SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

YVES MEYER

Les opérateurs pseudo-différentiels classiques et leurs conjugués par changement de variable

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. nº 10, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A12_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 0 - 1 9 8 1

LES OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS CLASSIQUES ET LEURS CONJUGUES PAR CHANGEMENT DE VARIABLE

par Yves MEYER

Exposé n° X

20 Janvier 1981

Les résultats qui suivent sont dus à R.R. Coifman (en collaboration avec l'auteur), à G. David et J.L. Journé (élèves de $5^{\text{ème}}$ année à l'E.N.S. Ulm) et à M. Zinsmeister (allocataire de recherche au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique).

Soient $\tau \in S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ un symbole vérifiant les estimations classiques $|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \tau(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$ et $L = \tau(x,D)$ l'opérateur pseudo-différentiel associé.

Pour tout difféomorphisme $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, nous noterons par J_h la matrice Jacobienne de h. Nous appellerons $\text{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$ le groupe des difféomorphismes lipschitziens préservant l'orientation : cela signifie que les normes de J_h et de son inverse sont uniformément bornées sur $\mathbb{R}^n$ et que $\det J_h > 0$.

Un système fondamental de voisinages de $I \in \text{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$ est composé des ensembles V_ε, $0 < \varepsilon < 1$, définis par

$$V_\varepsilon = \left\{ h = I + \psi \ ; \ \sup_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)| \leqslant \varepsilon \text{ et } \sup_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x-y|} \leqslant \varepsilon \right\}.$$

Enfin, si $h \in \text{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$, $U_h : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ est l'opérateur unitaire défini par $U_h(f) = f \circ h \sqrt{\det J_h}$.

Nous nous proposons d'étudier l'application

$$\Lambda : \text{Diff}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}\left(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n)\right)$$

définie par $\Lambda(h) = U_h T U_h^{-1}$. Dans tous ce qui suit, l'espace de Banach $E = \mathcal{L}\left(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n)\right)$ est muni de la norme d'opérateur, notée $\|\ .\ \|$, tandis que $E = \text{Lip}(\mathbb{R}^n)$ sera l'espace de Banach des applications $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lipschitziennes (et bornées) et $\|f\|_{\text{Lip}} = \sup_{\mathbb{R}^n} |f(x)| + \sup_{x,y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}$.

Le premier résultat est que Λ est indéfiniment dérivable sur le groupe $\text{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$. Cela signifie qu'il existe une suite $T_k : E^k \mapsto \mathcal{L}\left(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n)\right)$, $k \in \mathbb{N}$, d'opérateurs multi-linéaires continus tels que, si $h = I + \psi$ où $\|\psi\|_{\text{Lip}} < 1$, on ait

(1) $U_h\, L\, U_h^{-1} = L + T_1(\psi) + T_2(\psi,\psi) + \dots + T_k(\psi, \dots,\psi) + R_k$ et $\| R_k\| \leqslant C_k \|\psi\|^{k+1}_{Lip}$.

En particulier, il existe une constante $C = C(\tau,n)$ telle que, pour tout difféomorphisme $h \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$, on ait

(2) $\| U_h\, L\, U_h^{-1} - L\| \leqslant C\, \| h - I\|_{Lip}$.

Dans certains cas, l'estimation (2) peut être améliorée. On suppose $n = 2$ et l'on appelle $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un homéomorphisme quasi-conforme (préservant l'orientation). Cela signifie qu'il existe $\mu \in L^\infty(\mathbb{C}\ ;\ dx\, dy)$ telle que $\|\mu\|_\infty < 1$ et que $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \mu\, \frac{\partial h}{\partial z}$. On pose alors $\chi(z) = \frac{\partial h}{\partial z} \Big/ \left|\frac{\partial h}{\partial z}\right|$. Soit $j \in \mathbb{Z}$ un entier (non nul) et soit T_j l'opérateur de convolution avec la distribution v.p. $\frac{e^{ij\theta}}{r^2}$. Alors

(3) $\| U_h\, T_j\, U_h^{-1} - \chi^j\, T_j\| \leqslant C_j\, \|\mu\|_\infty \Big/ 1 - \|\mu\|^2_\infty$

où C_j est une suite, à croissance lente en j, de constantes absolues.

Dans le cas où $n = 1$ et où $T = H$ est la transformation de Hilbert, (2) peut être également améliorée. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout difféomorphisme croissant $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on ait

(4) $\| U_h\, H\, U_h^{-1} - H\| \leqslant C\, \|\log h'\|_{BMO}$.

G. David et J.L. Journé viennent d'établir l'inégalité inverse de (4) sous la forme $\| U_h\, H\, U_h^{-1} - H\| \geqslant \gamma\, \|\log h'\|_{BMO} \Big/ 1 + \|\log h'\|_{BMO}$ (ce qui est naturel pour minorer une norme qui est toujours $\leqslant 2$).

L'inégalité (4) est liée au problème suivant de Caldéron (posé également par A. Zygmund dans [15]). Soit Γ une courbe rectifiable et orientée du plan complexe, partageant $\mathbb{C}$ en deux ouverts (notés Ω_1 et Ω_2) et paramétré par la longueur d'arc (notés s) et soit $L^2(\Gamma) = L^2(ds)$ l'espace des fonctions $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ de carré intégrable par rapport à la longueur d'arc. Désignons par $H^2(\Omega_1)$ et $H^2(\Omega_2)$ les espaces de Hardy généralisés associés à Γ (composés des fonctions analytiques dans Ω_1, ou Ω_2, de carré intégrable sur Γ). Alors les espaces de "traces" $H^2(\Omega_1)|_\Gamma$ et $H^2(\Omega_2)|_\Gamma$ sont bien définis et sont fermés dans $L^2(\Gamma)$. Le problème est de savoir si

(5) $$L^2(\Gamma) = H^2(\Omega_1)\,|_\Gamma + H^2(\Omega_2)\,|_\Gamma$$

ou (ce qui est équivalent) si l'on peut trouver $\varepsilon \in [0,1[$ tel que

(6) $$\left| \int_\Gamma f_1(s)\,\bar{f}_2(s)\,ds \right| \leqslant \varepsilon\, \|f_1\|_2\, \|f\|_2$$

pour tout $f_1 \in H^2(\Omega_1)|_\Gamma$ et tout $f_2 \in H^2(\Omega_2)|_\Gamma$.

