Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

V. PETKOV

Comportement asymptotique de la phase de diffusion pour des obstacles non-convexes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 13, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A14_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1980-1981

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA PHASE DE DIFFUSION POUR DES OBSTACLES NON-CONVEXES

par V. PETKOV

Exposé n° XIII

17 Février 1981

1. INTRODUCTION

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, un domaine ouvert, connexe et borné à frontière C^∞, notée ∂K. Soit H l'extension autoadjointe dans $L^2(K)$ du laplacien $-\Delta$ sous la condition de Dirichlet ou Neumann sur ∂K. Le spectre de H est une suite croissante $(\lambda_j)_{j \geqslant 1}$ de valeurs propres avec $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Le comportement asymptotique de la fonction $N(\lambda) = \left\{\# \, j, \, \lambda_j < \lambda^2\right\}$ a été examiné par de nombreux auteurs (cf. [6], [8] pour une bibliographie). En particulier, dans un article récent Ivrii [8] sous une hypothèse sur les bicaractéristiques périodiques a établi le résultat suivant

$$(1) \qquad N(\lambda) \sim \frac{(4\pi)^{-n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} (\mathrm{vol}\, K)\, \lambda^n$$

$$\mp \frac{(4\pi)^{-\frac{n-1}{2}}}{4\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)} (\mathrm{vol}\, \partial K)\, \lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}), \quad \lambda \to +\infty,$$

où le signe - correspond au problème de Dirichlet tandis que le signe + correspond au problème de Neumann.

Quand on se place dans l'extérieur $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus K$, l'opérateur H, associé au laplacien $-\Delta$, n'a pas de valeurs propres et le spectre est continu. Afin de trouver un analogue de la fonction $N(\lambda)$ on considère l'opérateur des ondes $\Box = \partial_t^2 - \Delta$ dans Ω sous la condition de Dirichlet ou Neumann sur $\mathbb{R} \times \partial\Omega$. On associe à $\Box$ l'opérateur de diffusion S qui est un opérateur unitaire dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_o$, déterminé ci-dessous. Dans une représentation convenable de $\mathcal{H}_o$ l'opérateur S devient une fonction $S(\lambda)$ à valeurs opérateurs unitaires dans $L^2(S^{n-1})$. De plus $S(\lambda)$ a la forme $S(\lambda) = I + K(\lambda)$ où $K(\lambda)$ est nucléaire. Cela rend possible l'introduction de la fonction

$$s(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \operatorname{Log} \det S(\lambda),$$

dite phase de diffusion. Il y a quelques points analogiques entre $N(\lambda)$ et $s(\lambda)$ (cf. [19]) et parmi eux le plus remarquable est peut-être le comportement asymptotique de $s(\lambda)$ qui a la forme (1) avec un changement des signes devant le second terme. Les résultats de ce type ne sont connus que pour des domaines convexes [5], [14] ou étoilés [9]. Récemment Majda et Ralston [13] ont fait la conjecture que (1) reste valable pour chaque domaine Ω qui satisfait l'hypothèse (H_2) (voir section 2 pour la définition de (H_2)). Le but de cet exposé est de présenter un résultat obtenu en collaboration avec G. Popov qui pour n impair donne une réponse à cette conjecture.

2. NOTATIONS ET ENONCE DES RESULTATS

Soit H_o l'extension autoadjointe du laplacien $-\Delta$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, et soit $H_D(H_N)$ l'extension autoadjointe du $-\Delta$ dans $L^2(\Omega)$ avec condition de Dirichlet (Neumann) sur $\partial\Omega$. La condition de Neumann a la forme

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + \gamma(x)u(x)\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

où ν est la normale extérieure en $x \in \partial\Omega$ et $\gamma(x) \in C^\infty(\partial\Omega)$, $\gamma(x) \geqslant 0$. On désigne par $B_j = \sqrt{H_j}$, $j = 0, D, N$ les opérateurs autoadjoints à domaines suivants :

$$D(B_o) = H_1(\mathbb{R}^n), \qquad D(B_N) = H_1(\Omega),$$

$$D(B_D) = \left\{u \in H_1(\Omega),\ u\Big|_{\partial\Omega} = 0\right\} .$$

Soit $[D(B_o)]$ le complété de $C_o^\infty(R^n)$ par rapport à la forme $\left(\int_{R^n} |\nabla u|^2\, dx\right)^{1/2}$, et soit $[D(B_D)]$ le complété de $C_o^\infty(\Omega)$ par rapport à $\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{1/2}$. On introduit les espaces de Hilbert

$$\mathcal{H}_o = [D(B_o)] \oplus L^2(R^n),$$

$$\mathcal{H}_D = [D(B_D)] \oplus L^2(\Omega) .$$

Pour le problème de Neumann il est plus commode de prolonger H_N et B_N dans $L^2(R^n)$ en posant $B_N f = f$, $H_N f = f$ si $f \in (L^2(\Omega))^{\perp}$. On associe à H_N une forme quadratique $q_N(u,u)$ et on désigne par $\left[D(B_N)\right]$ le complété de $D(B_N)$ par rapport à $(q_N(u,u))^{1/2}$. Alors on introduit l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}_N = \left[D(B_N)\right] \oplus L^2(R^n).$$

De cette manière nous avons les relations $\mathcal{H}_D \subset \mathcal{H}_o \subset \mathcal{H}_N$.

