Li Ta-Tsien

Problèmes aux limites et solutions discontinues pour les systèmes hyperboliques quasi linéaires d'ordre 1

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. nº 23, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A24_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1979-1980

PROBLEMES AUX LIMITES ET SOLUTIONS DISCONTINUES POUR LES SYSTEMES HYPERBOLIQUES QUASI LINEAIRES D'ORDRE 1

par LI TA-TSIEN

Exposé n° XXIII

20 Mai 1980

Cet exposé est essentiellement consacré aux résultats obtenus en collaboration avec Yu Wen-tzu.

§ 1. DEFINITION. EXEMPLES

Dans cet exposé nous allons examiner le système hyperbolique quasi linéaire d'ordre 1 à deux variables. La définition de ce système est la suivante :

Le système

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t,x,u) \frac{\partial u_j}{\partial x} = f_i(t,x,u) \quad , \quad (i = 1,\ldots,n) \tag{1.1}$$

est hyperbolique sur un certain domaine en (t,x,u), si, $\forall\ (t,x,u) \in$ le domaine considéré ,

(a) la matrice $n \times n$ $A = (a_{ij}(t,x,u))$ a n valeurs propres réelles : $\lambda_1(t,x,u)$, $\lambda_2(t,x,u),\ldots,\lambda_n(t,x,u)$;

(b) la matrice A est diagonalisable, c'est-à-dire soit $\zeta_\ell = (\zeta_{\ell 1}(t,x,u),\ldots,\zeta_{\ell n}(t,x,u))$ le vecteur propre à gauche correspondant à $\lambda_\ell(t,x,u)$:

$$\zeta_\ell\, A = \lambda_\ell \zeta_\ell \quad , \tag{1.2}$$

on a

$$\det |\zeta_{\ell j}| \neq 0. \tag{1.3}$$

En multipliant l'équation (1.1) d'indice i par $\zeta_{\ell i}$ et en sommant en i, grâce à la relation (1.2), on obtient la

<u>Proposition 1</u> : Le système hyperbolique (1.1) peut se réduire à la forme caractéristique

$$\sum_{j=1}^{n} \zeta_{\ell j}(t,x,u) \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_\ell(t,x,u) \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) = \mu_\ell(t,x,u) \, , \, (\ell = 1,\ldots,n) \tag{1.4}$$

avec (1.3) et

$$\mu_\ell = \sum_{j=1}^{n} \zeta_{\ell j} f_j \quad .$$

Dans le $\ell^{\text{ième}}$ équation de (1.4), il n'y a que les dérivées des fonctions inconnues le long de la $\ell^{\text{ième}}$ direction caractéristique $\frac{dx}{dt} = \lambda_\ell$.

On rencontre de nombreux systèmes hyperboliques quasi linéaires dans les applications, surtout en mécanique des milieux continus et en physique.

Exemple : Ecoulements plans isentropiques irrotationnels stationnaires; le système s'écrit :

$$(1.5) \qquad \begin{cases} (C^2 - u^2)\, u_x - uv(u_y + v_x) + (C^2 - v^2)\, v_y = 0 \ , \\ v_x - u_y = 0 \ , \end{cases}$$

où (u,v) est le vecteur de vitesse ; C, la célérité du son, est une fonction connue de $q^2 = u^2 + v^2$ définie par la loi de Bernoulli.

Pour l'écoulement supersonique ($u^2 + v^2 > C^2$), ce système est hyperbolique. Il a deux directions caractéristiques

$$(1.6) \qquad \frac{dy}{dx} = tg(\theta \pm A)$$

où θ est l'angle entre la direction du courant et l'axe des x positifs : $tg\ \theta = \frac{v}{u}$ (cf. Fig.1) ; A est l'angle de Mach défini par $\sin^2 A = \frac{c^2}{q^2}$.