Le théorème de David et Journé permet d'établir l'existence d'une constante absolue $\varepsilon_o > 0$ telle que la propriété (6) avec $\varepsilon < \varepsilon_o$ implique la condition géométrique suivante sur Γ :

(7) il existe $\eta > 0$ tel que $|z(s') - z(s)|\,(1+\eta) \geqslant |s'-s|$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $s' \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, on sait, d'après [7] , qu'il existe une constante absolue $\eta_o > 0$ telle que (7) et $\eta < \eta_o$ impliquent (5).

Mais tout ceci ne constitue qu'un élément de réponse au problème de Calderon. Par exemple, si Γ est une parabole, (5) a lieu sans que l'on ait (7).

Les courbes Γ vérifiant la condition "corde-arc" (7) ont été très étudiées (Lavrentiev, Pommerenke, Ahlfors...). Le lecteur intéressé se reportera à [11] .

Une conjoncture naturelle est que, pour tout $\eta > 0$, la condition (7) implique (5).

1) Le cas général des opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre 0

On écrit $h(x) = x + \psi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, ou encore $h = I + \psi$. Puisque T est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, on a $\|U_h\,T\,U_h^{-1} - T\| \leqslant 2\,\|T\|$ et (1) n'a d'intérêt que si $\|\psi\|_{Lip}$ est petite ; posons $\varepsilon = \|\psi\|_{Lip}$ et remarquons que, si $0 \leqslant \varepsilon < 1$, alors h est nécessairement un homéomorphisme.

<u>Théorème 1</u> : <u>Pour tout</u> $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ <u>vérifiant</u> $\|\psi\|_{Lip} < 1$, <u>on a</u>

(8) $$\| U_h \, T \, U_h^{-1} - T \| \leqslant C \, \|\psi\|_{Lip}.$$

On peut se restreindre au cas où $\psi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ car un argument de passage à la limite fournit sans peine le cas général.

On pose, si $0 \leqslant t \leqslant 1$, $h_t(x) = x + t\,\psi(x)$ et, pour alléger les notations, on écrit U_t au lieu de U_{h_t}. On considère alors les opérateurs $L_t = U_t \, T \, U_t^{-1}$ et l'on se propose de démontrer que, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, on a

(9) $$\left\| \frac{\partial}{\partial t} L_t \right\| \leqslant C \, \|\psi\|_{Lip}$$

et (8) découlera évidemment de (9).

La preuve de (9) peut se résumer en les deux remarques suivantes :

On a $\frac{\partial}{\partial t} U_t = U_t \, o X_t$ où X_t est un champ de vecteurs à coefficients lipschitziens et le commutateur $[X,T]$ entre un opérateur pseudo-différentiel classique $T \in Op\, S^0_{1,0}$ et un champ de vecteurs $X = b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + b_n \frac{\partial}{\partial x_n}$, à coefficients lipschitziens, est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ce dernier point est loin d'être évident. Lorsque le symbole $\tau(x,\xi)$ de T est homogène de degré 0 en ξ, ce résultat est dû à A.P. Calderón [2] et dans le cas général, on consultera [5] .

Pour démontrer des résultats plus précis, on adopte un autre point de vue. On désigne par $S(x,y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ le noyau-distribution de l'opérateur T. Naturellement dans les calculs qui suivent, on commence par multiplier le symbole $\tau(x,\xi)$ par $e^{-\varepsilon|\xi|^2}$, $\varepsilon > 0$, de sorte que $S(x,y)$ devienne $S_\varepsilon(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Un simple argument de passage à la limite fournit le cas général. Comme d'habitude, on est amené à poser $S_\varepsilon(x,y) = R_\varepsilon(x, x-y)$ de sorte que, pour tout x fixé, le symbole $\tau_\varepsilon(x,\xi)$ soit la transformée de Fourier de la fonction $u \to R_\varepsilon(x,u)$.

Pour alléger les notations, nous omettons ε.
Finalement le noyau-distribution de $U_h \, T \, U_h^{-1}$ est
$(\det J_h(x))^{1/2} \, (\det J_h(y))^{1/2} \, R(h(x), h(x) - h(y))$.
On se souvient alors que $h(x) = x + \psi(x)$ avec $\|\psi\|_{Lip} = \varepsilon$.

Il ne reste plus qu'à développer $R(h(x), h(x) - h(y)) = R(x + \psi(x), x - y + \psi(x) - \psi(y))$ à l'aide de la formule de Taylor, en regardant $\psi(x) - \psi(y)$ comme une petite perturbation de $x - y$.

Le terme typique qui apparaît alors est, si $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$, $(\psi_1(x) - \psi_1(y))^{\alpha_1} \ldots (\psi_n(x) - \psi_n(y))^{\alpha_n} \partial_y^\alpha \partial_x^\beta R(x, x - y)$ et il s'agit de montrer que, pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, ce noyau-distribution définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ dont la norme ne dépasse pas $C_{\alpha,\beta} \|\psi\|_{Lip}^{\alpha_1} \ldots \|\psi_n\|_{Lip}^{\alpha_n}$

Ce programme a été proposé par A.P. Calderón le 26 Janvier 1966 dans une conférence faite au Colloquium du Département de Mathématique de l'Université de Paris et n'a été achevé qu'en 1978 [5] .

