

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A. VOROS

Oscillateur quartique et méthodes semi-classiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 6, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980__A6_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1979-1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 9 - 1 9 8 0

OSCILLATEUR QUARTIQUE ET METHODES SEMI-CLASSIQUES

par A. VOROS

Nous décrivons ici quelques résultats exacts concernant le spectre de l'oscillateur quartique (l'opérateur différentiel $\hat{H} = C^{4/3} (-\frac{d^2}{dq^2} + q^4)$ sur $L^2(\mathbb{R})$;

$C = \frac{\Gamma(1/4)^2}{3} (\frac{2}{\pi})^{1/2}$ est un facteur de normalisation commode pour nous). Ces

résultats concernent principalement la fonction zeta de l'opérateur :

$\zeta(s) = \sum_0^\infty \lambda_n^{-s}$ (les λ_n sont les valeurs propres par ordre croissant) ; cette

fonction est méromorphe dans \mathbb{C} , et nous pouvons calculer :

- 1) ses pôles et leurs résidus
- 2) ses valeurs aux points $s = -n$ ($n \in \mathbb{N}$).
- 3) sa dérivée à l'origine $\zeta'(0)$
- 4) ses valeurs aux points entiers positifs
- 5) son développement asymptotique pour $s \rightarrow -\infty$

Ces calculs sont également possibles pour la "fonction zeta modifiée"
 $\zeta^P(s) = \sum_0^\infty (-1)^n \lambda_n^{-s}$, ainsi que pour tous les opérateurs $(-\frac{d^2}{dq^2} + q^{2M})$ (M entier non nul). Seul le calcul 5) n'est pour le moment faisable que pour $M \leq 2$.

L'étude de cette fonction $\zeta(s)$ présente un double intérêt :

- Pour $M = 1$ nous avons un oscillateur harmonique, dont la fonction zeta est reliée à celle de Riemann, $\zeta_R(s)$:

$$(1) \quad \zeta(s) = (1 - 2^{-s}) \zeta_R(s)$$

Les résultats 1) - 5) sont alors classiques et importants en analyse et en arithmétique : il est tentant de chercher à les généraliser.

- Les démonstrations (sauf pour 4) font appel à une variété de méthodes semi-classiques que l'on peut exploiter à fond grâce à la simplicité du potentiel q^{2M} ; de ce fait nous accroissons notre compréhension de ces méthodes.

Nous ne donnons ici que les grandes lignes des calculs (pour $M = 2$) les détails ayant déjà été publiés par ailleurs [1 - 3]

I. POLES ET RESIDUS

Soit $\eta(s)$ la transformée de Mellin de la fonction de partition $\theta(t) = \text{Tr} \exp - t\hat{H}$, holomorphe pour $\text{Re } t > 0$: $\eta(s) = \int_0^\infty \theta(t) t^{s-1} dt$. On a la relation classique : $\zeta(s) = \eta(s) / \Gamma(s)$.

Par des méthodes asymptotiques apparentées à celles de [4], on peut déterminer ordre par ordre le développement de $\theta(t)$ pour $t \rightarrow 0^+$:

$$(2) \quad \theta(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{i_n} \quad , \quad i_n = \frac{3}{4}(2n-1)$$

(par ex. : $c_0 = \frac{3}{8\pi} \Gamma(\frac{3}{4})$, $c_1 = -\frac{1}{6} \Gamma(\frac{1}{4}) \dots$)

et en déduire que $\zeta(s)$ est méromorphe dans \mathbb{C} avec des pôles simples aux points $s = -i_n$, de résidus $c_n / \Gamma(-i_n)$. La suite des pôles et des résidus est aussi en correspondance biunivoque avec les termes du développement asymptotique implicite de λ_k pour $k \rightarrow \infty$: il existe en effet un tel développement (ce genre de propriété semble réservé aux problèmes à 1 dimension), qui est donné par une formule de quantification de Bohr-Sommerfeld-Maslov :

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda_k^{-i_n} - 2\pi(k + \frac{1}{2}) \sim 0 \quad (k \rightarrow +\infty),$$

et on a la relation : $b_n = 2\pi c_n / \Gamma(1 - i_n)$.