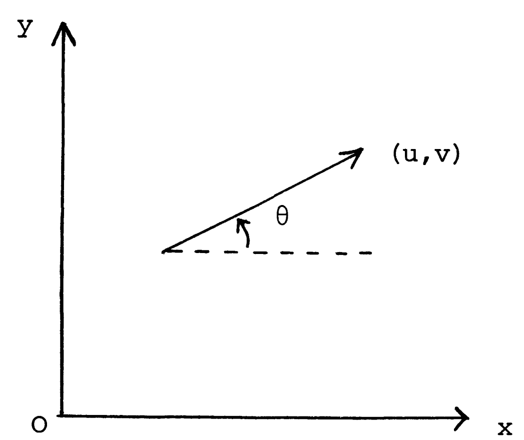

Fig. 1

§ 2. MOTIVATION

Nous pouvons citer de nombreux travaux (cf.[1]- [11]) relatifs au problème de Cauchy pour les systèmes hyperboliques quasi linéaires avec conditions initiales régulières :

$$(2.1) \qquad t = 0 \quad : \quad u_i = \varphi_i(x) \quad , \quad (i = 1,\dots,n) \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \ .$$

En utilisant diverses méthodes on a démontré l'existence et l'unicité de solutions régulières. En général, les solutions régulières n'existent que dans un domaine local en temps ($0 \leqslant t \leqslant \delta$, $\delta > 0$ assez petit) même si les données initiales sont très régulières. Cela résulte du caractère non linéaire du système et il peut apparaître des singularités (chocs) au bout d'un certain temps (cf.[12]- [16]). Par conséquent, pour résoudre le problème dans une classe de fonctions régulières ou régulières par morceaux,dans le cas général nous ne pouvons envisager qu'une solution locale en temps.

Pour les systèmes hyperboliques, les problèmes aux limites, surtout les problèmes à frontière libre sont d'autant plus importants dans les applications qu'il s'agit de déterminer la solution discontinue.

Exemple : Ecoulement plan supersonique autour d'une arête avec une frontière courbe.

(A) Ecoulements plans isentropiques irrotationnels stationnaires pour les gaz parfaits.

Soit un écoulement supersonique uniforme à l'infini (vitesse $\vec{q} = (q_0,0)$, célérité du son C_0). Soit $y = f(x)$ ($f(0) = 0$) l'équation de la frontière courbe d'une arête (cf. Fig 2).

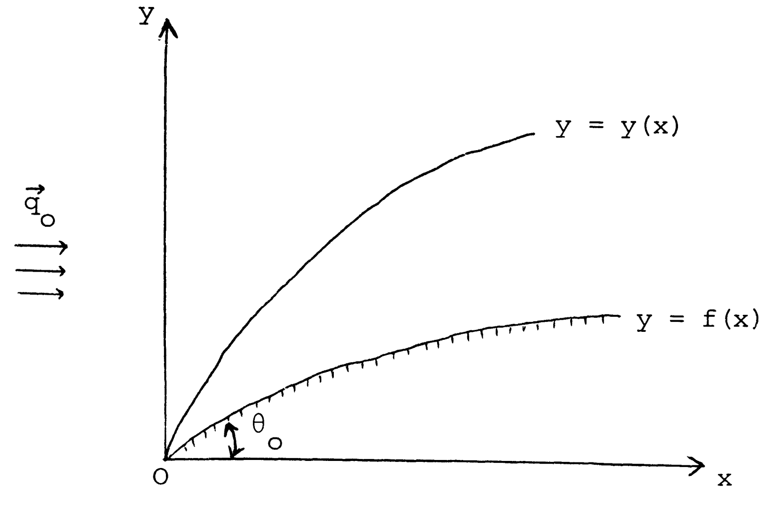

Fig.2

Si $\theta_o = tg^{-1} f'(O) > O$ n'est pas trop grand, pour déterminer le comportement de l'écoulement autour de cette arête, nous devons chercher une courbe de choc inconnue $y = y(x)$ $(y(O) = O)$ et une fonction de vitesse $(u,v) = (u(x,y), v(x,y))$ définie sur la région située entre l'arête et la courbe de choc vérifiant le système (1.5) et les conditions aux limites suivantes :

(2.2) $$\text{sur } y = f(x),\ v = f'(x)u\ ;$$

sur la frontière libre $y = y(x)$, d'après les conditions de Rankine-Hugoniot sur le choc (cf.[17]), on a

(2.3) $$v = G(u) \equiv (q_o - u)\sqrt{\frac{u-\tilde{u}}{U_o - u}} \quad (\check{\tilde{u}},\ U_o \text{ constantes connues})$$

et

(2.4) $$\frac{dy}{dx} = \frac{q_o - u}{v} \ .$$

Il faut donc résoudre un problème à frontière libre sur un domaine angulaire.