On peut donc énoncer le résultat suivant

<u>Théorème 2</u> : <u>Soit</u> U <u>la boule unité ouverte de l'espace</u> $Lip(R^n)$ <u>des applications lipschitziennes et bornées de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>dans lui-même</u>. <u>Alors l'applicateur</u> $\tilde{\Lambda} : U \to \mathcal{L}\left(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n)\right)$ <u>qui à</u> $\psi \in U$ <u>associe</u> $U_h \, T \, U_h^{-1}$ $(h = I + \psi$, $T \in Op\, S^0_{1,0})$ <u>est indéfiniment dérivable</u> (<u>par rapport</u> à ψ).

2) <u>Le cas des applications quasi-conformes</u>

Nous supposons désormais $n = 2$ et identifions $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. Un homéomorphisme $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est quasi-conforme si $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}}$ et $\frac{\partial h}{\partial z}$ sont localement intégrables (les dérivées étant prises au sens des distributions) et vérifient

$$(10) \qquad \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \mu \frac{\partial h}{\partial z} \text{ où } \mu \in L^\infty(\mathbb{C} \,;\, dx\, dy) \text{ et } \|\mu\|_\infty < 1.$$

On observe aussitôt que $\det J_h = \left|\frac{\partial h}{\partial z}\right|^2 (1 - |\mu|^2) > 0$ et que, réciproquement, si $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est un difféomorphisme (de classe C^∞), préservant l'orientation, et si'il en est de même pour $\check{h}(z) = \frac{1}{h(1/z)}$, alors h est quasi-conforme.

En d'autres termes $\|\mu\|_\infty$ mesure la "distorsion" des difféomorphismes homotopes à l'identité.

Nous désignerons par χ la fonction uni-modulaire $\frac{\partial h/\partial z}{|\partial h/\partial z|}$ et, par abus de langage, nous appellerons également χ l'opérateur unitaire de $L^2(\mathbb{C})$ dans lui-même qui consiste à multiplier par la fonction χ.

Soient $j \in \mathbb{Z}$ un entier (non nul) et T_j l'opérateur de convolution avec la distribution $S_j = \text{v.p.}\ \frac{|j|}{2\pi} \frac{e^{ij\theta}}{r^2}$. Alors [15] le symbole de T_j est $(-i)^{|j|} e^{ij\alpha}$ de sorte que $T_j : L^2(\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{C})$ est unitaire. Avec ces notations, on a

<u>Théorème 3</u> : <u>Il existe une suite à croissance lente</u> C_j <u>de constantes positives telle que, pour tout homéomorphisme quasi-conforme</u> $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, <u>vérifiant</u> (10), <u>on ait</u>, <u>pour tout</u> $j \in \mathbb{Z}$

$$\| U_h\, T_j\, U_h^{-1} - \chi^j\, T_j \| \leqslant C_j \frac{\|\mu\|_\infty}{1 - \|\mu\|_\infty^2} \tag{11}$$

Avant de démontrer ce résultat, donnons un exemple d'application.
Si $-1 < \varepsilon < 1$ et $h_\varepsilon(z) = z|z|^\varepsilon$, alors $\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial z} = (1 + \frac{\varepsilon}{2})\, |z|^\varepsilon$ tandis que $\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial \bar z} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{z}{\bar z}|z|^\varepsilon$. On a donc $\mu = \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} \frac{z}{\bar z}$ et $\|\mu\|_\infty = \frac{|\varepsilon|}{2+\varepsilon} < 1$. Alors $\chi = 1$ et, dans ce cas, on a $\| U_{h_\varepsilon}\, T_j\, U_{h_\varepsilon}^{-1} - T_j \| \leqslant C_j\, \varepsilon$. Si par exemple, $\omega(\theta)$ est une fonction 2π-périodique, indéfiniment dérivable, et d'intégrale nulle, et si T est l'opérateur de convolution avec la distribution $S = \text{v.p.}\ \frac{\omega(\theta)}{r^2}$, alors il vient $\| U_{h_\varepsilon}\, T\, U_{h_\varepsilon}^{-1} - T \| \leqslant C\varepsilon$. On peut donc former des homéomorphismes quasi-conformes h_ε qui soient arbitrairement grands en norme lipschitzienne mais tels que la norme d'opérateur de $U_{h_\varepsilon}\, T\, U_{h_\varepsilon}^{-1} - T : L^2(\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{C})$ soit arbitrairement petite lorsque T est un o.p.d. d'ordre 0 défini par un symbole homogène.

Nous allons démontrer le théorème 3 par la méthode employée pour le théorème 1.

On pose $h(0) = z_0$, $h(1) = z_1$ et il existe $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, de la forme $\alpha(z) = az + b$ tel que $\alpha(z_0) = 0$ et $\alpha(z_1) = 1$. Alors $U_\alpha\, T_j\, U_\alpha^{-1} = (\frac{a}{|a|})^j\, T_j$ et donc l'étude de $U_h\, T_j\, U_h^{-1}$ se ramène à celle de $U_{h_1}\, T_j\, U_{h_1}^{-1}$ lorsque $h_1(z) = ah(z) + b$. On a alors $h_1(0) = 0$ et $h_1(1) = 1$.

