Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

P. L. Lions

Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. nº 7, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A8_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1979-1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 9 - 1 9 8 0

EQUATIONS DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN

par P. L. LIONS

Exposé n° VII

18 Décembre 1979

INTRODUCTION

Le problème étudié est la résolution de

$$(1) \qquad \begin{cases} \sup_{v \in V} \{A(v)u(x) - f(x,v)\} = 0 \quad \text{p.p. dans } \mathcal{O}, \\ \qquad\qquad u = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O} \ ; \end{cases}$$

où $\mathcal{O}$ est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$, où $(A(v))_{v \in V}$ est une famille d'opérateurs elliptiques du 2ème ordre pouvant dégénérer dépendant d'un paramètre $v \in V$ (ensemble fixé) et où $f(x,v)$ sont des données.

Ce problème intervient en théorie du contrôle stochastique et nous décrivons dans la section I le problème de contrôle stochastique associé à (1), puis nous donnons dans la section II les principaux résultats de résolution.

Les problèmes du type (1) ont été tout d'abord étudiés par N. V. Krylov qui a montré dans quelques cas particuliers importants ($\mathcal{O} = \mathbb{R}^N$, $N = 2$) l'existence d'une solution : voir [12] , [13], [14] . D'autres résultats partiels sont donnés dans H. Brézis et L. C. Evans [3], P. L. Lions [16], L. C. Evans et A. Friedman [5] , P. L. Lions et J. L. Menaldi [22] , M. V. Safonov [25] et [26] . Les résultats généraux de résolution sont donnés dans [17], [18], et [19] : en [17] le cas uniformément elliptique est résolu par des méthodes d'Equations aux Dérivées Partielles, en [18] le cas $\mathcal{O} = \mathbb{R}^N$ est traité par des techniques probabilistes ; enfin le cas général est obtenu en [19] par une "combinaison" de ces arguments.

Les équations (1) sont appelées équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (1) (HJB en abrégé). Indiquons enfin que des résultats variés existent sur les équations de HJB : résultats d'existence dans des problèmes dégénérés ([16], R. Jensen et P. L. Lions [10]); l'étude des équations de Hamilton-Jacobi (citons, par exemple, S. N. Kružkov [11] , S. H. Benton [1] et [20]); la détermination du contrôle stochastique optimal (A. Friedman et P. L. Lions [7]); Formule de Trotter et équations de HJB [21] ; l'approximation numérique des équations de HJB (P. L. Lions et B. Mercier [23]) ; l'interprétation des équations de Monge-Ampère comme équations de HJB (B . Gaveau [8])..

§ 1. PRESENTATION DU PROBLEME

I.1 Notations et hypothèses

Soient $\sigma_{ij}(x,v)$, $b_i(x,v)$, $c(x,v)$, $f(x,v)$ $(1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq n)$ des fonctions continues de $\bar{\mathcal{O}} \times V$ dans $\mathbb{R}$, où V est un ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^p$ (2).

---

(1) Cette terminologie sera justifiée plus loin.

(2) Cette hypothèse sur V peut être considérablement affaiblie.

On suppose que ces fonctions vérifient :

(2) $\varphi(.,v) \in W^{2,\infty}(\mathcal{O})$ et $\sup_{v \in V} \|\varphi(.,v)\|_{W^{2,\infty}(\mathcal{O})} < \infty$, pour $\varphi = \sigma_{ij}, b_i, c, f$;

(3) $c(x,v) \geqslant 0$, pour x dans $\bar{\mathcal{O}}$ et v dans V ;

et on note $\lambda = \inf\limits_{x,v} c(x,v)$.

On note $a(x)$ la matrice suivante : $a(x,v) = \frac{1}{2}\sigma\sigma^T$; et $A(v)$ l'opérateur suivant :

$$A(v) = - \sum_{i,j} a_{ij}(x,v) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x,v) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x,v) .$$

I,2 <u>Le problème de contrôle stochastique</u>

Soit (Ω, F, F_t, P, W) un espace de probabilité muni d'un brownien n-dimensionnel.

L'état du système (que l'on veut contrôler) est g déterminé par la solution $y_x(t)$ de l'Equation Différentielle Stochastique suivante :

(4) $$\begin{cases} dy_x(t) = \sigma(y_x(t), v(t))dW_t - b(y_x(t), v(t))dt, \\ y_x(0) = x \in \bar{\mathcal{O}} ; \end{cases}$$

où $v(t,\omega)$ est un processus non anticipatif à valeurs dans V : $v(t)$ est la variable de contrôle.

On définit une fonction coût $J(x,v(.))$:

(5) $$J(x,v(.)) = E\left[\int_0^{\tau_x} f(y_x(s),v(s)) \exp\left(-\int_0^s c(y_x(t),v(t))dt\right) ds\right] ;$$

où τ_x est le temps de sortie du processus $y_x(t)$ hors de $\bar{\mathcal{O}}$.