Les opérateurs

$$A_j = i \begin{pmatrix} 0 & I \\ -H_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 0, D, N$$

sont autoadjoints respectivement dans $\mathcal{H}_j$, $j = 0, D, N$ et les groupes e^{itA_j} associés à A_j seront notés par $U_j(t)$.

On considère les opérateurs des ondes

$$W_\pm (A_D, A_o ; P) = s - \lim_{t \to \pm\infty} U_D(-t)\, P\, U_o(t),$$

$$W_\pm (A_N, A_o) = s - \lim_{t \to \pm\infty} U_N(-t)\, U_o(t)$$

où $P : \mathcal{H}_o \to \mathcal{H}_D$ est la projection orthogonale. Ces opérateurs existent et sont complets (cf. [10], [20]). Alors on introduit l'opérateur de diffusion

$$S = (W_-)^{\star} W_+ .$$

Afin de simplifier les notations nous allons écrire $B_\pm$, $S_\pm$ pour les opérateurs introduits ci-dessus où le signe + sera utilisé pour le problème de Dirichlet tandis que le signe - sera utilisé pour le problème de Neumann.

A l'aide de la transformation de Fourier on peut construire une représentation spectrale de A_o. Dans cette représentation l'opérateur $S_\pm$ devient une fonction $S_\pm(\lambda)$ à valeurs opérateur unitaires car $S_{\pm}$ et A_o commutent. De plus cette fonction a la forme

$$S_{\pm}(\lambda) = I + K_{\pm}(\lambda)$$

où $K_{\pm}(\lambda)$ est nucléaire. Grâce à cette propriété (cf. [4]) on peut déterminer det $S_{\pm}(\lambda)$ et introduire la phase de diffusion par l'expression

$$s_{\pm}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \operatorname{Log} \det S_{\pm}(\lambda).$$

Maintenant nous allons imposer deux hypothèses concernant la géométrie de $\partial\Omega$.

(H_1) Aucune bicaractéristique de $\square$ n'est pas tangente d'ordre infini à $T^{\star}(\partial\Omega)$.

En suivant [15] on détermine les bicaractéristiques généralisées de $\square$ et les projections de celles-ci sur $\bar{\Omega}$ seront appelées géodesiques généralisées.

(H_2) Pour chaque $R > 0$ pour lequel $K \subset B_R = \left\{x \; ; \; |x| \leqslant R\right\}$ il existe un nombre $T_R > 0$ tel que aucune géodesique généralisée de longueur T_R n'est pas incluse entièrement dans $\bar{\Omega} \cap B_R$.

<u>Théorème 1</u> : Supposons que les hypothèses (H_1), (H_2) soient satisfaites et que n soit impair

$$(2) \quad s_{\pm}(\lambda) = \frac{(4\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \operatorname{vol} K \, \lambda^n \pm \frac{(4\pi)^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{4\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)} \operatorname{vol} \partial K \lambda^{n-1}$$
$$- \frac{(4\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{\partial K} \left(\frac{H(x)}{6} - 2\gamma(x)\right) d_x S \, \lambda^{n-2} + O(\lambda^{n-3})$$

où $H(x)$ désigne la courbure moyenne en $x \in \partial K$ et $d_x S$ est la mesure sur ∂K. De plus pour $s_+(\lambda)$ le terme contenant $\gamma(x)$ doit être supprimé.

Remarque : Le développement (2) pour $s_+(\lambda)$ dans le cas de domaine convexe a été démontré dans [14] (cf. aussi [5]). Majda et Ralston [13] ont fait la conjecture que (2) reste valable sous l'hypothèse (H_2). Pour des domaines étoilés Jensen et Kato [9] ont trouvé le terme principal dans le développement de $s_+(x)$ avec une estimation de reste qui a la forme $O(\lambda^{n-1} \log \lambda)$.

La démonstration du théorème 1 repose sur l'étude de la transformation de Fourier $\sigma_\pm(t)$ de $s_\pm(\lambda)$. Cette étude contient les pas suivants :

(i) démonstration d'une formule de trace,
(ii) analyse du comportement de $\sigma_\pm(t)$ pour $|t| \to \infty$,
(iii) examen des singularités de $\sigma_\pm(t)$,
(iv) calcul des coefficients dans le développement (2).