Suivant Ahlfors [1], nous définissons $h_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par les conditions $h_t(0) = 0$, $h_t(1) = 1$, $h_t(\infty) = \infty$ et $\frac{\partial h_t}{\partial \bar z} = t\, \mu\, \frac{\partial h_t}{\partial z}$.

<u>Proposition 1</u> : <u>Avec les notations ci-dessus</u>, <u>on a</u> $\frac{\partial h_t}{\partial t} = A_t \circ h_t$ <u>où</u> $\left\| \frac{\partial A_t}{\partial z} \right\|_{BMO} \leqslant C \frac{\|\mu\|_\infty}{1 - \|\mu\|_\infty^2}$ <u>et</u> $\left\| \frac{\partial A_t}{\partial \bar z} \right\|_\infty \leqslant C \frac{\|\mu\|_\infty}{1 - \|\mu\|_\infty^2}$; <u>la constante</u> C <u>est une absolue et</u> $0 \leqslant t \leqslant 1$.

La proposition 1 est due à Ahlfors. On définit en effet $\alpha_t \in L^\infty(C)$ par

$$\alpha_t \circ h_t = \frac{\mu}{1 - t^2|\mu|^2} \chi_t^2 \; ; \; \chi_t = \frac{\partial h_t}{\partial z} \Big/ \left|\frac{\partial h_t}{\partial z}\right|$$

On a donc $\| \alpha_t \|_\infty \leqslant \dfrac{\| \mu \|_\infty}{1 - \| \mu \|_\infty^2}$. On pose alors, si $z \neq w$,

$$R(z,w) = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-1} + \frac{z-1}{w}\right) = -\frac{1}{\pi}\frac{z(z-1)}{w(w-1)(w-z)}$$ et l'on définit

$$(12) \qquad A_t(z) = \int_{\mathbb{C}} R(z,w)\, \alpha_t(w)\, du\, dv \qquad (w = u + iv).$$

On a $\frac{\partial}{\partial \bar z} A_t = \alpha_t$ (ceci est la raison d'être du noyau $R(z,w)$ "corrigé" pour avoir une bonne décroissance à l'infini) et, au sens des classes de fonctions de $BMO(\mathbb{C})$, on a également $\frac{\partial}{\partial z} A_t = -B(\alpha_t)$; B est la transformation de Beurling c'est-à-dire l'opérateur de convolution avec $\dfrac{1}{\pi z^2}$.

On a donc

$$\left\| \frac{\partial}{\partial z} A_t \right\|_{BMO} \leqslant C \, \| \alpha_t \|_\infty \leqslant C \, \frac{\| \mu \|_\infty}{1 - \| \mu \|_\infty^2}$$

et

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \bar z} A_t \right\|_\infty = \| \alpha_t \|_\infty .$$

Finalement il vient ([1] p. 105)

$$\frac{\partial h_t}{\partial t} = A_t \circ h_t .$$

Nous allons esquisser la preuve du théorème 3. En posant $D = \frac{\partial}{\partial z}$ et $\bar D = \frac{\partial}{\partial \bar z}$ et en conservant les notations ci-dessus, on montre que $\frac{\partial}{\partial t} U_t = U_t(A_t D + \bar A_t \bar D + \frac{1}{2} M_{DA_t} + \frac{1}{2} M_{\overline{DA_t}} + R_t)$ où l'on a posé $U_t = U_{h_t}$ et où M_a est l'opérateur de multiplication par la fonction a ; R_t désignant enfin un opérateur de norme $\leqslant C \, \| \mu \|_\infty / 1 - \| \mu \|_\infty^2$.

On appelle alors $\mathcal{L}_j(t)$ l'opérateur $(\chi_t)^{-j} U_t L_j U_t^{-1}$ où $\chi_t = \dfrac{Dh_t}{|Dh_t|}$ et est également l'opérateur de multiplication par χ_t. Arrivés à ce point, on se propose de démontrer que

$$(13) \qquad \left\| \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_j(t) \right\| \leqslant C_j \, \| \mu \|_\infty / 1 - \| \mu \|_\infty^2$$

et, à cet effet, on utilise le résultat suivant [7]

Théorème 4 : Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un entier $N \geq 1$ et une constante $C > 0$ ayant la propriété suivante.

Soit $\sigma(x,\xi) \in S^1_{1,0}$ un symbole classique d'ordre 1 définissant l'opérateur $\sigma(x,D)$ dont le noyau distribution est noté $S(x,y)$.

Soit $A \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction dont le gradient, noté ∇A, appartient à $BMO(\mathbb{R}^n)$.

Alors le noyau-distribution

$$T(x,y) = \Big[A(x) - A(y) - (x-y).\nabla A(y)\Big] \; S(x,y)$$

définit un opérateur $\mathcal{T}$ borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. De plus la norme de $\mathcal{T}$ ne dépasse pas $C\|\nabla A\|_{BMO} \|\sigma\|_N$ où

$$(14) \qquad \|\sigma\|_N = \sup_{\substack{0 \leq |\alpha| \leq N \\ 0 \leq |\beta| \leq N}} \sup_{x,\xi} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)|(1 + |\xi|)^{|\alpha| - 1}$$

Nous allons esquisser la preuve du théorème 4 en nous restreignant au cas particulier où $n = 2$ et où $\sigma(x,\xi) = m(\xi)$ est une fonction homogène de degré 1 et C^∞ en dehors de 0. On pose alors $a = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} A \in BMO$ et, suivant A. Calderón et R. Coifman, on écrit $g(x) = \mathcal{T} f(x)$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, sous la forme d'un opérateur " pseudo-différentiel bilinéaire " .

$$(15) \qquad g(z) = c \iint e^{i(\alpha+\xi).z} \, \lambda(\alpha,\xi) \, \hat{a}(\alpha) \, \hat{f}(\xi) \, d\alpha \, d\xi$$

avec $\lambda(\alpha,\xi) = \left[m(\xi+\alpha) - m(\xi) - \alpha \frac{\partial m}{\partial \xi} - \bar{\alpha} \frac{\partial m}{\partial \bar{\xi}}\right] \alpha^{-1}$.