(B) Pour les écoulements plans stationnaires généraux, la situation est analogue, mais il y a 3 équations, l'entropie étant la troisième fonction inconnue, et la frontière $y = f(x)$ est une courbe caractéristique. Alors, on a un problème dans un domaine angulaire dont une partie de la frontière est libre et une autre caractéristique et connue.

Pourtant, pour les problèmes aux limites, surtout pour les problèmes à frontière libre, il n'y a eu que peu d'études. Les résultats obtenus (cf.[17] - [21]) ne sont pas assez généraux pour les applications. C'est la raison qui nous pousse à étudier systématiquement les problèmes aux limites et les problèmes à frontière libre pour les systèmes hyperboliques quasi linéaires afin de construire les solutions continues ou les solutions discontinues locales en temps. Le but de nos travaux est d'établir une condition algébrique nécessaire et suffisante pour résoudre ces problèmes et d'expliquer ses applications en mécanique et en physique.

§ 3. SIMPLIFICATIONS

1. Comme dans l'exemple précédent, beaucoup de problèmes sont posés sur un domaine angulaire. En outre, s'il y a un problème qui est posé sur un domaine non angulaire, par exemple, un problème mixte sur un domaine rectangulaire $\{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant \delta \ , \ a \leqslant x \leqslant b\}$, on peut le réduire à un problème sur un domaine angulaire. En effet, puisque le problème de Cauchy est toujours bien posé, on peut d'abord résoudre le problème de Cauchy et obtenir une solution sur le domaine maximal où les seules conditions initiales la déterminent. On a alors à résoudre un problème entre une caractéristique et la frontière.

En conclusion, il suffit d'examiner le problème sur un domaine angulaire :

$$R(\delta) = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant \delta,\ x_1(t) \leqslant x \leqslant x_2(t)\} \tag{3.1}$$

avec

$$x_1(0) = x_2(0) = 0\ ,\quad x_1'(0) < x_2'(0) \text{ et } x_1(t) < x_2(t) \quad (t > 0). \tag{3.2}$$

2. Le cas le plus simple : le problème aux limites typique.

En général, quand on étudie un problème sur un domaine angulaire, on rencontre encore des situations très variées. Par exemple, la frontière est droite ou courbe; libre ou fixe, caractéristique ou non; il y a ou il n'y a pas de courbes caractéristiques (ou de frontières libres) qui partent de l'origine et entrent dans le domaine angulaire; les conditions aux limites sont soit locales en u soit globales en u, etc. Mais, parmi tous les cas, le plus simple et le plus important est le suivant : les frontières sont droites et il n'y a pas de courbes caractéristiques qui partent de l'origine et entrent dans le domaine angulaire. Nous appelons ce problème le problème aux limites typique et nous le formulons comme suit :

Sur un domaine angulaire (cf. Fig. 3)

$$R(\delta) = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant \delta,\ 0 \leqslant x \leqslant t\}, \tag{3.3}$$

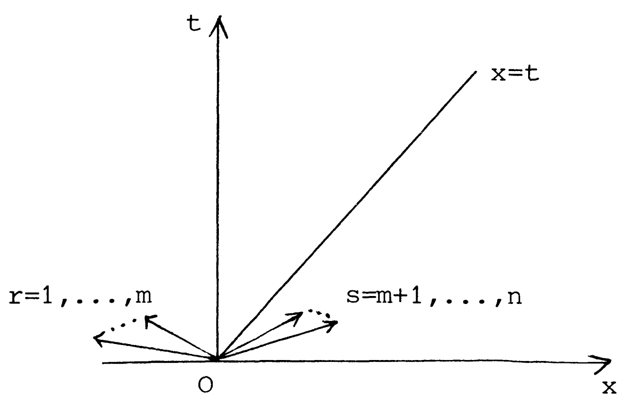

Fig. 3

nous examinons le système hyperbolique

$$\sum_{j=1}^{n} \zeta_{\ell j}(t,x,u)\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_\ell(t,x,u)\frac{\partial u_j}{\partial x}\right) = \mu_\ell(t,x,u), \tag{3.4}$$