3. FORMULE DE TRACE

Il est bien connu que la fonction $N(\lambda)$ est liée avec le noyau de l'opérateur $\cos B_\pm t$ par la formule

$$(3) \quad 2\mathrm{tr} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t) \cos B_\pm t \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{\rho}}{d\lambda}(\lambda) \; N(\lambda) d\lambda, \; \rho \in C_0^\infty(R)$$

Ici $\hat{\rho}(\lambda) = \int \rho(t) \, e^{-i\lambda t} dt$ et on a prolongé $N(\lambda)$ par $N(\lambda) = - N(-\lambda)$ pour $\lambda < 0$.

Pour des domaines non-bornés l'opérateur à gauche de (3) n'est pas nucléaire. On règle cette difficulté en considérant la différence

$$\int \rho(t) \; (\cos B_\pm \, t \oplus 0 - \cos B_0 t) \; dt$$

où $\cos B_\pm t$ est prolongé par 0 sur $(L^2(\Omega))^\perp$. Remarquons que le prolongement de B_- sur $(L^2(\Omega))^\perp$ ne charge pas l'opérateur de diffusion associé à B_- et B_0.

Théorème 2 : Soit n impair. Alors pour chaque $\rho \in C_0^\infty(R)$ on a

$$(4) \quad 2\mathrm{tr} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t) \; (\cos B_\pm t \oplus 0 - \cos B_0 t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{\rho}}{d\lambda} \; s_\pm(\lambda) \; d\lambda$$

La formule (4) pour le problème de Dirichlet a été démontrée dans [11] pour des domaines étoilés et dans [3] pour des domaines généraux. Il est important de noter que pour le problème de Dirichlet l'opérateur

(5) $$(H_D - i)^{-M} - (H_o - i)^{-M}$$

est nucléaire pour M suffisamment grand. En s'appuyant pas sur cette propriété on peut obtenir (4) en suivant les raisonnements utilisés dans [9]. Pour le problème de Neumann avec $\gamma(x) \neq 0$ la propriété (5) n'est pas connue et il semble que la démonstration serait délicate (cf. [20], Appendix to XI.10 pour le cas $\gamma(x) = 0$). On se propose de tirer profit d'un autre opérateur nucléaire et pour cela on prouve les deux lemmes suivants :

<u>Lemme 1 (cf. [3])</u> : Pour chaque $\rho \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ l'opérateur

$$\int \rho(t)\ (\cos B_\pm t \oplus 0 - \cos B_o t)dt$$

est nucléaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

<u>Lemme 2</u> : Il existe une fonction $\phi(t) \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ possèdant les propriétés suivantes

(i) ϕ est pair,

(ii) $\frac{d\hat{\rho}}{d\lambda}(\lambda) < 0$ pour $\lambda > 0$ et $\hat{\phi}(o) = 1$.

Dans la suite on concentre l'attention sur le problème de Neumann et on considère les opérateurs $\tilde{C}_1 = \hat{\phi}(B_-) \oplus 0$, $C_o = \hat{\phi}(B_o)$. Soit E_λ^1, E_λ^o les projections spectrales associées respectivement à H_N et H_o. On obtient facilement

$$\tilde{C}_1 - C_o = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \phi(t) \cos\sqrt{\lambda}\, t\ dt\ dE_\lambda^0 \oplus 0 -$$

$$- \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \phi(t) \cos\sqrt{\lambda}\, t\ dE_\lambda^o = \int_{-\infty}^\infty \phi(t)\ (\cos B_- t \oplus 0 - \cos B_o t)dt.$$

D'après le lemme 1 l'opérateur $\tilde{C}_1 - C_o$ est nucléaire donc l'opérateur de diffusion $S(\tilde{C}_1, C_o)$ et la phase de diffusion $\tilde{\xi}_1(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}$ Log det $S(\lambda, \tilde{C}_1, C_o)$ existent (cf. [4] , [20]). Pour des raisons techniques nous allons modifier l'opérateur $\tilde{C}_1$ sur $(L^2(\Omega))^{\perp}$ en introduisant l'opérateur $C_1 = \hat{\phi}(B_-) \oplus \gamma$, où $\gamma = \hat{\phi}(1)$. Il est facile de démontrer que cela ne change pas l'opérateur de diffusion et la phase de diffusion, c'est-à-dire

$$S(\tilde{C}_1, C_o) = S(C_1, C_o), \quad \tilde{\xi}_1(\lambda) = \xi_1(\lambda)$$

où $\xi_1(\lambda)$ est la phase de diffusion associée à C_1 et C_o.