L'opérateur bilinéaire défini par (15) fut le prototype des opérateurs paradifférentiels de J.M. Bony (tels qu'ils sont présentés dans [10]). Pour se ramener à ces opérateurs, on introduit la partition de l'unité $1 = \varphi_0(\frac{\alpha}{\xi}) + \varphi_1(\frac{\xi}{\alpha})$ où φ_0 et $\varphi_1 : \mathbb{C} \to [0,1]$ sont C^∞ à support compact, $\varphi_0(z) = 1$ pour $|z| \leq \frac{1}{20}$ et $\varphi_0(z) = 0$ pour $|z| \geq \frac{1}{10}$.

On pose alors $\lambda_0(\alpha,\xi) = \varphi_0(\frac{\alpha}{\xi}) \lambda(\alpha,\xi)$, $\lambda_1(\alpha,\xi) = \varphi_1(\frac{\xi}{\alpha}) \frac{m(\xi+\alpha)}{\alpha}$;

$\lambda_2(\alpha,\xi) = \varphi_1(\frac{\xi}{\alpha}) \frac{m(\xi)}{\alpha}$; $\lambda_3(\alpha,\xi) = \varphi_1(\frac{\xi}{\alpha}) \frac{\partial m}{\partial \xi}(\xi)$ et $\lambda_4(\alpha,\xi) = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \varphi_1(\frac{\xi}{\alpha}) \frac{\partial m}{\partial \bar{\xi}}(\xi)$.

On obtient une décomposition analogue $g = g_o + g_1 + \ldots + g_4$. L'opérateur qui à f associe g_o est un opérateur paradifférentiel tandis que les quatre autres termes se majorent en utilisant les méthodes du chapitre VI de [6] . On obtient alors $\| g_j \|_2 \leq C \| a \|_{BMO} \| f \|_2$ pour $0 \leq j \leq 4$ ce qui termine la démonstration.

3) Le groupe quasi-conforme en une variable réelle

On appelle $\mathcal{G}$ le groupe des homéomorphismes croissants $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, préservant les ensembles de mesure nulle et tels que, pour toute fonction $f \in BMO$, $f \circ h$ appartienne à BMO. Alors $\mathcal{G}$ est caractérisé par le théorème suivant de P. Jones : $h \in \mathcal{G}$ si et seulement si $h'(x) = \omega(x) \in A_\infty$ (la dérivée est prise au sens des distributions et A_∞ est la classe de Muckenhoupt définie dans [4]).

Il en résulte que $\log h' \in BMO$ et que l'application linéaire $V_h : BMO \to BMO$ définie par $V_h(f) = f \circ h$ est un isomorphisme lorsque $h \in \mathcal{G}$.

Réciproquement, il existe une constante $\gamma > 0$ et une constante $C > 0$ telles que, si $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartient à BMO et si $\| b \|_{BMO} \leq \gamma$, alors $h(x) = \int_0^x \exp b(t)\, dt$ appartient à $\mathcal{G}$ et $\| V_h \| \leq C$, $\| V_h^{-1} \| \leq C$; les normes en question sont celles des opérateurs correspondants de BMO dans lui-même.

On a alors, en désignant par H la transformation de Hilbert,

Théorème 5 : Il existe une constante C telle que, pour tout $h \in \mathcal{G}$, on ait $\| U_h H U_h^{-1} - H \| \leq C \| \log h' \|_{BMO}$.
Plus précisément l'ensemble des fonctions $\log h'$, $h \in \mathcal{G}$, est une partie ouverte $\Omega \subset BMO$ et l'application qui à $\log h' \in \Omega$ associe $U_h H U_h^{-1}$ est une fonction analytique sur Ω, à valeurs dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$.

Le théorème 5 est démontré dans [7] . Donnons cependant le principe de la preuve de la première partie.

Pour vérifier l'inégalité en question, il suffit de se restreindre au cas où $\| \log h' \|_{BMO} \leq \gamma$ (car la norme d'opérateur du nombre de gauche est ≤ 2

et l'on choisira $C \geqslant \frac{2}{\gamma}$).

On peut donc, si $0 \leqslant t \leqslant 1$, définir $h_t \in \mathcal{G}$ par $\log h'_t = t \log h'$. On a $\frac{\partial}{\partial t} h_t = A_t \circ h$ avec $\frac{\partial}{\partial x} A_t = b \circ h_t^{-1}$, $b = \log h' \in \mathrm{BMO}$. On notera la ressemblance entre ces identités et celles obtenues par Ahlfors dans le cas des applications quasi-conformes. Ce qui est naturel car les applications quasi-conformes sont les changements de variable préservant BMO (Reimann[12]).

Finalement on pose $U_t = U_{h_t}$ et on montre, en reprenant mot à mot la preuve du théorème 1, que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} U_t \; H \; U_t^{-1} \right\| \leqslant C \; \| \log h' \|_{\mathrm{BMO}}.$$

4) <u>Le théorème de David et Journé</u>

Pour tout homéomorphisme croissant $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ préservant les ensembles de mesure nulle, appelons $\delta(h)$ la norme de l'opérateur $U_h \; H \; U_h^{-1} - H : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

Cet opérateur est une fonction analytique de $b = \log h' \in \mathrm{BMO}$. On montre aisément que la dérivée de Gâteaux à l'origine de cette fonction analytique est un opérateur $T_1(b) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ dont la norme d'opérateur est comprise entre $C_1 \; \|b\|_{\mathrm{BMO}}$ et $C_2 \; \|b\|_{\mathrm{BMO}}$ $(C_2 > C_1 > 0)$. Il en résulte l'existence de deux constantes $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ telles que $\| \log h' \|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \varepsilon$ implique $\delta(h) \geqslant \eta \; \| \log h' \|_{\mathrm{BMO}}$.

