Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. Giaquinta
S. Hildebrandt

Estimation à priori des solutions faibles de certains systèmes non linéaires elliptiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 17, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A18_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1980-1981

ESTIMATION A PRIORI DES SOLUTIONS FAIBLES DE CERTAINS SYSTEMES NON LINEAIRES ELLIPTIQUES

par M. GIAQUINTA et S. HILDEBRANDT

Exposé n° XVII

17 Mars 1981

Dans ce travail, nous présentons une démonstration nouvelle et plus simple d'un théorème de régularité intérieure qui est bien connu pour les solutions faibles des systèmes non linéaires elliptiques.

Pour fixer les idées, on considère des fonctions vectorielles $u(x) = (u^1(x), u^2(x), \dots, u^N(x))$ sur un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^n$, $x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \Omega$ et un opérateur quasi-linéaire elliptique du second ordre

$$Lu = -D_\beta\{a^{\alpha\beta}(x,u,\nabla u) D_\alpha u\}$$

où $D_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$. De plus, soit

$$f(x,u,p) = (f^1(x,u,p), \dots, f^N(x,u,p))$$

une fonction vectorielle de $(x,u,p) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$.

<u>Définition</u> : On dit que u est une solution faible du système

(1) $$Lu = f(x,u,\nabla u) \quad \text{sur } \Omega$$

si u appartient à $H^1_2 \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ et si u satisfait la relation suivante :

(2) $$\int_\Omega a^{\alpha\beta}(x,u,\nabla u) D_\alpha u \cdot D_\beta \varphi \, dx = \int_\Omega f(x,u,\nabla u) \cdot \varphi \, dx$$

pour tout $\varphi \in \mathring{H}^1_2 \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$,

où $D_\alpha u \cdot D_\beta \varphi = D_\alpha u^i \, D_\beta \varphi^i$ et $f \cdot \varphi = f^i \varphi^i$ (on emploie la convention suivante : sommation relative aux minuscules grecques α, β, ... de 1 à n, et relative aux minuscules romaines i, k, ... de 1 à N lorsqu'elles sont répétées).

<u>SUPPOSITION</u> (S)

On suppose que $A^{\alpha\beta}(x) := a^{\alpha\beta}(x,u(x),\nabla u(x))$ et $f^i(x,u(x),\nabla u(x))$ sont des fonctions mesurables qui satisfont les inégalités suivantes avec des constantes λ, $\mu > 0$, M, a, b, $b^* \geq 0$ et a^* :

(S1) $\quad |u|_{L^\infty(\Omega)} \le M$,

(S2) $\quad A^{\alpha\beta}(x)\,\xi_\alpha\,\xi_\beta \ge \lambda\,|\xi|^2$ pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

(S3) $\quad |A^{\alpha\beta}(x)| \le \mu$ sur Ω ,

(S4) $\quad |f(x,u(x),p)| \le a\,Q(x,p) + b$ pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $p \in \mathbb{R}^{nN}$,

où l'on a posé

$$Q(x,p) := A^{\alpha\beta}(x)\; p^i_\alpha\; p^i_\beta \quad , \quad p = (p^i_\alpha) \quad ;$$

enfin, on suppose aussi l'inégalité

(S5) $\quad u(x)\cdot f(x,u(x),p) \le a^* \,Q(x,p) + b^*$ pour tout $(x,p) \in \Omega \times \mathbb{R}^{nN}$.

On notera que (S1) et (S4) impliquent (S5) avec $a^* = aM$ et $b^* = bM$. Dès lors on peut supposer sans restriction de la généralité que

(S6) $\quad a^* \le aM$.

Le but de ce travail est de prouver le résultat suivant :

<u>Théorème</u> : Supposons que u soit une solution faible de

$$Lu = f(x,u,\nabla u) \quad \text{sur } \Omega$$

telle que (S) et

$$aM + a^* < 2$$

soient satisfaites.
Alors u est höldérien sur Ω d'un exposant $\sigma \in (0,1)$ qui dépend seulement de a, b, a^*, b^*, M, λ, μ, n et N.
De plus, il existe un nombre K dépendant des mêmes constantes et de $\operatorname{mes}\Omega$ tel que

$$[u]_{\sigma,\overline{\Omega}'} \le K\, d^{-\sigma}$$

pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$, où $d = \operatorname{dist}(\Omega',\partial\Omega)$. K est indépendant de $\operatorname{mes}\Omega$ lorsque $b = b^* = 0$.

<u>Remarque</u> : On a noté $[u]_{\sigma,\overline{\Omega}'}$ la semi-norme höldérienne

$$[u]_{\sigma,\overline{\Omega}'} := \operatorname*{ess\,sup}_{x,y\in\Omega'} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\sigma}} .$$

Ce théorème a été prouvé pour la première fois dans les travaux remarquables [13] et [14] de M. Wiegner pour le cas particulier $a^* = aM$, en utilisant une méthode de [4] et en généralisant un résultat de [4]. Le cas général $a^* < aM$ a été traité par Hildebrandt-Widman [5]. Un emploi de cette méthode pour des applications harmoniques des espaces Riemanniennes se trouve dans [7] et [8]. Il est bien connu que le résultat de régularité obtenu est le meilleur possible. Par exemple, la fonction discontinue $u(x) = |x|^{-1}x$ appartient à $H_2^1 \cap L^\infty$ sur chaque ouvert borné Ω lorsque $n \geq 3$, et elle satisfait faiblement le système

$$-\Delta u = u\,|\nabla u|^2 \quad \text{sur } \Omega$$

où $a = a^* = M = 1$ et $b = b^* = 0$, c'est-à-dire $aM = 1$ et $aM + a^* = 2$. Une présentation de résultats analogues et d'autres exemples a été donnée dans [3].