Afin d'appliquer le principe d'invariance on considère la fonction $\psi(\lambda) = \phi^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in (0,1)$. Evidemment $\psi'(\lambda)$ est strictement négative dans l'intervalle $(0,1)$. De plus $\lim_{\lambda \to 1} \psi(\lambda)$ existe et le spectre ponctuel de C_1 et C_o ne contient pas 0. Alors le principe d'invariance (cf. [20] , p. 30) implique

$$(6) \qquad S(B_- \oplus I, B_o) = S^{\star}(C_1, C_o) .$$

Cela rend possible la définition de la phase de diffusion

$$\xi_-(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \text{ Log det } S(\lambda, B_- \oplus I, B_o)$$

et on prouve que

$$(7) \qquad \xi_-(\lambda) = -\xi_1(\hat{\phi}(\lambda)) .$$

On considère la fonction

$$\tilde{s}_-(\lambda) = \begin{cases} \xi_-(\lambda), & \lambda > 0 , \\ -\xi_-(-\lambda), & \lambda < 0. \end{cases}$$

En utilisant les techniques développées par Reed et Simon (cf. [20] , XI,10) on obtient la

<u>Proposition 3</u> : Soit n impair. Alors

$$\tilde{s}_-(\lambda) = s_-(\lambda)$$

<u>Remarque</u> : Dans la démonstration de la proposition 3 on utilise essentiellement le fait que n est impair.

<u>Proposition 4</u> : Pour chaque $\rho \in C_o^\infty(R)$ on a

$$2\mathrm{tr} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)(\cos B_-t \oplus 0 - \cos B_o t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{\rho}}{d\lambda}(\lambda)\ \tilde{s}_-(x)dx$$

On va donner seulement quelques indications sur la démonstration de la dernière proposition. Soit $\rho(t) = a(t) + ib(t)$, où $a(t)$ et $b(t)$ sont à valeurs réelles, et soit

$$a(t) = a_1(t) + a_2(t) \quad , \quad b(t) = b_1(t) + b_2(t)$$

où a_1 et b_1 sont pairs tandis que a_2 et b_2 sont impairs. On considère l'opérateur $\hat{a}_1(B_-) \oplus 0 - \hat{a}_1(B_o)$ qui est nucléaire d'après le lemme 1. Donc la théorie de Krein-Birmann [4] implique que la phase de diffusion $\xi_{a_1}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}$ Log det $S(\lambda, \hat{a}_1(B_-) \oplus 0, \hat{a}_1(B_o))$ existe et[1]

$$\mathrm{tr}\ (\hat{a}_1(B_-) \oplus 0 - \hat{a}_1(B_o)) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{a_1}(\tau)d\tau \ .$$

Le point essentiel est de trouver une liaison entre les fonctions $\xi_{a_1}(\lambda)$ et $\xi_1(\lambda)$. Pour cela il est naturel d'introduire la fonction $\varphi(\lambda) = \hat{a}_1(\psi(\lambda))$ et d'appliquer le principe d'invariance pour les opérateurs $\tilde{C}_1$ et C_o. La fonction $\varphi(\lambda)$, étant analytique, a des zéros isolés et cela nous amène à utiliser une décomposition

$$(0,1) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\alpha_{n+1}, \alpha_n)$$

où $\varphi'(\tau) = 0$ seulement pour $\tau = \alpha_n$ et

$$1 > \alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_n > \dots, \lim \alpha_n = 0.$$

Pour chaque n fixé on a $\varphi'(\tau) > 0$ ou $\varphi'(\tau) < 0$ sur (α_{n+1}, α_n). De plus $\varphi(\tau)$ peut être prolongée comme une fonction continue sur $[0,1]$. En appliquant le principe d'invariance on trouve une liaison entre les opérateurs $S(\varphi(\tilde{C}_1) \oplus 0, \varphi(C_o))$ et $S(\tilde{C}_1 \oplus 0, C_o)$ et après on obtient une relation entre $\xi_{a_1}(\lambda)$ et $\xi_1(\lambda)$.

4. COMPORTEMENT DE $\sigma_\pm(t)$ POUR $|t| \to \infty$.

Dans cette section on suppose que n est impair. D'abord nous allons rappeler la représentation du noyau de S. Soit $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}_o$, et soit $Rf = \partial_s \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$, où

$$\tilde{f}_i(s,\omega) = \int_{(x,\omega)=s} f_i(x)\,dS, \quad i = 1,2$$

est la transformation de Radon. On considère la transformation

$$\mathcal{R} f = d_n\, \partial_s^{(n-1)/2} Rf, \quad d_n = 1/2^{n/2}\, \pi^{(n-1)/2} .$$