Ces résultats suggèrent deux problèmes.

D'une part quel est le rôle joué par le groupe $\mathcal{G}$? Peut-on avoir $\delta(h)$ petit pour des homéomorphismes n'appartenant pas à $\mathcal{G}$? Second problème : quel est le rôle joué par la condition $\| \log h' \| \leqslant \varepsilon$ dans la minoration de $\delta(h)$?. Cette deuxième question se pose même si $h \in \mathcal{G}$.

<u>Théorème 6</u> : <u>Il existe deux constantes</u> $\delta > 0$ <u>et</u> $C > 0$ <u>telles que si</u> $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>est un homéomorphismes croissant, préservant les ensembles de mesure nulle, la la condition</u> $\| U_h \; H \; U_h^{-1} - H \| \leqslant \delta$ <u>implique</u> $\log h' \in \mathrm{BMO}$ <u>et</u>

$$\| \log h' \|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C \; \| U_h \; H \; U_h^{-1} - H \| . \tag{16}$$

Démontrer l'inégalité (16) revient à prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que $\| \log h' \|_{BMO} \geq \varepsilon$ (ou $h \notin \mathcal{G}$) implique $\| U_h H U_h^{-1} - H \| \geq \eta$.

A cet effet, nous rappelons la caractérisation de BMO donnée par J.O. Strömberg dans [13] .

Proposition 2 : Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Supposons qu'il existe une constante $T \geq 0$ et, pour tout intervalle I, un nombre réel λ_I tel que

$$\text{Prob}\left\{ x \in I \; ; \; |b(x) - \lambda_I| \geq T \right\} \leq \frac{1}{3}. \tag{17}$$

Alors $b \in BMO$ et $\| b \|_{BMO} \leq CT$, C étant une constante absolue.

Supposons que b n'appartienne pas à BMO. Cela entraîne l'existence d'une suite I_k d'intervalles et de constantes réelles λ_k telles que $\text{Prob}\left\{ x \in I_k \; ; \; b(x) \geq \lambda_k + k \right\} \geq \frac{1}{8}$ et $\text{Prob}\left\{ x \in I_k \; ; \; b(x) \leq \lambda_k - k \right\} \geq \frac{1}{8}$.

On désigne par l_k la longueur de I_k et par J_k (ou J'_k) l'intervalle $I_k - 2l_k$ (ou $I_k + 2l_k$).

Le noyau distribution de $U_h H U_h^{-1}$ est la fonction localement intégrable sur le complémentaire de la diagonale $A(x,y) = \dfrac{h'(x)^{1/2} \, h'(y)^{1/2}}{\pi (h(x) - h(y))}$ tandis que celui de H est $\dfrac{1}{\pi (x-y)}$.

On désigne par $E_k \subset I_k$ l'ensemble défini par $b(x) \geq \lambda_k + k$ et par $F_k \subset I_k$ celui défini par $b(x) \leq \lambda_k - k$. On choisit pour tester les opérateurs H et $U_h H U_h^{-1}$ l'une des quatre fonctions indicatrices de $E_k \cap [a_k, c_k]$, $F_k \cap [a_k, c_k]$, $E_k \cap [c_k, b_k]$ ou $F_k \cap [c_k, b_k]$ pour un certain $c_k \in [a_k, b_k]$.

On examine le résultat obtenu sur J_k ou J'_k et, par une analyse précise, Journé et David démontrent que $\| U_h H U_h^{-1} - H \| \geq \varepsilon > 0$ où ε est une constante absolue.

Si maintenant $\log h' \in BMO$ mais $\| \log h' \|_{BMO} \geq \eta > 0$, Journé et David démontrent que la norme d'opérateur de $U_h H U_h^{-1} - H$ est minorée par $\varepsilon(\eta) > 0$. Pour cela, ils reprennent l'analyse précédente en posant cette fois $J_k = I_k - Nl_k$, $J_k = I_k + Nl_k$ et en choisissant $N = N(\eta)$ assez grand [9] .

5) Application à l'étude des espaces de Hardy et du problème de Caldéron

Soit Γ une courbe orientée, rectifiable du plan complexe, sans point double et partageant $\mathbb{C}$ en deux composantes connexes et ouvertes Ω_1 et Ω_2, Ω_1 étant "à gauche de Γ" .

Nous paramètrerons Γ par la longueur d'arc, notée s, et désignerons par $z(s)$, $s \in \mathbb{R}$, cette représentation paramétrique.

Alors l'application $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de la forme $z(s) = z(o) + \int_o^s \exp ib(u)du$ par une certaine fonction mesurable réelle b ; de plus z est injective et propre ($\lim\limits_{s \to \pm\infty} |z(s)| = +\infty$.

Soient P_1 le demi-plan supérieur et P_2 le demi-plan inférieur. On appelle $\Phi_1 : P_1 \to \Omega_1$ une représentation conforme qui se prolonge en un homéomorphisme (encore noté Φ_1) de $\bar{P}_1$ sur $\bar{\Omega}_1$ compatible avec l'orientation des bords. Naturellement $\Phi_1 \circ \alpha$, $\alpha(z) = az + b$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ est l'ensemble des autres choix possibles pour Φ_1. On définit donc l'homéomorphisme croissant $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $h_1(s) = x$ si $\Phi_1(x) = z(s)$ ou encore par $\Phi_1(h_1(s)) = z(s)$, $s \in \mathbb{R}$.