$$(\ell = 1,\dots,n)$$

avec les conditions aux limites :

$$\text{sur } x = t,\quad u_r = G_r(t,u_{m+1},\dots,u_n),\quad (r = 1,\dots,m), \tag{3.5}$$

$$\text{sur } x = 0,\quad u_s = G_s(t,u_1,\dots,u_m),\quad (s = m+1,\dots,n), \tag{3.6}$$

où $\zeta_{\ell j}$, λ_ℓ , μ_ℓ ,G_ℓ $(\ell,j = 1,\dots,n)$ sont fonctions régulières de toutes les variables sur le domaine considéré et det $|\zeta_{\ell,j}| \neq 0$.

On suppose que les équations (3.5) (3.6) admettent une unique solution $u = u^0$ à l'origine (c'est à dire en $x = t = 0$). Par translation, on peut supposer que

$$u^0 = (0,0,\dots,0).$$

Soit

$$\lambda_\ell^0 = \lambda_\ell(0,0,0) \qquad (\ell = 1,\dots,n)\ , \tag{3.7}$$

on suppose de plus que

$$\lambda_r^0 < 0 < 1 < \lambda_S^0 \quad (r = 1,\dots,m;\ S = m+1,\dots,n). \tag{3.8}$$

En outre, on peut supposer que

$$\zeta_{\ell j}^0 \equiv \zeta_{\ell j}(0,0,0) = \delta_{\ell j} = \begin{cases} 1, & \text{si } \ell = j, \\ 0, & \text{si } \ell \neq j, \end{cases} \tag{3.9}$$

ce qui ne diminue pas la généralité. A ce moment-là, nous disons que le système (3.4) est du type diagonal au sommet et que les u_ℓ $(\ell = 1,\dots,n)$ sont les variables diagonales.

Nous expliquons que, pour le problème aux limites typique ,

a. Sur la frontière, le nombre de conditions aux limites est celui de directions caractéristiques dirigées vers l'intérieur du domaine et en même temps vers l'axe des t positifs. Nous appellerons ces directions caractéristiques- départ

b. Dans les conditions aux limites, les variables diagonales correspondant à ces directions caractéristiques- départ dépendent explicitement des autres variables diagonales.

Ces deux points correspondent au fait que les ondes se propagent le long de courbes caractéristiques, sinon, il est facile de constater que la résolubilité du problème ne pourra pas être garantie. Mais, pour obtenir la résolubilité du problème aux limites typique, il faudra encore avoir certaines conditions supplémentaires. Comme contre-exemple, considérons le problème typique suivant : sur le domaine $\{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant \delta,\ -t \leqslant x \leqslant t\}$,

$$(3.10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \ , \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} + 2 \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \ , \end{cases}$$

$$(3.11) \qquad \text{sur } x = t \ , \quad u = av + ct,$$

$$\qquad\qquad (a,b,c,\ \text{constantes}) .$$

$$(3.12) \qquad \text{sur } x = -t, \quad v = bu$$

Dans le cas où $ab = 9$, si $c = 0$, on a une solution non triviale $u = 2t + x$, $v = \frac{b}{3}(2t - x)$ et une solution triviale $u = v = 0$: il n'y a pas unicité ; si $c \neq 0$, il n'existe aucune solution régulière, parce que le système linéaire satisfait par les dérivées d'ordre 1, $\left(\frac{\partial u}{\partial t} , \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ à l'origine n'a pas de solutions.

Donc, il nous faudra chercher une condition de résolubilité pour le problème aux limites typique.

3. Il suffit d'examiner le problème aux limites typique.

Proposition 2 ([22] - [24]) : En utilisant un changement de variables convenable, tous les autres problèmes susmentionnés peuvent se réduire à résoudre le problème aux limites typique sous forme fonctionnelle définie ci-dessous.