Alors $\mathcal{R}\, U_o(t) \mathcal{R}^{-1}$ coincide avec l'opérateur de translation dans l'espace $L^2(\mathbb{R} \times S^{n-1})$. Les opérateurs $\tilde{S}_\pm = \mathcal{R}\, S_\pm\, \mathcal{R}^{-1}$, $U_o(t)$ commutent, donc $\tilde{S}_\pm$ admet un noyau de la forme suivante

$$S(t - t', \Theta, \omega) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times S^{n-1} \times \mathbb{R} \times S^{n-1}),$$

où $(t',\omega) \in \mathbb{R} \times S^{n-1}$, $(t,\Theta) \in \mathbb{R} \times S^{n-1}$. D'autre part la distribution $S(t,\Theta,\omega)$ elle-même possède une représentation (cf. [12]) qui a la forme

$$(8) \quad S(t,\Theta,\omega) = \delta(t)\,\delta(\Theta-\omega) + d_n^2\, \partial_t^{n-2} \int_{R\times\partial\Omega} \delta(t+\tau-(y,\Theta)) \left(\frac{\partial w^s}{\partial \nu}(\tau,y,\omega) - (\nu,\Theta)\frac{\partial w^s}{\partial \tau}(\tau,y,\omega) \right) \times d\tau\, d_y S$$

où $w^s(\tau,y,\omega)$ est la solution du problème mixte

$$\begin{cases} \Box\, w^s = 0, \\ B\, w^s \big|_{R \times \partial\Omega} = -\, B\, \delta(t - (y,\omega)) \big|_{R \times \partial\Omega} \\ w^s \big|_{t << 0} = 0 , \end{cases}$$

Ici B correspond à la condition de Dirichlet ou Neumann.

L'hypothèse (H_2) implique la décroissance exponentielle de l'énergie locale [16] . En profitant de ce phénomène on prouve facilement la

<u>Proposition 5</u> : Il existe un nombre $T_o > 0$ tel que $S(t,\Theta,\omega)$ peut être écrit comme la somme

$$S(t,\Theta,\omega) = a(t,\Theta,\omega) + b(t,\Theta,\omega)$$

où a et b ont des propriétés suivantes :

(i) $\operatorname{supp}_t a(t,\Theta,\omega) \subset (-T_o, T_o)$

(ii) $\max_t \operatorname{supp} b(t,\Theta,\omega) \leqslant -T_o + 1,$

(iii) $b(t,\Theta,\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ uniformément par rapport à (Θ,ω).

De la même manière on obtient pour le noyau $S^\star(t-t',\Theta,\omega)$ de l'opérateur $S^\star$ la

<u>Proposition 6</u> : Il existe un nombre $T_o > 0$ tel que $S^\star(t,\Theta,\omega)$ peut être écrit comme la somme

$$S^\star(t,\Theta,\omega) = c(t,\Theta,\omega) + d(t,\Theta,\omega)$$

où c et d ont des propriétés suivantes :

(i) $\operatorname{supp}_t c(t,\Theta,\omega) \subset (-T_o, T_o)$,

(ii) $\min_t \operatorname{supp} d(t,\Theta,\omega) \geqslant T_o - 1,$

(iii) $d(t,\Theta,\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ uniformément par rapport à (Θ,ω).

Alors en utilisant la formule

$$\frac{d}{d\lambda} \operatorname{Log} \det S(\lambda) = -\operatorname{tr}\left(S(\lambda)\frac{d}{d\lambda}S^\star(\lambda)\right)$$

et tenant compte des propositions 5 et 6 on obtient

Proposition 7 : La transformation de Fourier $\sigma_{\pm}(t)$ de $S_{\pm}(\lambda)$ est la somme d'une distribution f à support compact et une fonction $R(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

5. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE $\frac{ds_{\pm}}{d\lambda}(\lambda)$.

La distribution $\sigma_{\pm}(t)$ n'a des singularités qu'en $t = 0$. Ce résultat est une conséquence du fait qu'il n'y a pas des bicaractéristiques généralisées périodiques, les longueurs desquelles sont liées avec les singularités de $\sigma_{\pm}(t)$ (cf. [15] pour une définition précise des bicaractéristiques généralisées). La démonstration de cette liaison repose sur l'application des techniques développées dans [1] tenant compte des résultats de [15] concernant la propagation des singularités.

Soit $\Pi : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\Omega)$ la projection orthogonale Alors pour chaque $\rho(t) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ on a

$$(8) \quad \frac{ds_{\pm}}{d\lambda}(\lambda) = 2 \text{ tr} \int \rho(t) e^{-i\lambda t} (I-\Pi) \cos B_0 t (I-\Pi) dt$$

$$+ 2\text{tr} \int \rho(t) e^{-i\lambda t} \, \Pi(\cos B_0 t - \cos B_{\pm} t) \, \Pi dt + r(\lambda)$$

où $r(\lambda) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Un calcul aisé montre qu'on a pour $n \in N$ quelconque

$$2\text{tr} \int \rho(t) e^{-i\lambda t} (I-\Pi) \cos B_0 t \, (I-\Pi) dt$$

$$= \frac{(4\pi)^{-n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} (\text{vol } K) \lambda^n + O(|\lambda|^{-N}).$$

Le point essentiel et plus difficile consiste à démontrer que le second terme dans (8) a un développement asymptotique par rapport à λ. Remarquons tout d'abord que choisissant $\rho(t)$ à support suffisamment près de 0 on se ramène à l'étude de la contribution des points situés dans un voisinage de la frontière $\partial\Omega$.