II. IDENTITES DE TRACE

Les pôles $(-i_n)$ de $\eta(s)$ étant disjoints de ceux de $\Gamma(s)$, la formule $\zeta(s) = \eta(s) / \Gamma(s)$ implique $\zeta(-n) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Ces relations découvertes pour ce problème par Parisi [2] sont comparables à celles étudiées par exemple dans [5]. Exemple d'application au calcul numérique des valeurs propres : en combinant la formule (3), numériquement assez précise dès que n n'est pas trop petit, avec un certain nombre d'identités de trace, on peut obtenir une estimation précise des basses valeurs propres $\lambda_0, \lambda_1, \dots$. Il serait intéressant de savoir si ce processus converge numériquement quand $n \rightarrow \infty$.

III. CALCUL DE $\zeta'(0)$

Le déterminant de Fredholm de \hat{H} : $\Delta(\lambda) = \prod_0^{\infty} (1 - \lambda / \lambda_n)$ est une fonction entière de λ . La formule (2) équivaut au développement :

$$\frac{d}{d\lambda} \log \Delta(\lambda) \sim - \sum_0^{\infty} c_n \Gamma(1+i_n) (-\lambda)^{-1-i_n} \quad (\lambda \rightarrow -\infty).$$

En intégrant soigneusement, il vient [3] :

$$(4) \quad \log \Delta(\lambda) \sim - \sum_0^{\infty} c_n \Gamma(i_n) (-\lambda)^{-i_n} + \zeta'(0)$$

En fait on montre l'identité :

$$(5) \quad \log \Delta(\lambda) - \zeta'(0) + c_0 \Gamma(i_0) (-\lambda)^{-i_0} = \log a(\lambda)$$

où $a(\lambda)$ est le coefficient de transmission à énergie λ , à savoir :

$$(6) \quad a(\lambda) = \lim_{q \rightarrow -\infty} \psi_+(\lambda, q) / [\pi(\lambda, q)^{-1/2} \exp - \int_0^q \pi(\lambda, q') dq']$$

où $\psi_+(\lambda, q)$ est la solution de l'équation différentielle $\hat{H}\psi = \lambda\psi$ telle que

$$\psi_+(\lambda, q) \sim \pi(\lambda, q)^{-1/2} \exp - \int_0^q \pi(\lambda, q') dq' \quad \text{pour } q \rightarrow +\infty$$

$\pi(\lambda, q)$ étant la solution positive de l'équation caractéristique associée $c^{4/3} (-\pi^2 + q^4) = \lambda$.

Pour $\lambda = 0$, on connaît explicitement

$$(7) \quad \psi_+(q) = \left(\frac{2q}{3\pi}\right)^{1/2} K_{1/6}(q^3/3)$$

d'où l'on tire par consultation des tables de fonctions de Bessel : $a(0) = +2$,
et par substitution dans (5) : $\zeta'(0) = -\log 2$.

Nous mentionnons le résultat général pour le potentiel q^{2M} [3] :

$$(8) \quad \zeta'(0) = \log \sin \frac{\pi}{2(M+1)} (= -\log a(0))$$

d'ailleurs indépendant de l'éventuel facteur multiplicatif inclus dans \hat{H} (ceci parce que $\zeta(0) = 0 \quad \forall M$).

IV. VALEURS $\zeta(n)$ POUR n ENTIER POSITIF

Nous prenons ici M quelconque et $\hat{H} = -\frac{d^2}{dq^2} + q^{2M}$. La généralisation de

(7) est :

$$(9) \quad \psi_+(\lambda = 0, q) = \left(\frac{4\mu q}{\pi}\right)^{1/2} K_\mu(2\mu q^{M+1}) \quad \left(\mu = \frac{1}{2(M+1)}\right)$$

$\psi_+(0, q)$ et $\psi_-(0, q) = \psi_+(0, -q)$ sont deux solutions indépendantes de $\hat{H}\psi = 0$, de Wronskien $2a(0) = 2(\sin \pi \mu)^{-1}$ (cf. eq. (8)). On en déduit l'expression du noyau intégral de \hat{H}^{-1} :

$$(10) \quad \hat{H}^{-1}(q, q') = \frac{1}{2a(0)} \psi_+(0, q_+) \psi_-(0, q_-),$$

où $q_\pm = \frac{\max}{\min}(q, q')$.