La fonction coût optimum est alors définie par :

(6) $$u(x) = \inf_{v(.)} J(x,v(.)).$$

Le raisonnement heuristique de la programmation dynamique (dû à R. Bellman) indique que u doit être solution de (1). Ceci peut être facilement vérifié (en utilisant la formule de Itô) si l'on sait a priori que $u \in C^2(\mathcal{O}) \cap C(\bar{\mathcal{O}})$ (voir W. H. Fleming et R. Rishel [6]). Mais bien évidemment il n'y a aucune raison a priori pour que u donnée par (6) soit de classe C^2 et en fait ceci est en général faux.

Le but de ce qui suit est de montrer que, néanmoins, sous des hypothèses générales, u est solution de (1) (dans un sens convenable, cf. Théorème 1 de la section II), unique (dans une classe convenable, cf. Théorème 2 de la section II).

La résolution de (1) permet également (en général) la construction de <u>contrôles markoviens</u> optimaux, ce qui résoud le problème de contrôle stochastique.

I.3 <u>Quelques remarques sur la nature du problème (1)</u>

Le problème (1) est un problème elliptique, fortement non linéaire : la non linéarité porte sur les dérivées secondes. Ainsi les résultats de résolution de (1) permettent de traiter les problèmes elliptiques du type :

$$\text{(7)}\qquad \begin{cases} H\,(D^2u, Du, u, x) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}\,, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}\,; \end{cases}$$

dès que H est convexe en (D^2u, Du, u).

Remarquons également que si H ne dépend que de Du, u et x et si H est strictement convexe, (7) se réduit alors aux équations de Hamilton-Jacobi du 1er ordre.

§ 2. <u>RESOLUTION DE (1)</u>

<u>Théorème 1</u> : <u>Sous les hypothèses</u> (2), (3) <u>et si de plus on suppose</u>

$$\text{(8)}\qquad a(x,v) \geqslant \nu\, I_N{}^{(1)}\ , \ \underline{\text{pour}}\ (x,v) \in \partial\mathcal{O}\times V\ , \ \underline{\text{où}}\quad \nu > 0\ ;$$

$$\text{(9)}\qquad \lambda > \lambda_0\ ,$$

<u>où</u> λ_0 <u>dépend explicitement des normes</u> L^∞ <u>des dérivées d'ordre</u> 1 <u>et</u> 2 <u>de</u> σ <u>et</u> b ; <u>alors</u> u(x) (<u>définie par</u> (6)) <u>appartient à</u> $W^{1,\infty}(\mathcal{O})$ <u>et vérifie</u>

$$\text{(10)}\qquad A(v)u\ \ \underline{\text{demeure dans un borné de}}\ L^\infty(\mathcal{O}),\ \underline{\text{pour}}\ v\ \underline{\text{dans}}\ V\ ,$$

(1) au sens des matrices symétriques.

(11) $$\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} \leq C \quad \underline{\text{dans}} \quad \mathcal{D}'(\mathcal{O}), \ \underline{\text{pour tout}} \ \chi : |\chi| = +1 \ , \ \text{avec } C > 0 \ ,$$

(1) $$\begin{cases} \sup\limits_{v \in V} \{A(v)u - f(v)\} = 0 \quad \text{p.p. dans } \mathcal{O} \\ \qquad\qquad u = 0 \quad \underline{\text{sur}} \ \partial\mathcal{O} \ . \end{cases}$$

Avant de faire quelques remarques et commentaires sur ce résultat d'existence, donnons un résultat d'unicité et un résultat de régularité.

<u>Théorème 2</u> : <u>Sous les hypothèses</u> (2), (3), (8) <u>et si</u> $\lambda > 0$, <u>alors si</u> on suppose <u>qu'il existe</u> w <u>dans</u> $W_0^{1,\infty}(\mathcal{O})$ <u>satisfaisant</u>

$$A(v)w \leq f(v) \quad \underline{\text{dans}} \quad \mathcal{D}'(\mathcal{O}), \ \underline{\text{pour tout}} \ v \ \underline{\text{dans}} \ V \ ,$$

<u>alors</u> $w \leq u$.

<u>Si on suppose de plus</u> que w <u>satisfait</u> (10), (1) <u>et</u>

(11') $$\Delta w \leq g \quad \underline{\text{dans}} \quad \mathcal{D}'(\mathcal{O}), \ \underline{\text{pour}} \ g \ \underline{\text{dans}} \ L^N_{loc}(\mathcal{O}) \ ;$$

<u>alors</u> $w = u$.