Soit $y_1 = g(y')$, $y' = (y_2,\dots,y_n)$ l'équation locale de la frontière $\partial\Omega$. Il est commode d'introduire des coordonnées locales (r,x') liées avec (y_1,y') de la manière suivante :

$$(y_1,y') = \phi(r,x') = (g(x'),x') + rN(g'x'),x')$$

où $N : U \to S^{n-1}$ est l'application de Gauss et U est un voisinage de $\hat{\underline{y}} \in \partial\Omega$. Après le changement des variables il est très important de savoir la forme de l'opérateur des ondes modulo des termes $O(r^2 + |\nabla g|^2)$. Pour cela on prouve le

Lemme 3 : On a

$$(({}^t D\phi(r,x') \begin{pmatrix} 1 & g_{x_2} & \cdots & g_{x_n} \\ -g_{x_2} & 1 + r\, g_{x_2x_2} & \cdots & r\, g_{x_2x_n} \\ \vdots & & & \\ -g_{x_n} & r\, g_{x_nx_2} & \cdots & 1 + r\, g_{x_nx_n} \end{pmatrix} + O\,(r^2 + |\nabla g|^2).$$

Alors l'opérateur des ondes dans les coordonnées (r,x') a la représentation

$$(9)\quad P = D_t^2 - D_r^2 - D_{x'}^2 - 2r \sum_{j,k} g_{x_jx_k}(x')\, D_{x_jx_k} - i\, H(g(x'),\, x')D_r + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha D^\alpha \sum_{|\alpha|=1} b_\alpha\, D^\alpha$$

où $a_\alpha = O(r^2 + |\nabla g|^2)$, $b_\alpha = O(|r| + |\nabla g|)$. De plus le symbole principal ne contient pas de dérivées mixtes $D_r\, D_{x_j}$.

Soit $u_o(t,x,y,)$, $u(t,x,y)$ les distributions qui correspondent aux noyaux de $\cos B_o t$, $\cos B_1 t$. Plus précisément ils sont déterminés comme des solutions des problèmes suivants :

$$\begin{cases} Pu = 0, \\ u_o\big|_{t=0} = \delta(x-y) \quad , \quad D_t u_o\big|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Pu = 0 \ , & B\,u\big|_{r=o} = 0 \ , \\ u\big|_{t=0} = \delta(x-y) \ , & D_t u\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

où comme dans la section précédente B désigne l'opérateur correspondant au problème de Dirichlet ou Neumann. En utilisant une partition d'unité on se ramène à l'étude de

$$I(\lambda) = 2 \int_o^\infty \int_{R^{n-1}} \rho \, \widehat{u_1}(\lambda,x,x) \; D\left(\frac{y}{x}\right) \varphi_1(x_1)\varphi_2(x')dx_1dx'$$

où $u_1 = u_o - u$, $\varphi_1 \in C_o^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi_2(x') \in C_o^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $\varphi_1(x_1) = 1$ dans un voisinage de O et pour commodité on a noté r par x_1. De plus

$$(10) \quad D\left(\frac{y}{x}\right) = (1 + |\nabla g(x')|)^{1/2} (1 - x_1 H(g(x'),x') + \ldots + c_n x_1{}^n) .$$

On doit remarquer que si $\nabla g(x') = 0$ on a $H(g(x'),x') = \Delta g(x')$. D'autre part la courbure moyenne H apparaît comme un des coefficients dans (9) et aussi dans (10). Cela explique le choix de coordonnées fait ci-dessus.

Dans la suite on utilise les techniques développées par Ivrii [8] afin de démontrer que $I(\lambda)$ possède un développement asymptotique par rapport à λ. Soit $y' \in U$, et soit

$$\bar{P}(y',D_t,D_x) = P^o(D,y',D_t,D_x)$$

où P^o est le symbole principal de P. On considère l'opérateur

$$K = \bar{P} - P = \sum_{\substack{j+|\alpha| \leqslant m \\ |\beta| \leqslant 2}} (x'-y')^\alpha x_1{}^j D^\beta + \sum_\beta a_{\beta'} \, D^\beta$$

où $a_{\beta'} = O(\,(|x'-y'| + x_1)^{m+1})$. De la même manière on introduit le développement

$$\gamma(g(x'),x') = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \gamma_2(x'-y')^\alpha + 0\;(|x'-y'|^{m+1}) \quad .$$