Enfin nous remarquons que la régularité au bord est traitée dans [14] et, de façon simple, dans [5].

1. UN LEMME DE GIAQUINTA ET GIUSTI.

Dans cette section, nous allons prouver une proposition auxiliaire démontrée en substance par Giaquinta et Giusti [1].

<u>Lemme</u> : Il existe un nombre positif c, dépendant seulement de $\operatorname{mes}\Omega$ et des constantes a^*, λ, μ, n, M et b^*, tels que : pour tout $\varepsilon > 0$, pour toute boule $B_{R_o}(x_o) \subset \Omega$ et pour toute solution faible u de (1) vérifiant les hypothèses (S) et $a^* < 1$, il existe un $i_o \in \{1,2,\dots,p\}$ avec $p := [c/\varepsilon] + 1$, tel que

$$R^{2-n} \int_{B_R(x_o)} Q(x, \nabla u)\,dx < \varepsilon$$

où $R := 2^{-i_o} R_o$. Le nombre c ne dépend pas de $\operatorname{mes}\Omega$ lorsque $b^* = 0$.

<u>Démonstration</u> : En posant $\varphi = u\eta$ avec $\eta \in \mathring{H}^1_2 \cap L^\infty(B_{2R}, \mathbb{R})$, $\eta \geq 0$, $B_{2R} = B_{2R}(x_o) \subset \Omega$, on déduit de (2) que

$$\int_\Omega \eta\, A^{\alpha\beta}(x)\, D_\alpha u^i\, D_\beta u^i\, dx - \int_\Omega u^i\, f^i(x,u,\nabla u)\, \eta\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\Omega A^{\alpha\beta}\, D_\alpha |u|^2\, D_\beta \eta\, dx \quad .$$

D'après (S5) et $a^* < 1$, on a

$$(1-a^*) \int_\Omega Q(x,\nabla u)\eta\, dx \leq -\frac{1}{2}\int_\Omega A^{\alpha\beta}\, D_\alpha |u|^2\, D_\beta\eta\, dx + \int_\Omega b^*\, \eta\, dx \quad .$$

Soit $v \in \mathring{H}^1_2(\Omega, \mathbb{R})$ la solution de

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega A^{\alpha\beta}\, D_\alpha v\, D_\beta\, \eta\, dx = \int_\Omega b^*\, \eta\, dx \quad \text{pour tout } \eta \in C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}) \quad .$$

Alors

$$0 \leq v \leq M^*$$

avec

$$M^* := \frac{b^*}{n\lambda} \left(\frac{\text{mes } \Omega}{\text{mes } B_1}\right)^{2/n}$$

(cf. [4]). En posant :

$$M(t) := \sup_{B_t} (|u|^2 + v)$$

et

$$z := M(2R) - |u|^2 - v \quad ,$$

on obtient donc

$$\text{(3)} \qquad \int_{B_{2R}} \eta\, Q(x,\nabla u) dx \leq c_1 \int A^{\alpha\beta}\, D_\alpha z\, D_\beta \eta\, dx$$

pour tout $\eta \in \mathring{H}^1_2 \cap L^\infty(B_{2R}, \mathbb{R})$ avec $\eta \geq 0$,

où

$$c_1 = \frac{1}{2(1-a^*)} \quad .$$

Par conséquent, z est faiblement L-surharmonique. D'après un lemme de Moser [11], on conclut que

$$R^{-n} \int_{B_{2R}} z\, dx \leq c_2 \cdot \inf_{B_R} z \tag{4}$$

où c_1, c_2, ... sont indépendants de R et dépendent seulement des a^*, λ, μ et n.
En outre, nous considérons la fonction $w \in \mathring{H}^1_2(B_{2R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\int_{B_{2R}} A^{\alpha\beta} D_\alpha \varphi D_\beta w\, dx = \frac{1}{R^2} \int_{B_{2R}} \varphi\, dx \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathring{H}^1_2(B_{2R}, \mathbb{R}) \ . \tag{5}$$

Grâce à Moser [11], on a

$$0 < c_3 \leq w \quad \text{dans } B_R$$

et

$$w \leq c_4 \quad \text{dans } B_{2R} \ .$$

En posant $\varphi = wz$, il résulte de l'équation (5) que

$$\frac{1}{2} \int_{B_{2R}} A^{\alpha\beta} D_\alpha z\, D_\beta w^2\, dx + \int_{B_{2R}} A^{\alpha\beta} D_\alpha w\, D_\beta w\, z\, dx$$

$$= R^{-2} \int_{B_{2R}} zw\, dx \ .$$

Puisque $z \geq 0$ et $w \leq c_4$ dans B_{2R}, on obtient

$$\int_{B_{2R}} A^{\alpha\beta} D_\alpha z\, D_\beta w^2\, dx \leq c_5\, R^{n-2} \inf_{B_R} z$$

avec $c_5 = 2 c_2 c_4$, en tenant compte de (4). Pour $\eta = w^2$, il résulte de (3) que

$$\int_{B_{2R}} w^2\, Q(x, \nabla u) dx \leq c_6\, R^{n-2} \inf_{B_R} z \quad \text{avec } c_6 = c_1\, c_5 \ .$$