<u>Théorème 3</u> : <u>Sous les hypothèses du Théorème</u> 1 <u>et si de plus on suppose qu'il</u> existe <u>un ouvert</u> $I \subset \mathcal{O}$, <u>une constante positive</u> ν et un entier m <u>tels que</u>

(12) $$\begin{cases} \underline{\text{pour tout}} \ x \ \underline{\text{dans}} \ I, \ \underline{\text{il existe}} \ (v_1,\dots,v_m) \in V^m, (\theta_1,\dots,\theta_m) \in \,]0,1[^m \\ \underline{\text{vérifiant}} \ : \ \sum\limits_i \theta_i = +1 \ \text{ et } \sum\limits_i \theta_i \, a(x,v_i) \geq \nu I_N \ , \end{cases}$$

<u>alors</u> $u \in W^{2,\infty}(I)$.

<u>Remarque 1</u> : Si $\mathcal{O} = \mathbb{R}^N$, les Théorèmes 1-3 restent vrais sans supposer (8). Il convient de noter que l'hypothèse (8) est une hypothèse de non dégénerescence uniquement sur le bord de l'ouvert : une hypothèse de ce genre est évidemment nécessaire puisque l'on prescrit la nullité de u sur $\partial\theta$.

<u>Remarque 2</u> : Si σ et b ne dépendent pas de x, alors $\lambda_0 = 0$.

<u>Remarque 3</u> : Si on considère le problème de Cauchy pour les équations de HJB, c'est à dire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sup_{v\in V}\{A(t,v)u - f(t,x,v)\} = 0 \quad \text{p.p. dans } \mathcal{Q},$$
$$u(t,x) = 0 \quad \text{sur } [0,T]\times\partial\mathcal{O},$$
$$u(0,x) = u_0(x),$$

les théorèmes 1-3 s'étendent facilement à ce cas, l'hypothèse (9) devenant inutile.

Remarque 4 : L'hypothèse (9) en toute généralité semble optimale au vu du contre-exemple de Genis et N. V. Krylov [9] pour $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ $(N = +1)$. Il y est montré sur un exemple explicite que pour $\lambda \leqslant \lambda_0$, il existe v_0 dans V tel que $A(v_0)u$ soit une mesure contenant une masse de Dirac ce qui entraîne non seulement que (10) n'est plus vérifiée mais que (1) n'est plus satisfaite (même au sens des mesures).

Cependant dans le cas uniformément elliptique ($A(v)$ uniformément elliptique, uniformément en v) nous conjecturons que (10) n'est plus nécessaire (des résultats partiels dans cette direction sont donnés dans [16], [17]).

Remarque 5 : La régularité de u que donnent les Théorèmes 1 et 3 est, en toute généralité, optimale au vu d'exemples simples (cf. [18]).

Cependant, là encore, dans le cas uniformément elliptique (où, d'après le Théorème 3, $u \in W^{2,\infty}(\mathcal{O})$) nous conjecturons qu'en fait

$$u \in W^{3,p}(\mathcal{O}) \qquad (\forall\, p < \infty).$$

Un résultat très partiel dans ce sens est donné dans H. Brézis et L. C. Evans [3].

Remarque 6 : La première partie du Theorème 2 indique que u est sous-solution maximum de (1) et donc en particulier solution maximum de (1).

La condition (11') peut être généralisée en remplaçant Δ par tout opérateur uniformément elliptique du 2ème ordre à coefficients réguliers.

Le Théorème 2 implique en particulier :

i) dans le cas uniformément elliptique, l'unicité d'une solution u de (1) dans $W^{2,\infty}(\mathcal{O})$ (ceci peut d'ailleurs directement s'obtenir par le principe du maximum de J. M. Bony [2], cf[17]).

ii) dans le cas général, l'unicité de solution u de (1) vérifiant (11).

La condition (11) est connue comme étant optimale dans le cas particulier des équations de Hamilton-Jacobi du 1er ordre (cf. S. N. Kružkov [11], Douglis [4]).

Remarquons à ce propos que dans ce cas, à savoir (considérons par exemple le cas parabolique) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(\nabla u) = 0$$

cette équation est équivalente à (en posant $p = \nabla u$) :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(H(p)) = 0 \ ,$$

système du type "lois de conservation".

Et on peut montrer que si $\mathcal{O} = \mathbb{R}$, alors bien sûr (11) équivaut à (11') mais (11) équivaut à la condition d'entropie introduite par O. A. Oleinik [24] ou P. D. Lax [15] .

En dimension supérieure à (1), (11') est une généralisation sensible de la condition (11).

Les démonstrations des Théorèmes 1-3 peuvent être trouvées dans [17], [18],[19] : en [17] le cas uniformément elliptique est traité par des méthodes d'E.D.P. en [18] le cas $\mathcal{O} = \mathbb{R}^N$ (et dégénérescence totale) par des techniques probabilistes, tandis qu'en [19] le cas général est résolu par une combinaison d'arguments analytiques et probabilistes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. H. Benton : The Hamilton-Jacobi equation : A global approach. Academic Press, New York, 1977.

