pour tout $\beta \geq 0$ l'opérateur $\overline{LH_\beta}$ engendre un semi-groupe de Feller $\{S^\beta_t\}_{t\geq 0}$ sur ∂D.

3°) Si la condition aux limites L est transversale sur ∂D, alors pour tout $\alpha > 0$ l'opérateur $\overline{LH_\alpha}$ est bijectif et son inverse $\overline{LH_\alpha}^{-1} : C(\partial D) \to C(\partial D)$ est non-positif et borné.

4°) Pour tout $\alpha > 0$, on peut donc définir un opérateur linéaire $G_\alpha : C(\overline{D}) \to C(\overline{D})$ par :

$$G_\alpha f = G^o_\alpha f - H_\alpha(\overline{LH_\alpha}^{-1}(\overline{LG^o_\alpha} f)) \quad , \quad f \in C(\overline{D}) \ . \tag{3.3}$$

Si la condition [II] est satisfaite, on a alors :

$$G_\alpha = (\alpha - \mathfrak{A})^{-1} \quad ,$$

où $\mathfrak{A}$ est l'opérateur linéaire de $C(\overline{D})$ dans $C(\overline{D})$ défini par (1.4).

5°) En vertu de l'expression (3.3) de $G_\alpha = (\alpha - \mathfrak{A})^{-1}$, on peut montrer que l'opérateur $\mathfrak{A}$ satisfait aux conditions (a) - (d) dans le théorème 2.1. D'où le théorème 1.

Remarque 3.1 : Comme on le voit d'après l'expression (3.3), on a construit l'opérateur de Green $(\alpha - \mathfrak{A})^{-1}$ $(\alpha > 0)$ d'un semi-groupe de Feller $\{T_t\}_{t\geq 0}$ sur $\overline{D}$ en utilisant l'opérateur de Green $-\overline{LH_\alpha}^{-1}$ d'un semi-groupe de Feller $\{S_t^\alpha\}_{t\geq 0}$ sur ∂D.

3.2 Démonstration du corollaire 2 : Le corollaire résulte du théorème 1 en remarquant les faits suivants :

1°) Les conditions [I] et [III] impliquent la condition [II].

2°) Si la condition [III] est satisfaite, on a alors

$$f \in C^\infty(\overline{D}) \Longrightarrow G_\alpha f \in C^\infty(\overline{D}) \quad .$$

3.3 Démonstration du théorème 3 : Il suffit de montrer que les conditions [I] et [III] du corollaire 2 sont satisfaites. Pour cela, on va démontrer le théorème suivant, ce qui, compte-tenu du lemme de Sobolev, implique les conditions [I] (avec $\lambda = 0$) et [III].

Théorème 3.2 : Soient A et L comme dans le théorème 3 et supposons que l'hypothèse (A) est satisfaite. Il existe alors une constante $0 < \varkappa \leq 1$ telle que pour tout $\alpha > 0$ le problème aux limites :

$$(*) \quad \begin{cases} (\alpha - A)u = f & \text{dans } D, \\ Lu = \varphi & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

admette une solution unique $u \in H^{s-2+\varkappa}(D)$ $(s\geq 3)$ pour toutes $f \in H^{s-2}(D)$ et $\varphi \in H^{s-5/2}(\partial D)$.

De plus, pour tout $\alpha \geq 0$ on a la propriété de régularité :

$$(3.4) \quad \begin{cases} u \in H^t(D) \ (t \in \mathbb{R}), \ (\alpha - A)u \in C^\infty(\overline{D}), \ Lu \in C^\infty(\partial D) \\ \Rightarrow u \in C^\infty(\overline{D}) \quad . \end{cases}$$

Ici $H^s(D)$ (resp. $H^s(\partial D)$) désigne l'espace de Sobolev sur D (resp. ∂D) d'ordre s.

Démonstration : 1) En utilisant l'opérateur de Green G_α^o et l'opérateur harmonique H_α, on ramène comme d'habitude l'étude du problème (*) à celle de l'opérateur LH_α sur le bord ∂D.