Par suite de $0 < c_3 \leq w$ dans B_R, on conclut que

$$R^{2-n} \int_{B_R} Q(x, \nabla u) dx \leq c_7 \{M(2R) - M(R)\}$$

où $c_7 = c_6\, c_3^{-2}$ est un nombre dépendant seulement des constantes a^*, λ, μ et n.
Soit ε un nombre quelconque positif. De plus, supposons que $B_{R_o} \subset \Omega$, et posons

$$M_i := M(2^{-i} R_o) \quad , \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \quad .$$

$$(M_o - M_1) + (M_1 - M_2) + \ldots + (M_{p-1} - M_p) = M_o - M_p \leq M_o \leq M^2 + M^*$$

il existe un $i_o \in \{1,2,\ldots,p\}$ tel que

$$M_{i_o - 1} - M_{i_o} \leq (M^2 + M^*)/p \quad .$$

Choisissons $p = [c_7(M^2 + M^*)/\varepsilon] + 1$ et posons $R = 2^{-i_o} R_o$. Après cela nous arrivons à

$$R^{2-n} \int_{B_R} Q(x, \nabla u)\, dx < \varepsilon \quad ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme avec $c = c_7(M^2 + M^*)$.

2. UN RESULTAT DE HILDEBRANDT-WIDMAN.

Nous allons formuler un résultat de régularité généralisant un ancien théorème de Ladyženskaya et Ural'tseva (cf. [3] et [4]). Ce résultat est contenu dans [4], mais, pour la commodité du lecteur, nous reproduisons la démonstration.

Proposition : Soit $u = u(x)$ une solution faible de $Lu = f(x,u,\nabla u)$ dans Ω en supposant les hypothèses (S) et

$$a \cdot \operatorname{osc}_\Omega u < 1 \quad .$$

Alors u appartient à $C^\sigma(\Omega, \mathbb{R}^N)$ pour un $\sigma \in (0,1)$ dépendant seulement des constantes n, N, λ, μ, a, b, M, $\operatorname{mes}\Omega$ et $\operatorname{osc}_\Omega u$. En outre, il existe un nombre K dépendant des mêmes constantes et de Ω, mais pas de u, tel que

$$[u]_{\sigma,\overline{\Omega}'} \leq K\, d^{-\sigma}$$

pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$ avec $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega) \geq d$. Le nombre K ne dépend pas de $\operatorname{mes}\Omega$ lorsque $b = 0$.

Démonstration (pour $n \geq 3$) : Mettons $\varphi = \{u - \omega_R\}\, G^\rho(\cdot, x_o)\, \eta^2$ dans l'équation (2) avec $x_o \in \Omega$, $B_{2R}(x_o) = \{x : |x - x_o| < 2R\} \subset \Omega$, $B_{2R} = B_{2R}(x_o)$, $T_{2R} = B_{2R} - B_R$,

$$\omega_R = \fint_{T_{2R}} u(x)\, dx = \frac{1}{\text{mes } T_{2R}} \int_{T_{2R}} u(x)\, dx \quad ,$$

et η vérifie $\eta \in C_c^\infty(B_{2R}, \mathbb{R})$, $0 \le \eta \le 1$, $\eta(x) \equiv 1$ pour $|x - x_o| \le \frac{5R}{4}$, $\eta(x) \equiv 0$ pour $|x - x_o| \ge \frac{7R}{4}$. Par conséquent, $\nabla \eta \equiv 0$ sur $T^*_{2R} = B_{7R/4} - B_{5R/4}$. De plus, nous supposons que $|\nabla \eta| \le K/R$. Finalement, $G^\rho(.,y)$ est la fonction de Green régularisée pour l'opérateur différentiel elliptique $L = -D_\beta\{A^{\alpha\beta}(x)\, D_\alpha\}$ sur B_{2R} (cf. l'appendice). Si $0 < \rho < R$, on obtient

$$(1 - a \,.\, \text{osc}_\Omega\, u) \int_{B_{2R}} Q(x, \nabla u) G^\rho(x,x_o)\eta^2\, dx + \frac{1}{2} \fint_{B_\rho(x_o)} |u - \omega_R|^2\, dx$$
$$\le I + II + KR^2$$

où

$$I = - \int_{T_{2R}} A^{\alpha\beta}\, D_\alpha u \,.\, (u - \omega_R)\; 2\eta\; D_\beta \eta\; G^\rho(.,x_o)\, dx$$

et

$$II = \int_{T_{2R}} A^{\alpha\beta}\, D_\alpha \eta\; D_\beta\; G^\rho(.,x_o)\; \eta\; |u - \omega_R|^2\, dx$$

parce que

$$\int_{B_{2R}} A^{\alpha\beta}\, D_\alpha[\eta^2\, |u - \omega_R|^2]\; D_\beta\; G^\rho(.,x_o) d_x = \fint_{B_\rho(x_o)} |u - \omega_R|^2\, dx \quad .$$