L'idée proposée par Ivrii est de présenter les distributions u_o et u_1 comme une somme finie des termes contenant les paramétrixes de l'opérateur $\bar{P}$ plus un reste. Afin de préciser cela considérons les paramétrixes de $\bar{P}$ déterminées par les problèmes suivants :

$$\begin{cases} \bar{P}\, E_o = I\,, \\ E_o\big|_{t=0} = D_t\, E_o\big|_{t=0} = 0\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{P}\, E' = 0\,, \qquad B\, E' = I\,, \\ E'\big|_{t=0} = D_t\, E'\big|_{t=0} = 0\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{P}\, E = I\,, \qquad B\, E = 0\,, \\ E\big|_{t=0} = D_t\, E\big|_{t=0} = 0\,. \end{cases}$$

Enfin , soit $\bar{u}_o$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \bar{P}\, \bar{u}_o = 0\,, \\ \bar{u}_o\big|_{t=0} = \delta(x-y)\,,\ D_t\, \bar{u}_o\big|_{t=0} = 0\,. \end{cases}$$

Alors on obtient facilement que

$$(11) \quad u_o = \bar{u}_o + E_oKu_o = \sum_{k=0}^{m} (E_oK)^k\, \bar{u}_o + (E_oK)^{m+1}\, u_o\,.$$

D'autre part pour le problème de Dirichlet on a

$$(12) \quad u_1 = E'B_Du_o + EKu_1 = \sum_{k=0}^{m} (EK)^k E'B_Du_o + (EK)^{m+1}\, u_1,$$

où $B_D\, u(x') = u(o,x')$ et E' et E sont déterminés avec $B = Id$. Pour le problème de Neumann on trouve un développement analogue dans lequel intervient aussi γ. A chaque terme $a_{\alpha,\beta,j}\,(x'-y')^{\alpha}x_1^{\,j}\, D^{\beta}$ on associe un poids $\omega = |\alpha| - |\beta| + j + 2$. Après à chaque terme dans les expressions (11) et (12) qui est produit de termes de ce type on associe comme poids la somme des poids. De cette manière on obtient les expressions suivantes :

$$u_o = u_o^{(o)} + \ldots + u_o^{(m)} + u_o^{(m+1)},$$

$$u_1 = u_1^{(o)} + \ldots + u_1^{(m)} + u_1^{(m+1)},$$

où $u_k^{(j)}$, $k = 0,1$ a le poids j pour $0 \leqslant j \leqslant m$ et $u_K^{(m+1)}$ contient les termes de poids plus grand que m ainsi que les restes dans les formules (11) ou (12).

La construction des paramétrixes E_o, E', E peut être simplifiée essentiellement si on applique la transformation de Fourier-Laplace. Par exemple, pour $\operatorname{Im} \tau < 0$ on prolonge $v(t,x)$ comme 0 pour $t < 0$ et on pose

$$\hat{v}(\tau,\xi) = (2\pi)^{-n-1} \int_o^\infty \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(t\tau + x\xi)} v(t,x)\,dtdx.$$

Alors la paramétrixe E_o a une forme simple parce que $\widehat{E_o f} = (p(\tau,\xi,y'))^{-1} \hat{f}(\tau,\xi)$ où $p(\tau,\xi,y')$ est le symbole de $\bar{P}(y',D_t,D_x)$. Soit $\lambda_\pm(\tau,\xi',y')$ les racines de l'équation $p(\tau,\xi,y') = 0$ par rapport à ξ_1 et par convention soit $\pm \operatorname{Im} \lambda_\pm(\tau,\xi',y') > 0$. La paramétrixe E' qui correspond au problème de Dirichlet a la forme

$$(E'f)(t,x) = \int_{L_-} \int_{R^n} e^{i(t\tau + x_1\lambda_+(\tau,\xi',y') + x'\xi')} \hat{f}(\tau,\xi')\,d\tau d\xi'$$

où $L_- = \left\{\tau \ ; \ \operatorname{Im} \tau = \tau_o < 0\right\}$. Enfin on obtient l'égalité $E = (I - E'B_D)E_o$. On apperçoit que l'expression de $\lambda_\pm(\tau,\xi,y')$ et aussi celles de E_o, E', E dépendent de y'. Après un calcul long dont les grandes lignes sont exposées dans [8] on prouve que

$$\int_o^\infty \int_{R^{n-1}} \rho \widehat{u_1^{(j)}}(\lambda,x,x)\ \varphi_1(x_1)\ \varphi_2(x')\ D\left(\frac{y}{x}\right) dx_1 dx'.$$

$$= O(|\lambda|^{n-2-j}), \quad 0 \leqslant j \leqslant m \ .$$

L'analyse du reste correspond à la partie plus difficile de l'article de Ivrii qui est liée avec la singularité normale de la distribution

$$\mathrm{tr}(\rho(t)\ \cos B_{\pm}t)$$

où $\cos B_{\pm}t$ sont associés aux problèmes intérieurs. Grâce à la vitesse finie de la propagation des singularités on se ramène facilement au cas quand les raisonnements de [8] peuvent être appliqués sans aucun changement. Cela nous amène à l'estimée

$$\int_0^{\infty} \int_{R^{n-1}} \rho \hat{u}_1^{(m+1)}\ (\lambda,x,x)\varphi_1(x_1)\varphi_2(x')\ D\left(\frac{y}{x}\right) dx_1 dx'$$
$$= O\ (|\lambda|^{s-m/2})$$

où s ne dépend pas de m.