Notons que d'après (3.2) l'opérateur LH_α peut s'écrire de la forme suivante :

$$(3.5) \qquad LH_\alpha \Psi = \Big[\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + (\gamma - \alpha\delta)\Psi \Big] + \mu \frac{\partial}{\partial n} (H_\alpha \Psi)\Big|_{\partial D}$$

$$\equiv Q_\alpha \Psi + \mu \Pi_\alpha ,$$

où :

- Q_α est un opérateur différentiel du second ordre de symbole principal $- \sum_{i,j} \alpha^{ij}(x')\xi_i \xi_j$ (≤ 0) ;
- Π_α est un opérateur pseudo-différentiel du premier ordre de symbole principal $-|\xi'|$ (cf. [6]).

2) Le lemme suivant, qui améliore le lemme 6 de [11], est l'étape essentielle dans la démonstration.

Lemme 3.3 : Soient A et L comme dans le théorème 3 et supposons que l'hypothèse (A) est satisfaite. Il existe alors une constante $0 < \varkappa \leq 1$ telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$ on ait :

$$(3.6) \qquad \Psi \in \mathcal{D}'(\partial D) , \quad LH_\alpha \Psi \in H^s(\partial D) \Longrightarrow \Psi \in H^{s+\varkappa}(\partial D) .$$

Dans ce cas, pour tout $t < s + \varkappa$ il existe une constante $C_{s,t} > 0$ telle que

$$(3.7) \qquad |\Psi|_{H^{s+\varkappa}(\partial D)} \leq C_{s,t} \left(|LH_\alpha \Psi|_{H^s(\partial D)} + |\Psi|_{H^t(\partial D)} \right) .$$

Ce lemme se démontre en considérant $\mu \Pi_\alpha$ comme terme de "perturbation" de Q_α, et en utilisant le théorème 5.9 de [7] au voisinage de x'_o tel que $\mu(x'_o) > 0$ et en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 2.6.2 de [8] au voisinage de x'_o tel que le rang de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(Y)$ en x'_o soit égal à $N-1$.

3) La propriété de régularité (3.4) est donc une conséquence de (3.6) et du lemme de Sobolev. De plus, puisque toute solution homogène

du problème (*) est C^∞ jusqu'au bord, on obtient le théorème d'unicité des solutions pour le problème (*) en utilisant le principe du maximum au bord comme dans [11].

4) Il reste alors à vérifier le théorème d'existence des solutions pour le problème (*). Ceci se démontre comme suit (cf. [11]) :

1^{o} En remplaçant le paramètre α dans le problème (*) par l'opérateur différentiel $-\partial^2/\partial y^2$ sur le cercle unité $S = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, considérons le problème aux limites suivant (cf. [1]) :

$$(\widetilde{*})\quad \begin{cases} \left(-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - A\right)\tilde{u} = \tilde{f} & \text{dans } D \times S \quad , \\[2ex] L\tilde{u} = \tilde{\varphi} & \text{sur } \partial D \times S \quad . \end{cases}$$

On a alors la relation importante suivante entre le problème (*) et le problème $(\widetilde{*})$ ([12]) :

(3.8) Si le problème $(\widetilde{*})$ est à indice, alors pour tout $\alpha \geq 0$ le problème (*) est d'indice zéro.

2^{o} Puisque le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - A\right)\tilde{w} = 0 & \text{dans } D \times S \quad , \\[2ex] \tilde{w}\big|_{\partial D\times S} = \tilde{\Psi} & \text{sur } \partial D \times S \end{cases}$$

admet une solution unique $\tilde{w} \in H^t(D \times S)$ $(t \in \mathbb{R})$ pour toute $\tilde{\Psi} \in H^{t-1/2}(\partial D \times S)$, on peut introduire l'opérateur harmonique $\tilde{H} : H^{t-1/2}(\partial D \times S) \to H^t(D \times S)$ par $\tilde{w} = \widetilde{H\Psi}$. Notons alors que l'opérateur $L\tilde{H}$ peut s'écrire sous la forme suivante, analogue à (3.5) :

$$\widetilde{LH\Psi} = \Big[\sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha^{ij} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial x_i\, \partial x_j} + \delta \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x_i} + \gamma \tilde{\Psi}\Big]$$
$$+ \mu \frac{\partial}{\partial n} (\widetilde{H\Psi})\big|_{\partial D \times S} \quad .$$