Au moyen des inégalités de Schwarz et de Poincaré :

$$\text{(P)} \qquad \int_{T_{2R}} |u - \omega_R|^2\, dx \le K_p \int_{T_{2R}} |\nabla u|^2\, dx$$

où K_p est indépendant de R et de x_o , on a

$$|I| \le K \int_{T_{2R}} |\nabla u|^2\, \eta^2\, G(.,x_o)\, dx + \int_{T_{2R}} |u - \omega_R|^2\, G^\rho(.,x_o)\; |\nabla \eta|^2\, dx$$
$$\le K\, R^{2-n} \{\int_{T_{2R}} |\nabla u|^2\, dx + R^{-2} \int_{T_{2R}} |u - \omega_R|^2\, dx\}$$
$$\le K\, R^{2-n} \int_{T_{2R}} Q(x, \nabla u) dx \quad .$$

(<u>Attention</u> : K désigne toujours un nombre qui ne dépend pas de R.)

Deuxièmement,

$$|II| \leq R^{n-2} \int_{T^*_{2R}} |\nabla G^\rho(.,x_o)|^2 \, |u-\omega_R|^2 \, dx + R^{2-n} \, KR^2 \int_{T_{2R}} |u-\omega_R|^2 \, dx \quad .$$

On notera que $\mathrm{dist}(T^*_{2R}, \partial T_{2R}) = R/4$, et que $\Psi(x) := G^\rho(x,x_o)$ est une solution de $L\Psi = 0$ dans T_{2R}. Avec les inégalités de Caccioppoli-Moser [11] et de Poincaré, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_{T^*_{2R}} |u-\omega_R|^2 \, |\nabla G^\rho(.,x_o)|^2 \, dx \\
&\leq KR^{-2} \int_{T_{2R}} |u-\omega_R|^2 \, |G^\rho(.,x_o)|^2 dx + K \int_{T_{2R}} |G^\rho(.,x_o)|^2 \, |\nabla u|^2 \, dx \\
&\leq KR^{2(2-n)} \int_{T_{2R}} |\nabla u|^2 \, dx \quad .
\end{aligned}$$

Alors, on a

$$|II| \leq KR^{2-n} \int_{T_{2R}} Q(x, \nabla u) \, dx \quad .$$

Par conséquent, on conclut que

$$\int_{B_R} Q(x, \nabla u) \, G^\rho(x,x_o) \, dx \leq KR^{2-n} \int_{T_{2R}} Q(x, \nabla u) dx + KR^2 \quad .$$

Donc

$$\int_{B_R} Q(x, \nabla u) \, G(x,x_o) \, dx \leq KR^{2-n} \int_{T_{2R}} Q(x, \nabla u) dx + KR^2$$

quand $\rho \to 0$, en considération du lemme de Fatou.
Dès lors,

$$\int_{B_R} |x-x_o|^{2-n} \, |\nabla u(x)|^2 \, dx \leq K \int_{B_{2R}-B_R} |x-x_o|^2 \, |\nabla u(x)|^2 \, dx + KR^2 \quad .$$

Si nous remplissons le trou dans le membre de droite, nous trouvons que

$$\Phi(R) \leq \theta \cdot \Phi(2R) + \theta R^2$$

avec

$$\theta := \max\left\{ \frac{1}{3} , \frac{K}{K+1} \right\} \quad , \quad 0 \leq \theta < 1 \quad ,$$

et avec

$$\Phi(R) := \int_{B_R} |x - x_o|^{2-n} \; |\nabla u(x)|^2 \, dx \quad .$$

Nous obtenons ensuite l'inégalité

$$\Phi^*(R) \le \theta \, . \, \Phi^*(2R)$$

pour

$$\Phi^*(R) := \Phi(R) + R^2 \quad .$$

Par réitération, on conclut que

$$\Phi^*(R) \le 2^\gamma \; \Phi^*(R_o) \; (R/R_o)^\gamma \quad \text{pour tout } R \in (0,R_o)$$

où

$$R_o := \frac{1}{2} \operatorname{dist}(x_o,\partial\Omega) \quad , \quad \gamma := {}_2\log\,(1/\theta) \quad .$$

Alors

$$\int_{B_R(x_o)} |x - x_o|^{2-n} \; |\nabla u(x)|^2 \, dx$$
$$\le 2^\gamma \left\{\int_{B_{R_o}(x_o)} |x - x_o|^{2-n} \; |\nabla u(x)|^2 \, dx + R_o^2\right\} \left(\frac{R}{R_o}\right)^\gamma$$

pour tout $R \in (0,R_o]$, ce qui achève la première partie de la démonstration de la proposition avec $\sigma = \gamma/2$ grâce à un théorème bien connu de Morrey.

Enfin on prouvera que

$$\int_{B_{R_o}(x_o)} |x-x_o|^{2-n} |\nabla u(x)|^2 \, dx < K^*$$

où K^* depend des constantes a,b,n,λ,M et $\operatorname{osc}_\Omega u$, lorsque $R_o \le 1$.