En convoluant (10) avec lui-même n fois, on fabrique une formule intégrale explicite pour $\zeta(n) = \text{Tr } \hat{H}^{-n}$. Il est plus difficile de mettre le résultat sous forme arithmétique fermée. Les formules intégrales de Weber-Schafheitlin en théorie des fonctions de Bessel impliquent [3] :

$$(11) \quad \zeta(1) = \sum_0^\infty \frac{1}{\lambda_n} = (1 + (\cos 2\mu\pi)^{-1}) \zeta^P(1)$$

et

$$(12) \quad \zeta^P(1) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{\lambda_n} = \frac{\sin \mu\pi}{2\sqrt{\pi}} (2\mu)^{4\mu M} \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(2\mu) \Gamma(3\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + 2\mu)}$$

En collaboration avec D. et G. Chudnovsky nous avons également obtenu [6] :

$$(13) \quad \zeta(2) = \zeta^P(1)^2 + (2\mu)^{8\mu M} \frac{\sin \mu\pi}{4\mu^2 \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(3\mu) \Gamma(4\mu) \Gamma(5\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + 4\mu)} {}_5F_4 \left[\begin{matrix} 4\mu & 2\mu & 3\mu & 5\mu & \frac{1}{2} \\ 1+2\mu & 1+\mu & 1-\mu & \frac{1}{2} + 4\mu & \end{matrix} ; 1 \right]$$

$$\zeta^P(2) = \zeta(2) + (2\mu)^{8\mu M} \frac{\sin \mu\pi}{2^{2\mu} 6\mu \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(-\mu) \Gamma(4\mu) \Gamma(5\mu) \Gamma(6\mu)}{\Gamma(1+\mu) \Gamma(\frac{1}{2} + 5\mu)} {}_5F_4 \left[\begin{matrix} 6\mu & 3\mu & 4\mu & 5\mu & \frac{1}{2} + \mu \\ 1+3\mu & 1+2\mu & 1+\mu & \frac{1}{2} + 5\mu & \end{matrix} ; 1 \right]$$

où

$${}_5F_4 \left(\begin{matrix} a & b & c & d & e \\ b' & c' & d' & e' & \end{matrix} ; z \right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(e+n-1)z^n}{n!b'(b'+1)\dots(b'+n-1)c'(c'+1)\dots(e'+n-1)}$$

(série hypergéométrique généralisée [7]).

V. DEVELOPPEMENT DE $\zeta(s)$ POUR $s \rightarrow -\infty$

Dans le cas de l'oscillateur harmonique $(-\frac{d^2}{dq^2} + q^2)$, le comportement de $\zeta(s)$ pour $s \rightarrow -\infty$ est dicté par l'équation fonctionnelle de Riemann; celle-ci peut se montrer à partir de la représentation de Mellin :

$$\zeta_R(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

par la méthode des résidus [8]. Le résultat pour $\zeta(s)$, $s \rightarrow -\infty$ est :

$$\zeta(s) = (1-2^{-s}) \zeta_R(s) = -\Gamma(1-s) \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} (1 + \mathcal{O}(2^s))$$

Pour l'oscillateur quartique, on commence par se rapprocher du cas harmonique en considérant l'opérateur $\hat{H}^{3/4}$ dont les valeurs propres $\lambda_n^{3/4}$ sont asymptotiques à $2\pi(n + \frac{1}{2})$ pour $n \rightarrow \infty$, d'après (3). On écrit alors la représentation de Mellin :

$$(14) \quad \zeta\left(\frac{3s}{4}\right) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \Theta_{3/4}(t) t^{s-1} dt, \quad \Theta_{3/4}(t) = \text{Tr} \exp(-t\hat{H}^{3/4})$$