Démonstration :

1) Dans le cas de la frontière libre, nous avons le problème à frontière libre typique sur un domaine

$$R(\delta) = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant \delta, \quad g(t) \leqslant x \leqslant x(t)\} \tag{3.13}$$

où $x = x(t)$ est une frontière libre :

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} \zeta_{\ell j}(t,x,u)\left(\dfrac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_\ell(t,x,u)\dfrac{\partial u_j}{\partial x}\right) = \mu_\ell\,(t,x,u)\ ,\ (\ell = 1,\dots,n)\ . \\ \text{sur } x = g(t) \ :\ u_s = G_s(t,u_1,\dots,u_m)\ , \qquad (s = m+1,\dots,n)\ , \\ \text{sur } x = x(t) \ :\ \left\{\begin{array}{l} u_r = G_r(t,x,u_{m+1},\dots,u_n)\ , \quad (r = 1,\dots,m)\ , \\ \dfrac{dx}{dt} = F(t,x,u)\ , \quad x(0) = 0\ . \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{3.14}$$

On suppose encore qu'il n'y a pas de courbes caractéristiques qui partent de l'origine et entrent dans le domaine, c'est-à-dire

$$\lambda_r^0 < g'(0) < x'(0) = F(0,0,0) < \lambda_s^0 \quad (r = 1,\dots,m;\ s = m+1,\dots,n)\ . \tag{3.15}$$

Ici, la difficulté essentielle consiste en l'apparition de la frontière libre. Mais, en utilisant le changement de variables

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{t} = t\ , \\ \bar{x} = \dfrac{x - g(t)}{x(t) - g(t)}\ t\ , \end{array}\right. \tag{3.16}$$

le domaine $R(\delta)$ se réduit au domaine

$$\bar{R}(\delta) = \{(\bar{t},\bar{x}) \mid 0 \leqslant \bar{t} \leqslant \delta, \quad 0 \leqslant \bar{x} \leqslant \bar{t}\} \tag{3.17}$$

avec frontières fixes; maintenant, les coefficients du système et les conditions aux limites dépendent de $x(\bar{t})$ de sorte que ce sont des certains opérateurs de u. Alors, nous obtenons un problème aux limites typique sous forme fonctionnelle pour lequel on montre que la situation est analogue à celle du problème aux limites typique.

2) Dans le cas où la frontière $x = x(t)$ est la $k^{\text{ième}}$ courbe caractéristique, nous pouvons considérer $x = x(t)$ comme une frontière libre avec la condition

$$(3.18) \qquad \frac{dx}{dt} = \lambda_k(t,x,u) \quad , \quad x(0) = 0 \ .$$

En utilisant le changement de variables (3.16), nous obtenons encore un problème aux limites typique sous forme fonctionnelle.

3) Dans le cas où certaines courbes caractéristiques ou frontières libres partent de l'origine et entrent dans le domaine, on dit que le problème est un problème aux limites général ou un problème à frontière libre général. Nous pouvons utiliser un changement de variables analogue pour replier le domaine considéré sur le domaine fixe (3.17). Malgré la multiplication du nombre des fonctions inconnues, nous obtenons de nouveau un problème aux limites typique sous forme fonctionnelle.

Par conséquent, nous allons concentrer dans ce qui suit notre attention sur le problème aux limites typique.

§ 4. RESULTATS ET APPLICATIONS

Pour le problème aux limites typique

$$\begin{cases} (4.1) \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \zeta_{\ell j}(t,x,u)\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_\ell(t,x,u)\frac{\partial u_j}{\partial x}\right) = \mu_\ell(t,x,u) \ , \quad (\ell = 1,\dots,n), \\ (4.2) \quad \text{sur } x = t \ , \quad u_r = G_r(t,u_{m+1},\dots,u_n), \quad (r = 1,\dots,m), \\ (4.3) \quad \text{sur } x = 0 \ , \quad u_s = G_s(t,u_1,\dots,u_m), \quad (s = m+1,\dots,n), \end{cases}$$

Introduisons la matrice jacobienne associée aux conditions aux limites (4.2) (4.3) à l'origine

$$(4.4) \qquad \Theta \equiv (\theta_{\ell k}) = \left(\frac{\partial G_\ell}{\partial u_k}(0,0)\right) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial G_r}{\partial u_q}(0,0) \\ \dfrac{\partial G_s}{\partial u_p}(0,0) & 0 \end{pmatrix}$$