A cet effet, on met $\varphi = (u-c)\, G^\rho(\cdot,x_o)$ dans la formule (2), où $G^\rho(\cdot,y)$ est la fonction de Green pour $B_{2R_o} = B_{2R_o}(x_o)$. Donc

$$\int_\Omega A^{\alpha\beta} D_\alpha u \cdot D_\beta u G^\rho(\cdot,x_o) \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega A^{\alpha\beta} D_\alpha |u-c|^2 D_\beta G^\rho(\cdot,x_o) \, dx$$

$$= \int_\Omega (u-c).f(x,u,\nabla u)\; G^\rho(.,x_o)\; dx.$$

Posons c: $= u(x_o)$ et v: $= |u-u(x_o)|^2$. Alors

$$(1-a.\; osc_\Omega u) \int_{B_{2R_o}} Q(x,\nabla u)\; G^\rho(.,x_o)\; dx$$

$$\leq -\frac{1}{2} \int_{B_{2R_o}} A^{\alpha\beta} D_\alpha v\; D_\beta\; G^\rho(.,x_o)\; dx + \int_{B_{2R_o}} 2Mb\; G^\rho(.,x_o)\; dx.$$

Soit w la solution de

$$\frac{1}{2} \int_{B_{2R_o}} A^{\alpha\beta} D_\alpha w\; D_\beta \varphi\; dx - \int_{B_{2R_o}} 2Mb\; \varphi\; dx = 0 \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$$

et de

$$w - v \in \mathring{H}_2^1\; (B_{2R_o},\mathbb{R}).$$

En soustrayant la deuxième équation de la première, on a

$$(1 - a.\; osc_\Omega u) \int_{B_{2R_o}} Q(x,\nabla u)\; G^\rho(.,x_o)\; dx$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_{B_{2R_o}} A^{\alpha\beta}\; D_\alpha(w-v)\; D_\beta\; G^\rho(.,x_o)\; dx = \frac{1}{2} \fint_{B_\rho(x_o)} (w-v)\; dx.$$

Quand $\rho \to 0$, on obtient que

$$(1 - a.\; osc_\Omega u) \int_{B_{2R_o}} Q(x,\nabla u)\; G^\rho(.,x_o)\; dx$$

$$\leq \frac{1}{2} \{w(x_o) - v(x_o)\} \leq \frac{1}{2} w(x_o)\; .$$

Donc, par le principe de maximum,

$$w(x_o) \leq (2M)^2 + \frac{2bM}{n\lambda}\; (2R_o)^2\; .$$

Alors

$$\int_{B_{R_o}(x_o)} |x-x_o|^{2-n} |\nabla u(x)|^2\; dx \leq (1-a.osc_\Omega u)^{-1} K_1^{-1} \{2M^2 + \frac{bM}{n\lambda}(2R_o)^2\},$$

et la proposition est démontrée.

Nous remarquons aussi, que la supposition $a^* < 1$ implique de facon semblable

$$\int_{B_{R_o}(x_o)} |x-x_o|^{2-n} |\nabla u(x)|^2 \, dx \le (1-a^*) \, K_1^{-1} \left\{ \frac{M^2}{2} + \frac{b^*}{2n\lambda} (2R_o)^2 \right\}$$

en posant $c = 0$.

3. DEMONSTRATION DU THEOREME (pour $n \ge 3$).

Mettons

$$\varphi = \{u - t\,\omega_R\} \, G^\rho(.,y) \, \eta^2$$

dans l'équation (2) avec $B_{2R} = B_{2R}(x_o) \subset \Omega$, $0 < \rho < R$, $0 \le t \le 1$, $y \in B_{R/2} = B_{R/2}(x_o)$, où ω_R, T_{2R}, $G^\rho(x,y)$ et $\eta(x)$ sont définis de la même manière qu'à la section 2.

On obtient (avec $\int = \int_{B_{2R}}$) :

$$\int A^{\alpha\beta} D_\alpha u \,.\, D_\beta u \, G^\rho(.,y) \, \eta^2 \, dx + \frac{1}{2} \int a^{\alpha\beta} D_\alpha[\,|u - t\omega_R|^2] \, D_\beta \, G^\rho(.,y)\eta^2 \, dx$$

$$= \int (u - t\omega_R) \,.\, f(x,u,\nabla u) \, G^\rho(.,y)\eta^2 \, dx$$

$$- \int A^{\alpha\beta} D_\alpha u \,.\, (u - t\omega_R) \, 2\eta \, D_\beta \eta \, G^\rho(.,y) \, dx \quad .$$

Au moyen de l'identité

$$\frac{1}{2} \eta^2 D_\alpha \, |u - t\omega_R|^2 = \frac{1}{2} D_\alpha[\eta^2 \, |u - t\omega_R|^2] - \frac{1}{2} (D_\alpha \eta^2) \, |u - \omega_R|^2$$

$$- D_\alpha \eta^2 \, \omega_R \,.\, (u-\omega_R) \, (1-t) - \frac{1}{2} D_\alpha \eta^2 |\omega_R|^2 (1-t)^2$$

on conclut que

$$\frac{1}{2} \int A^{\alpha\beta} D_\alpha [\,|u - t\omega_R|^2] \, D_\beta \, G^\rho(.,y) \, \eta^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \fint_{B_\rho(y)} |u - t\omega_R|^2 \, dx - \frac{1}{2} \, |\omega_R|^2 \, (1 - t)^2 + \mathfrak{I}_1$$

avec

$$\mathfrak{I}_1 := -\int A^{\alpha\beta} \{\omega_R \cdot (u - \omega_R)(1-t) + \frac{1}{2} |u - \omega_R|^2\} D_\alpha \eta^2 D_\beta G^\rho(.,y)\ dx \quad .$$