En remarquant que $\delta(x') > 0$ sur $M = \{x' \in \partial D\,;\, \mu(x') = 0\}$ d'après (1.3), on obtient l'inégalité suivante, analogue à (3.7) :

$$(3.9)\qquad |\tilde{\Psi}|_{H^{s+\varkappa}(\partial D \times S)} \leq \tilde{C}_{s,t}\left(|\widetilde{LH\Psi}|_{H^s(\partial D \times S)} + |\tilde{\Psi}|_{H^t(\partial D \times S)}\right) \quad .$$

On en déduit que l'espace des solutions homogènes du problème $(\widetilde{*})$ est de dimension finie, car la dimension du noyau de $\widetilde{LH}$ est finie d'après (3.9).

De même, passant par l'adjoint formel $(\widetilde{LH})^*$ de $\widetilde{LH}$, on voit que, pour toute $(\tilde{f},\tilde{\varphi}) \in H^{s-2}(D \times S) \oplus H^{s-5/2}(\partial D \times S)$ satisfaisant à un nombre fini de conditions de compatibilité,il existe une solution $\tilde{u} \in H^{s-2+\varkappa}(D \times S)$ du problème $(\widetilde{*})$.

3^o En vertu de (3.8), on obtient donc le théorème d'existence des solutions pour le problème (*).

§ 4. REMARQUE.

En appliquant le corollaire 2, on s'est restreint au cas où l'opérateur différentiel A est elliptique sur $\overline{D}$. La raison est que, quand l'opérateur A satisfait seulement à l'hypothèse (H) , on ne sait pas si l'opérateur LH_α écrit comme (3.5) et qui a joué un rôle fondamental dans la démonstration du théorème 3.2, est un opérateur pseudo-différentiel sur le bord ∂D.

C'est donc un problème ouvert de généraliser le théorème 3 au cas où l'opérateur différentiel A satisfait à l'hypothèse (H).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Agmon : Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand, Princeton, 1965.

[2] J.M. Bony, P. Courrège et P. Priouret : Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégro-différentiels du second ordre donnant lieu au principe maximum, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 18 (1968), 369-521.

[3] W.L. Chow : Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Math. Ann. 117 (1938), 98-105.

[4] E.B. Dynkin : Markov processes, vols. I, II, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[5] L. Hörmander : Linear partial differential operators, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[6] L. Hörmander : Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems, Ann. of Math. 83 (1966), 129-209.

[7] L. Hörmander : A class of hypoelliptic pseudo-differential operators with double characteristics, Math. Ann. 217 (1975), 165-188.

[8] O.A. Oleǐnik and E.V. Radkevič : Second order equations with non-negative characteristic form, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island and Plenum Press, New York, 1973.

[9] K. Sato and T. Ueno : Multi-dimensional diffusion and Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ. 4 (1965), 529-605.

[10] D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan : On degenerate elliptic-parabolic operators of second order and their associated diffusion, Comm. Pure Appl. Math. 24 (1972), 651-713.

[11] K. Taira : Sur l'existence de processus de diffusion, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 29 (1979), 99-126.

[12] K. Taira : Un théorème d'existence et d'unicicté des solutions pour des problèmes aux limites non-elliptiques, à paraître au Journal of Functional Analysis.

[13] T. Ueno : The diffusion satisfying Wentzell's boundary condition and the Markov process on the boundary II, Proc. Japan Acad. 36 (1960), 625-629.

[14] A.D. Wentzell (Ventcel') : On boundary conditions for multidimensional diffusion processes, Theor. Prob. and Appl. 4 (1959), 164-177.

[15] K. Yosida : Functional analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

***