On définit de même h_2 à l'aide de P_2 et de $\Phi_2 : P_2 \to \Omega_2$. Venons-en aux espaces de Hardy $H^2(\Omega_1)$ et $H^2(\Omega_2)$. On écrit $F_1 \in H^2(\Omega_1)$ si $F_1 : \Omega_1 \mapsto \mathbb{C}$ est holomorphe et si $F_1 \circ \Phi_1 \sqrt{\Phi'_1}$ appartient à l'espace de Hardy usuel $H^2(P_1)$.

On définit de même l'espace de Hardy $H^2(\Omega_2)$ et les structures canoniques d'espace de Hilbert sur $H^2(\Omega_1)$ et $H^2(\Omega_2)$ sont obtenues, par transport de structure, à partir de celles de $H^2(P_1)$ et $H^2(P_2)$.

Pour décrire les opérateurs de traces $\theta_1 : H^2(\Omega_1) \to L^2(\Gamma)$ et $\theta_2 : H^2(\Omega_2) \mapsto L^2(\Gamma)$ quelques remarques supplémentaires sont nécessaires :

On a $\Phi_1(h_1(s)) = s(s)$ et l'extension de Φ_1 au bord est absolument continue sur $\mathbb{R}$. On a donc $\Phi'_1(h_1)\, h'_1(s) = z'(s)$ et $b(s)$ est donc également l'argument de $\Phi'_1 \circ h_1$.

Soit $F_1 \in H^2(\Omega_1)$; $F_1 \circ \Phi_1 \sqrt{\Phi_1'} \in H^2(P_1)$ et, à ce titre, possède une trace sur la droite réelle que l'on notera $f_1 \in H^2$.

Alors on pose $\theta_1(F_1)(s) = e^{-ib(s)/2}\, H_{h_1}(f_1)(s)$ et l'on vérifie sans peine que cette définition coïncide avec la trace au sens usuel si F_1 est une fraction rationnelle, nulle à l'infini, dont les pôles appartiennent à Ω_2. On peut donc énoncer

Lemme 1 : Avec les notations ci-dessus, on appelle $M : L^2(\mathbb{R}) \mapsto (\mathbb{R})$ l'opérateur unitaire de multiplication par $\exp(-ib(s)/2)$. Alors les traces dans $L^2(\Gamma) = L^2(ds)$ des espaces de Hardy $H^2(\Omega_1)$ et $H^2(\Omega_2)$ sont $M\, U_{h_1}(H^2)$ et $M\, U_{h_2}(\bar{H}^2)$; ceci en appelant $H^2 \subset L^2(\mathbb{R})$ l'espace de Hardy usuel et $\bar{H}^2$ son orthogonal dans $L^2(\mathbb{R})$.

Le problème de Calderón est de savoir si $L^2(\Gamma) = \theta_1(H^2(\Omega_1)) + \theta_2(H^2(\Omega_2))$ c'est-à-dire si toute fonction $f : \Gamma \mapsto \mathbb{C}$, appartenant à $L^2(ds)$ s'écrit, de façon unique, comme somme des valeurs au bord d'une fonction $F_1 \in H^2(\Omega_1)$ et d'une fonction $F_2 \in H^2(\Omega_2)$. Une formation équivalente est de savoir si

(18) $$L^2(\mathbb{R}) = U_{h_1}(H^2) + U_{h_2}(\bar{H}^2).$$

Pour étudier ce problème, on se sert du lemme suivant dont la démonstration est laissée au lecteur.

Lemme 2 : Soient E un espace de Hilbert, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels fermés de E et π_1 (et π_2) les opérateurs de projection orthogonale sur E_1 (et E_2). Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes

(19) $$E = E_1 + E_2 \qquad \text{(somme directe topologique)}$$

(20) $$\| I - \pi_1 - \pi_2 \| < 1 .$$

Pour revenir au problème de Calderón, nous ne disposons pas encore de moyens techniques assez précis pour vérifier (20). La seule chose que nous sachions faire est de prouver l'existence d'une constante absolue C telle que $\| I - \pi_1 - \pi_2 \| \leq C \, \| b \|_{BMO}$ ce qui assure (20) dès que $\| b \|_{BMO}$ est suffisamment petit ; c'est-à-dire dès que Γ vérifie la condition "corde-arc de type ε"

suivante $|z(s') - z(s)| \leqslant (1+\varepsilon)\ |s' - s|$ et dès que $\varepsilon \geqslant 0$ est assez petit.

En effet, avec les notations ci-dessus, $\pi_1 = U_{h_1} \frac{I + i\mathcal{H}}{2} U_{h_1}^{-1}$ et $\pi_2 = U_{h_2} \frac{I - i\mathcal{H}}{2} U_{h_2}^{-1}$. Finalement

$$(21)\quad \| I - \pi_1 - \pi_2 \| \leqslant \frac{1}{2} \| H - U_{h_1} H U_{h_1}^{-1} \| + \frac{1}{2} \| H - U_{h_2} H U_{h_2}^{-1} \|$$

et il suffit d'appliquer le théorème 5 et les inégalités

$$\| \log h_1' \|_{BMO} \leqslant C \| b \|_{BMO}\ ,\ \| \log h_2' \|_{BMO} \leqslant C \| b \|_{BMO}$$

(elles-mêmes vérifiées dès que $\| b \|_{BMO}$ est assez petit).