Par suite de la relation (A5) de l'appendice et de l'inégalité de Poincaré (P), on en déduit la majoration suivante de $\mathfrak{I}_1$:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{I}_1| &\le KR^{-1} \int_{T_{2R}} |\nabla G^\rho(.,y)|\ |u - \omega_R|^2\ dx \\ &\le K\{R^{n-2}\gamma(R) \int_{T_{2R}} |\nabla G^\rho(.,y)|^2 dx + R^{-n}\gamma^{-1}(R) \int_{T_{2R}} |u - \omega_R|^2\ dx\} \\ &\le K\ \gamma(R) \end{aligned}$$

avec

$$\gamma(R) := \{R^{2-n} \int_{T_{2R}} Q(x, \nabla u)\ dx\}^{1/2} \quad .$$

De plus,

$$\mathfrak{I}_2 := \int_{T_{2R}} A^{\alpha\beta} D_\alpha u \cdot (u - t\omega_R)\ 2\eta\ D_\beta\eta\ G^\rho(.,y)\ dx$$

est estimé par

$$|\mathfrak{I}_2| \le KR^{1-n} \int_{T_{2R}} |\nabla u|\ dx \le K\ \gamma(R) \quad .$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{B_{2R}} [Q(x, \nabla u) - (u - t\omega_R) \cdot f(x,u,\nabla u)]\ G^\rho(x,y)\ \eta^2\ dx + \\ (6)\qquad &+ \frac{1}{2} ⨍_{B_\rho(y)} |u(x) - t\omega_R|^2\ dx \le \frac{1}{2}(1-t)^2 |\omega_R|^2 + K\ \gamma(R) \quad . \end{aligned}$$

En outre, $|\omega_R| \le M$, et

$$\int_{B_{2R}} G(x,y)\ dx \le KR^2 \quad .$$

En posant $t = 0$, nous avons

$$\int_{B_{2R}} (1 - a^*) Q(x, \nabla u)\ G^\rho(x,y)\ \eta^2\ dx \le \frac{1}{2} M^2 + K\{\gamma(R) + R^2 b^*\} \quad .$$

Au moyen du lemme de Fatou, on obtient

$$(7)\qquad 2(1-a^{*}) \int_{B_{2R}} \mathbf{Q}(x, \nabla u)\, G(x,y)\, \eta^2\, dx \le M^2 + K\{\gamma(R) + R^2 b^{*}\}$$

quand $\rho \to 0$. A cause du théorème de Lebesgue sur la convergence dominée et de (7), l'inégalité (6) donne

$$(8)\qquad \begin{aligned} &2\int_{B_{2R}} [1 - a^{*} - atM]\, Q(x, \nabla u)\, G(x,y)\, \eta^2\, dx + |u(y) - t\omega_R|^2 \\ &\le (1-t)^2 M^2 + K_o\, \gamma(R) + K'_o R^2 \end{aligned}$$

et aussi

$$(9)\qquad \begin{aligned} &2\int_{B_{2R}} [1 - a|u - t\omega_R|]\, Q(x, \nabla u)\, G(x,y)\, \eta^2\, dx + |u(y) - t\omega_R|^2 \\ &\le (1-t)^2 M^2 + K_o\, \gamma(R) + K'_o R^2 \end{aligned}$$

pour presque tout $y \in B_{R/2}(x_o)$, et avec des constantes K_o et K'_o indépendantes de R. Aussi, $K'_o = 0$ quand $b = b^{*} = 0$.

Puisque $a^{*} \le aM$ et $a^{*} + aM < 2$, on a $a^{*} < 1$. Définissons

$$\nu := 2 - a^{*} - aM \quad \text{et} \quad t_o := \frac{1-a^{*}}{2-a^{*}} \quad .$$

Alors

$$\nu > 0 \quad \text{et} \quad 0 < t_o < 1 \quad .$$

Par conséquent,

$$1 - a^{*} - t_o aM = t_o\, \nu > 0 \quad .$$

En tenant compte de l'inégalité (8), on obtient que

$$(10)\qquad \sup_{y \in B_{R/2}} |u(y) - t_o\, \omega_R|^2 \le (1-t_o)^2 M^2 + K_o\, \gamma(R) + K'_o R^2 \quad .$$

D'ailleurs nous définissons $\tau > 0$ par

$$\tau := \min\left\{\frac{1}{4aM}, \frac{\nu}{2(2-a^{*})aM}\right\} \quad .$$

Supposons que $\varkappa$ soit le plus petit nombre entier tel que $\varkappa\tau \geq 1 - t_o$. Posons

$$t_i = t_o + i\tau \quad \text{pour } 0 \leq i \leq \varkappa - 1 \quad \text{et} \quad t_\varkappa = 1 \quad .$$