[2] J. M. Bony : Principe du maximum dans les espaces de Sobolev. C. R. Acad. Sc. Paris, 265 (1967), p.333-336.

[3] H. Brézis et L. C. Evans : A variational approach to the Bellman-Dirichlet equation for two elliptic operators. Arch. Rat. Mech. Anal., 71 (1979),p.1-14.

[4] A. Douglis : Solutions in the large for multi-dimensional non-linear partial differential equations of first order. Ann. Inst. Fourier, Grenoble,15 (1965),p.1-35.

[5] L. C. Evans et A. Friedman : Optimal stochastic switching and the Dirichlet problem for the Bellman equation. A paraître dans Trans. Amer. Math. Soc.

[6] W. H. Fleming et R. Rishel : Deterministic and stochastic optimal control. Springer Verlag, New York, 1975.

[7] A. Friedman et P. L. Lions : The optimal strategy in the control problem associated with the Hamilton-Jacobi-Bellman equation. A paraître au S.I.A.M. J. of control.

[8] B. Gaveau : Méthodes de contrôle optimal en analyse complexe I. Résolution d'équations de Monge-Ampère. J. Funct. Anal., 25 (1977), p.391-411.

[9] I. L. Genis et N. V. Krylov : An example of a one dimensional controlled process. Th. Proba. Appl. , 21 (1976), p.148-152.

[10] R. Jensen et P. L. Lions : A paraître.

[11] S. N. Kružkov : Generalized solutions of equations of the Eikonal type I. Math. Sbornik, 27 (1975), p.406-446.

[12] N. V. Krylov : On control of the solution of a stochastic integral equation. Th. Proba. Appl., 17 (1972), p.114-131.

[13] N. V. Krylov : On control of the solution of a stochastic integral equation with degeneration. Math. U.S.S.R. Izv., 6 (1972), p.249-262.

[14] N. V. Krylov : On equations of minimax type in the theory of elliptic and parabolic equations in the plane. Math. U.S.S.R. Sbornik; vol.10 (1970), p.1-19.

[15] P. D. Lax : Nonlinear hyperbolic systems of conservation laws, In Nonlinear problems. Univ. Wisconsin Press, Madison, 1963.

[16] P. L. Lions : Some problems related to the Bellman-Dirichlet equation for two operators. A paraître aux Comm. P. D. E.; voir aussi MRC report, Univ. of Wisconsin-Madison, ≠1816, 1978 et thèse 3ème cycle, Paris, 1978.

[17] P. L. Lions : Résolution analytique des problèmes de Bellman-Dirichlet. Soumis aux Acta Mathematica ; voir aussi C. R. Acad. Sc. Paris, 287 (1978), p.747-750 et thèse d'Etat, Paris, 1979.

[18] P. L. Lions : Control of diffusion processes in $\mathbb{R}^N$. Soumis aux Comm. Pure Appl. Math. ; voir aussi C. R. Acad. Sc. Paris, 288 (1979), p.339-342 et thèse d'Etat, Paris, 1979.

[19] P. L. Lions : Degenerate Hamilton-Jacobi-Bellman equations with Dirichlet boundary conditions. A paraître ; voir aussi C. R. Acad. Sc. Paris, 289 (1979), p.329-332 et thèse d'Etat, Paris, 1979.

[20] P. L. Lions : Some remarks on Hamilton-Jacobi equations. A paraître.

[21] P. L. Lions : Une formule de Trotter pour les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman. A paraître dans Calcolo.

[22] P. L. Lions et J. L. Menaldi : Control of stochastic integrals and Hamilton Jacobi-Bellman equations. A paraître; voir aussi C. R. Acad. Sc. Paris, 287 (1978), p.409-412 et thèse d'Etat (J. L. Menaldi), Paris, 1980.

[23] P. L. Lions et B. Mercier : Approximation numérique des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman. A paraître aux R. A. I. R. O. ; voir aussi Thèse d'Etat (P. L. Lions), Paris, 1979.

[24] O. A. Oleinik : The Cauchy problem for nonlinear equations in a class of discontinuous functions, Amer. Math. Soc.Transl.Ser. 2, 48 (1964),p.7-12.

[25] M. V. Safonov : Sur le problème de Dirichlet pour l'équation de Bellman dans un ouvert plan. Math. Sbornik, 102 (144) n° 2 (1977), p.260-279 (en Russe).

[26] M. V. Safonov : Sur le problème de Dirichlet pour l'équation de Bellman dans un ouvert plan. Math. Sbornik, 105 (147) n°4 (1978),p.594-600 (en Russe).

*
* *
*