Pour terminer il faut calculer les trois premiers termes dans le développement

$$\frac{ds_{\pm}}{d\lambda} \sim \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{\pm}\ \lambda^{n-1-j}.$$

Le calcul de C_o, C_1 est facile, tandis que celui-ci de C_2 pose beaucoup de difficultés techniques à cause de la forme compliquée de $\bar{P}(y',D_t,D_x)$, $\lambda_{\pm}(\tau,\xi',y')$ et surtout de $H(g(y'),y')$. Dans le cas particulier quand $\nabla g(\hat{y}') = 0$ tous ces difficultés disparaissent car $\bar{P}(\hat{y}',D_t,D_x) = D_t^2 - |D_x|^2$ et $H(g(\hat{g}'),\hat{y}') = \Delta g(\hat{y}')$. Pour traiter le cas général on se propose de comparer les termes qui peuvent contribuer à la forme de $u_1^{(1)}(\lambda,y,y)$ et ceux qui contribuent à la forme de $u_1^{(1)}(\lambda,\hat{y},\hat{y})$ où $\hat{y} = (g(\hat{y}'),\hat{y}')$. Une analyse, inspirée par le développement de K, montre que si on fait une rotation $y = A\hat{y}$ la différence des termes correspondants est négligeable. De telle manière on réduit le calcul du cas général au cas particulier $\nabla g(\hat{y}') = 0$. On renvoie pour les détails dans [18].

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. ANDERSON et R. MELROSE : The propagation of singularities along gliding rays, Invent. Math., 41, 1977, 197-232.

[2] C. BARDOS, J.C. GUILLOT et J. RALSTON : Relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non-borné, C.R. Acad. Sc. Paris, 290, 1980, 495-497.

[3] C. BARDOS, J.C. GUILLOT et J. RALSTON : Relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non-borné, Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1979-1980, Exposé n° XIII.

[4] M. BIRMAN et M. KREIN : On the theory of the wave operators and scattering operators, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 144, 1962, 475-478.

[5] V.S. BUSLAEV : Scattering plane waves, spectral asymptotics and trace formulas in exterior problems, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 197, 1971, 999-1002.

[6] V. GUILLEMIN : Some classical theorems in spectral theory revisited, Seminar on Singularities of Solutions, Princeton University Press 1978, 219-259.

[7] V.Ia. IVRII : On the second term of the spectral asymptotics for the Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary and for elliptic operators acting in fibering, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 250, 1980, 1300-1302 (Soviet Math. Doklady, 21, 1980, 300-302).

[8] V.Ia. IVRII : On the second term of the spectral asymptotics for the Laplace-Beltrami operator on manifold with boundary, Functional Anal, i ego Pril., 14, n°2, 1980, 25-34 (en russe).

[9] A. JENSEN et T. KATO : Asymptotic behavior of the scattering phase for exterior domains, Comm. in P.D.E., 3, 1978, 1165-1195.

[10] P. LAX et R. PHILLIPS : Scattering Theory, Academic Press, 1967.

[11] P. LAX et R. PHILLIPS : The time delay operator and a related trace formula, Stanford University, preprint, 1976.

[12] A. MAJDA : A representation formula for the scattering operator and inverse problem for arbitrary bodies, Comm. Pure Appl. Math., 30, 1977, 165-194.

[13] A. MAJDA et J. RALSTON : An analogue of Weyl's formula for unbounded domains I, Duke Math. J., 45, 1978, 183-196.

[14] A. MAJDA et J. RALSTON : An analogue of Weyl's formula for unbounded domains III, An epilogue, Duke Math. J., 46, 1979, 725-731.

[15] R. MELROSE et J. SJÖSTRAND : Singularities of boundary value problems I, Comm. Pure Appl. Math., 31, 1978, 593-617.

[16] R. MELROSE : Singularities and energy decay in accoustical scattering, Duke Math. J., 46, 1979, 43-59.

[17] V. PETKOV et G. POPOV : Asymptotique de la phase de diffusion pour des domaines non-convexes, C.R. Acad. Sci. Paris, 1981 (à paraître).

[18] V. PETKOV et G. POPOV : Asymptotic behavior of the scattering phase for non-trapping obstacles, in preparation.

[19] J. RALSTON : Propagation of singularities and the scattering matrix, NATO Avanced Study Institute, Italy, 1980, Propagation of singularities in boundary value problems.

[20] M. REED et B. SIMON : Methods of Modern Mathematical Physics, Scattering Theory, Academic Press, 1979.