Par suite du principe de Harnack [11], on a

$$G(x,y) \leq \sup_{z \in B_{j+1}} G(x,z) \leq K_4 \inf_{z \in B_{j+1}} G(x,z) \leq K_4\, G(x,x_o) \tag{11}$$

$$\text{pour } x \in B - B_j \;,\; y \in B_{j+1} \;,\; j = 0,1,2,\ldots,\varkappa,$$

avec $$B := B_{2R}(x_o) \quad , \quad B_j := B_{2^{-j-1}R}(x_o) \quad .$$

A l'aide de (9) et de (11), on conclut que

$$2 \int_{B_j} [1 - \alpha \, |u - t_{j+1}\, \omega_R|]\, Q(x, \nabla u)\, G(x,y)\, dx + |u(y) - t_{j+1}\, \omega_R|^2$$

$$\leq (1 - t_{j+1})^2 M^2 + K_o\, \gamma(R) + K_o' R^2 + 4aMK_4 \int_{B-B_j} Q(x, \nabla u)\, G(x,x_o)\, dx$$

pour presque tout $y \in B_{j+1}$.

Pour $x \in B - B_j$ on a

$$0 \leq G(x,x_o) \leq K_2\, |x - x_o|^{2-n} \leq K_2\, (2^{-j-1}\, R)^{2-n} \quad ,$$

c'est-à-dire,

$$0 \leq G(x,x_o) \leq 2^{(n-2)(\varkappa+1)}\, K_2\, R^{2-n} \quad \text{pour } x \in B - B_j \;,\; 0 \leq j \leq \varkappa \quad .$$

Posons

$$K_o'' := K_o + 2^{(n-2)(\varkappa+1)+2}\, a\, M\, K_2 K_4 \quad .$$

Donc

$$2 \int_{B_j} [1 - a\, |u - t_{j+1}\, \omega_R|]\, Q(x, \nabla u)\, G(x,y)\, dx + |u(y) - t_{j+1}\, \omega_R|^2 \tag{12}$$

$$\leq (1 - t_{j+1})^2\, M^2 + K_o'\, R^2 + K_o''\, \gamma(R)$$

pour presque tout $y \in B_{j+1}$ lorsque $\gamma(R) \le 1$. Choisissons ρ_o tel que

(13')
$$\rho_o^2 \le \frac{\tau^2 M}{2K_o'} \quad ,$$

et posons

(13")
$$\delta := \min\left\{1 , \frac{\tau^2 M^2}{2K_o''}\right\} \quad .$$

Après cela, nous avons

(14)
$$K_o' \, R^2 + K_o'' \, \delta \le \tau^2 M$$

pour tout $R \in (0,\rho_o]$.
Soit c la constante du lemme de la section 1, et soient $\varepsilon = \delta^2$ et $p = [c/\varepsilon] + 1$. Posons

(15)
$$R_o := \min\{\rho_o , \tfrac{1}{2} \operatorname{dist}(x_o,\partial\Omega)\} \quad .$$

Alors il existe un $i_o \in \{1,2,\ldots,p\}$ tel que

(16)
$$\gamma(R) < \delta \le 1$$

où

(17)
$$R = 2^{-i_o} R_o \quad .$$

Maintenant nous allons démontrer que

(18)
$$\sup_{y \in B_i} |u(y) - t_i \, \omega_R|^2 \le (1 - t_i)^2 \, M^2 + \tau^2 \, M^2$$

pour $i = 0,1,\ldots,\varkappa$. En effet, (18) est vrai pour $i = 0$ d'après (10) et (15).
Supposons que (19) soit correcte pour $i = j$ où $j \le \varkappa - 1$. Alors nous allons vérifier (19) avec $i = j+1$.
Par induction, on a sur B_j l'estimation
$$1 - a|u - t_{j+1} \, \omega_R| \ge 1 - a|u-t_j \, \omega_R| - aM\tau \ge 1-a(1-t_o) \, M-2aM\tau$$

parce que
$$(1-t_j)^2 M^2 + \tau^2 M^2 < (1-t_o)^2 M^2 + \tau^2 M^2 < (1-t_o + \tau)^2 M^2 \; .$$

Donc

$$1 - a|u - t_{j+1}\,\omega_R| \geq 1 - \frac{aM}{2-a^*} - 2aM\tau$$

$$\geq aM\left\{ \frac{\nu}{(2-a^*)aM} - 2\tau \right\} \geq 0 \text{ p.p. sur } B_j ,$$

parce que

$$\tau \leq \frac{\nu}{2(2-a^*)aM} .$$

Alors on trouve que

$$\sup_{y\in B_{j+1}} |u(y) - t_{j+1}\,\omega_R|^2 \leq (1-t_{j+1})^2 M^2 + \tau^2 M^2$$

en tenant compte des inégalités (12), (15) et (17).
Ensuite nous avons

$$\sup_{y\in B_\varkappa} |u(y) - \omega_R| \leq \tau M.$$

A cause de $\tau \leq \frac{1}{4aM}$, on déduit que

$$\sup_{y\in B_\varkappa} |u(y) - \omega_R| \leq \frac{1}{4a} .$$

Par conséquent,

$$\sup_{x,y\in B_\varkappa} |u(x) - u(y)| \leq \sup_{x\in B_\varkappa} |u(x) - \omega_R| + \sup_{y\in B_\varkappa} |u(y) - \omega_R| \leq \frac{1}{2a} .$$

C'est à dire,

$$a.\ \operatorname{osc}_{B_\varkappa} u \leq 1/2 .$$

En employant la proposition de la section 2, on obtient l'assertion du théorème.