En sens inverse, David et Journé d'une part, Zinsmeister d'autre part ont prouvé (par des méthodes différentes) le résultat suivant

Théorème 7 : Avec les notations ci-dessus, il existe deux constantes $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ telles que $\| \pi_1 + \pi_2 - I \| \leqslant \varepsilon$ entraîne que la courbe Γ vérifie la condition corde-arc et que, plus précisément $z'(s) = \exp i\, b(s)$ avec $\| b \|_{BMO} \leqslant C \| \pi_1 + \pi_2 - I \|$.

6) Retour au théorème 1

Nous venons de voir que, pour certains opérateurs pseudo-différentiels T, l'estimation fondamentale $\| U_h T U_h^{-1} - T \| \leqslant C \| h - I \|_{Lip}$ peut être améliorée. Par ailleurs la preuve du théorème 1 montre que C est uniformément bornée lorsque le symbole de T parcourt une partie bornée de $S^0_{1,0}$. Mais alors l'inégalité inverse est également vraie. Plus précisément supposons que l'on considère tous les opérateurs pseudo-différentiels T d'ordre 0 de la forme $(I - \Delta + \sum_1^n \sum_1^n c_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j})^{i\gamma}$ où les $c_{i,j}$ sont des constantes réelles vérifiant $|c_{i,j}| \leqslant \varepsilon$ et où $-1 \leqslant \gamma \leqslant 1$; $\varepsilon > 0$ est assez petit pour que la norme de la matrice $((c_{i,j}))$ ne dépasse pas 1/2. Alors on montre sans difficulté l'existence de deux constantes $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ telles que, pour tout difféomorphisme (préservant l'orientation) $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on ait $\| h - I \|_{lip} \leqslant C \sup \| U_h T U_h^{-1} - T \|$ dès que cette borne supérieure (calculée sur les opérateurs définis ci-dessus) ne dépasse pas ε.

Cela signifie que le théorème 1 est le meilleur possible et que la topologie de $\mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$ est exactement celle qui contrôle les perturbations (calculées en norme d'opérateur) de $U_h\ T\ U_h^{-1}$ lorsque $T \in \mathrm{Op}\ S^0_{1,0}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ahlfors L. : Lectures on quasi-conformal mappings, Van Nostrand Mathematical Studies (1966).

[2] Calderón A.P. : Commutators of singular integral operators , Proc. Nat. Acad. Sc. USA 53 (1965 1092-1099.

[3] Calderón A.P. : Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators. Proc. Nat. Sc. USA 74 (1977 1324-1327.

[4] Coifman R., Fefferman Ch. : Weighted norm inegalities for maximal functions and singular integrals, Studia Math. (1974) 241-250.

[5] Coifman R., Meyer, Y. : Commutateurs d'intégrales singulières et opérateurs multilinéaires, Ann. Inst. Fourier, (1978) XXVIII (3).

[6] Coifman R., Meyer, Y. : Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels , Astérisque n° 57, S.M.F., (1978).

[7] Coifman, R., Meyer, Y. : Une généralisation de théorème de Calderón sur l'intégrale de Cauchy, Publications of the Associacion Matematica Espanola, El Escorial (17-23 Juin 1979).

[8] Coifman, R., Rochberg, R., Weiss, G. : Factorization theorems for Hardy spaces in several complex variables, Ann. of Math. 103 (1976) 611-635.

[9] David, G., Journé, J.L. : Thèses de troisième cycle (équipe d'Analyse thermique, 91405 ORSAY).

[10] Meyer, Y. : Remarques sur un théorème de Bony. Annales du Congrès de Pise, Avril 1980.

[11] Pommerenke, C. : Schlichte Funktionen und BMOA ,Comm. Math. Helv. (1978).

[12] Reimann, H., Rychner, T. : Funktionen beschrankter mittlerer oszillation , Lecture Notes 487 (1975).

[13] Strömberg, J.O. : Bounded mean oscillation with Orlicz norms and duality of Hardy spaces ,Institut Mittag Leffler Report n° 4, 1975.

[14] Zinsmeister, M. : Thèse de troisième cycle , Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique (Février 1981).

[15] Zygmund, A. : Intégrales singulières , Lecture Notes 204 (1971).

Exposé n° X

ERRATA :

page X.3, ligne 2, lire $\varepsilon \in [0,1[$

" " ligne 18, lire "conjecture" (au lieu de conjoncture)

page X.5, ligne 13, lire "application" (au lieu d'applicateur)

page X.6, ligne 29, lire "la constante C est une constante absolue et ..."

page X.9, ligne 7, lire "$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$" (au lieu de $h : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$)

page X.10, ligne 21, lire "$\| \log h' \|_{BMO}$" (au lieu de $\| \log h' \|$)

page X.12, ligne 7, lire " Alors l'application $Z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de la forme $Z(s) = Z(o) + \int_o^s \exp ib(u)\, du$ pour une certaine ...."

page X.12, ligne 9, lire "($\lim_{s \to \pm\infty} |Z(s)| = +\infty$)"

" " ligne 24, lire " On a $\Phi_1(h_1(s)) = z(s)$ et "

page X.13, ligne 1, lire " $F_1 \circ \Phi_1 \sqrt{\Phi_1'}$ "

page X.14, lignes 2 et 3, lire " $\frac{I + iH}{2}$ " (au lieu de $\frac{I + i\mathcal{H}}{2}$) et " $\frac{I - iH}{2}$ " (au lieu de $\frac{I - i\mathcal{H}}{2}$)

page X.14, lignes 23 et 26, remplacer ε par α

page X.15, ligne 23, lire " Analyse harmonique " (au lieu de Analyse thermique)!