Nous conjecturons, arguments semi-classiques à l'appui [1], que $\Theta_{3/4}(t)$ est une fonction analytique à ramifications sur \mathbb{C} , dont les points de branchement sont les périodes complexes des orbites du hamiltonien classique $C(p^2 + q^4)^{3/4}$; ces périodes forment un réseau de \mathbb{C} engendré par les vecteurs $(\frac{1 \pm i}{2})$. En transformant (14) en intégrale de contour, on voit que pour $s \rightarrow -\infty$ la contribution dominante à $\zeta(s)$ provient des quatre points de branchement les plus proches de $t = 0$ (ce point exclu). Au prix d'une hypothèse qui reste à prouver concernant la disposition globale de ces points sur la surface de Riemann de $\Theta_{3/4}(t)$, leurs contributions asymptotiques à $\zeta(s)$ sont calculables (l'effet de ces contributions sur les valeurs propres se traduit par un décalage d'ordre $e^{-\pi n}$ entre la vraie valeur λ_n et la meilleure estimation numérique fournie par (3)). On trouve finalement [3] :

$$(15) \quad \zeta(s) \sim -\Gamma\left(1 - \frac{4s}{3}\right) \frac{2^{-2s/3}}{\pi} \frac{\sin \pi s}{\cos(2\pi s/3)} \left[1 - \frac{\alpha_1}{\frac{4s}{3} + 1} + \frac{\alpha_2}{(\frac{4s}{3} + 1)(\frac{4s}{3} + 2)} - \dots \right] \quad (s \rightarrow -\infty)$$

avec la propriété curieuse que les coefficients α_j de (15) sont engendrés par

les nombres $b_n = \frac{2\pi c_n}{\Gamma(1-i_n)}$ apparaissent dans (3) suivant la formule :

$$(16) \quad \sum_0^{\infty} \alpha_j t^j \equiv \exp\left\{ \left(\frac{b_1 t}{2} + \frac{b_2 t^3}{4}\right) - \left(\frac{b_3 t^5}{8} + \frac{b_4 t^7}{16}\right) + \left(\frac{b_5 t^9}{32} + \frac{b_6 t^{11}}{64}\right) - \dots \right\}$$

En dernier ressort, le comportement de $\zeta(s)$ pour $s \rightarrow -\infty$ est gouverné par la suite des résidus de $\zeta(s)$ à distance finie !

Il découle aussi de ces considérations que la série (3) est divergente ($|b_n| \sim (2n-2)! 2^{n+1}/\pi$) et non resommable par la méthode de Borel [1].

Nous soulignons en guise de conclusion que notre dérivation des formules (15-16) est en partie heuristique et fait appel à des manipulations mal contrôlées de développements asymptotiques sous-dominants (séries doubles en $\frac{1}{n}$ et $e^{-\pi n}$ pour $n \rightarrow +\infty$) en relation avec le "phénomène de Stokes" [9]. Il manque un traitement mathématique rigoureux qui rende cette démarche systématique et qui permette surtout de la généraliser à d'autres potentiels que le cas quartique.

-
- [1] R. Balian, G. Parisi, A. Voros : Phys. Rev. Lett. 41, 1141 (1978), et dans : "Mathematical Problems in Feynman Path Integrals", Springer Lecture Notes in Mathematics (1979).
- [2] G. Parisi : "Trace Identities for the Schrödinger Operator and the WKB Method" Prétirage Ecole Normale Supérieure LPT ENS 78/9 , soumis à Nucl. Phys. B.
- [3] A. Voros : "The Zeta Function of the Quartic Oscillator", Prétirage Saclay D. Ph.-T 79/88 , soumis à Nucl. Phys. B.
- [4] S. Minakshisunaram, A. Pleijel : Canad. J. Math. 4, 26 (1952)
L. Hörmander : Acta Math. 121, 93 (1968).
I. C. Percival : Proc. Phys. Soc. 80, 1290 (1962).
- [5] L. A. Dikii, Usp. Mat. Nauk. SSSR 13, 111 (1958) (en anglais :
Translations AMS (2) vol. 18, 81 (1961)); R. T. Seeley, AMS Proc. Symp.
Pure Math. 10, 288 (1967);
D. Robert : Comm. Part. Diff. Eq. 3, 755 (1978).
- [6] D. Chudnovsky, G. Chudnovsky, A. Voros, en préparation.
- [7] L. J. Slater : Generalized hypergeometric functions, Cambridge Univ. Press (1966).
- [8] E. C. Titchmarsh : The Riemann Zeta Function, Clarendon Press (Oxford 1951).
- [9] R. B. Dingle : Asymptotic Expansions : their derivation and interpretation (Acad. Press, 1973).