4. APPENDICE

Cette dernière partie de notre travail est exclusivement destinée à familiariser le lecteur avec l'emploi de la méthode de la fonction de Green.

Soit

$$L = - D_\beta \{A^{\alpha\beta} D_\alpha\}$$

un opérateur elliptique avec des coefficients $A^{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. Supposons que les hypothèses (S2) et (S3) soient satisfaites.
Alors il existe une fonction de Green

$$G(.,y) \in H_1^1 \, (B_{2R}(x_o), \mathbb{R})$$

sur chaque boule $B_{2R}(x_o) : = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_o| < 2R\}$ dans Ω et pour tout $y \in B_{2R}(x_o)$, telle que

$$\int A^{\alpha\beta} D_\alpha \varphi \, D_\beta \, G(.,y) \, dx = \varphi(y)$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty \, (B_{2R}(x_o) \, , \mathbb{R})$.

En outre, il existe des nombres K_1, K_2 et K_3 dépendant seulement de $n \geq 3$, de λ et de μ, mais pas de x_o et de R, tels que :

(A1) $$G(x,y) \geq K_1 \; |x-y|^{2-n} \text{ pour } x,y \in B_R(x_o) \; ,$$

(A2) $$0 \leq G(x,y) \leq K_2 |x-y|^{2-n} \text{ pour } x,y \in B_{2R}(x_o)$$

(A3) $$0 \leq G^\rho(x,y) \leq K_2 |x-y|^{2-n} \text{ pour } x,y \in B_{2R}(x_o)$$

où

$$G^\rho(.,y) = \fint_{B_\rho(y)} G(.,z) \, dz$$

et où $\rho > 0$ est suffisamment petit, par exemple $\rho < 2R-|y-x_o|$.

En outre, $G^\rho(.,y) \in \mathring{H}_2^1 \cap L^\infty(B_{2R}(x_o), \mathbb{R})$,

(A4) $$\lim_{\rho \to +0} G^\rho(x,y) = G(x,y), \quad x \neq y,$$

et

(A5) $$\int_{T_{2R}(x_o)} |\nabla G^\rho(x,y)|^2 \, dx < K_3 \; R^{2-n} \text{ pour } |y-x_o| < R/2.$$

De plus,

(A6) $$\int_{B_{2R}} A^{\alpha\beta}(x) \; D_\alpha \; \varphi(x) \; D_\beta \; G^\rho(x,y) \; dx = \int_{B_\rho(y)} \varphi(x) \; dx.$$

Finalement, pour toute solution faible $v \geq 0$ de

$$Lv = 0 \text{ dans } B_{2R}(x_o) \subset \Omega,$$

on a

(A7) $$\sup_{B_{2R}(x_o)} v \leq K_4 \cdot \inf_{B_{2R}(x_o)} v \ .$$

La démonstration de (A1-6) se trouve dans [2] ; cf. aussi [10] et [12]. La relation (A7) est le principe de Harnack établi par Moser [11].

****

Bibliographie

[1] M. Giaquinta and Enrico Giusti : On the regularity of the minima of variational integrals (à paraître).

[2] M. Grüter and K.-O. Widman : The Green function for uniformly elliptic equations. (à paraître).

[3] S. Hildebrandt : Nonlinear elliptic systems and harmonic mappings. Proc. Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential equations 1980. Science Press, Beijing, China (à paraître).

[4] S. Hildebrandt and K.-O. Widman : Some regularity for quasilinear elliptic systems of second order. Math. Z. 142, 67-86 (1975).

[5] S. Hildebrandt and K.-O. Widman : On the Hölder continuity of weak solutions of quasilinear elliptic systems of second order. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (IV), 4, 145-178 (1977).

[6] S. Hildebrandt and K.-O. Widman : Sätze vom Liouvilleschen Typ für quasilineare elliptische Gleichungen und Systeme. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. Math.-Phys. Klasse, Nr.4, 41-59, Jahrgang 1979.

[7] S. Hildebrandt, H. Kaul, and K.-O. Widman : An existence theorem for harmonic mappings of Riemannian manifolds. Acta Math. 138, 1-16 (1977).

[8] S. Hildebrandt, J. Jost, and K.-O. Widman : Harmonic mappings and minimal submanifolds. Inventiones math. 62, 269-298 (1980).

[9] P.A. Ivert : On quasilinear elliptic systems in diagonal form. Math. Z. 170, 283-286 (1980).

[10] W. Littman, G. Stampacchia, and H.F. Weinberger : Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Sci. fis. mat. III. Ser. 17, 43-77 (1963).

[11] J. Moser : On Harnack's theorem for elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 14, 577 - 591 (1961).

[12] K.-O. Widman : The singularity of the Green function for non-uniformly elliptic partial differential equations with discontinuous coefficients. Preprint Uppsala University (1970).

[13] M. Wiegner : Ein optimaler Regularitätssatz für schwache Lösungen gewisser elliptischer Systeme. Math. Z. 147, 21-28 (1976).

[14] M. Wiegner : A-priori Schranken für Lösungen gewisser elliptischer Systeme. Manuscripta math. 18, 279-297 (1976).