$(r,p = 1,\dots,m \ ; \quad s,q = m+1,\dots,n)$, nous avons démontré le

Théorème 1 ([22]) : Supposons que $\zeta_{\ell j}$, λ_ℓ , μ_ℓ, G_ℓ (ℓ, j = 1,...,n) sont des fonctions de classe C^1 de toutes les variables sur le domaine considéré et que

(4.5) $$|\Theta|_{min} \equiv \inf_{\substack{\gamma_j \neq 0 \\ j = 1,\dots,n}} \max_{\ell = 1,\dots,n} \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\gamma_\ell}{\gamma_k}\theta_{\ell k}\right| < 1,$$

Alors, le problème aux limites typique (4.1)-(4.3) admet une unique solution $u = u(t,x)$ de classe C^1 sur le domaine

$$R(\delta) = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant \delta, \quad 0 \leqslant x \leqslant t\}$$

où $\delta > 0$ est assez petit.

Démonstration :

(1) En multipliant l'équation et la condition aux limites d'indice ℓ par $\gamma_\ell \neq 0$, la matrice Θ se réduit à γ^{-1} où

$$\gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}.$$

Par conséquent, il suffit de montrer le théorème sous l'hypothèse suivante

(4.6) $$|\Theta| = \max_{\ell = 1,\dots,n} \sum_{k=1}^{n} |\theta_{\ell k}| < 1 .$$

(2) Pour appliquer le théorème de point fixe, nous examinons d'abord le problème linéaire correspondant :

$$\text{sur } R(\delta_0) = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant \delta_0, \quad \beta t \leqslant x \leqslant \alpha t\} \text{ (cf. Fig.4) },$$

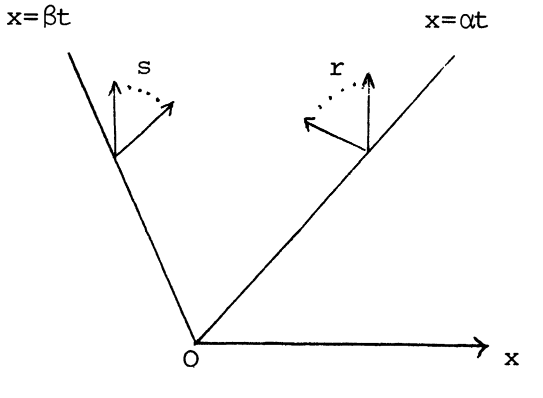

Fig. 4

$$(4.7)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \zeta_{\ell j}(t,x)\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_\ell(t,x)\ \frac{\partial u_j}{\partial x}\right) = \mu_\ell\ (t,x) \quad , \quad (\ell = 1,\dots,n), \\ \text{sur } x = \alpha t, \quad \sum_{j=1}^{n} \zeta_{rj}(t,\alpha t)u_j = \psi_r(t) \quad , \quad (r = 1,\dots,m), \\ \text{sur } x = \beta t, \quad \sum_{j=1}^{n} \zeta_{sj}(t,\beta t)u_j = \psi_s(t) \quad , \quad (s = m+1,\dots,n) \end{cases}$$

avec les hypothèses

$$(4.8)\quad \begin{aligned} &\lambda_r(t,\ \alpha t) < \alpha \leqslant \lambda_s(t,\alpha t), \\ &\lambda_r(t,\ \beta t) \leqslant \beta < \lambda_s(t,\beta t), \\ &(r = 1,\dots,m\ ;\ \ s = m+1,\dots,n)\ . \end{aligned}$$

Supposons que $\zeta_{\ell j}$, λ_ℓ , μ_ℓ , ψ_ℓ $(\ell,j = 1,\dots,n)$ sont de classe C^1, en intégrant l'équation d'indice ℓ le long de $\ell^{\text{ième}}$ courbe caractéristique, le problème (4.7) peut se réduire au système d'équations intégrales correspondant. Alors, en utilisant une méthode itérative, nous avons démontré que le problème (4.7) a une unique solution $u = u(t,x)$ de classe C^1 sur $R(\delta_o)$.

Ensuite, en utilisant les relations intégrales satisfaites par $u(t,x)$ et par $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ respectivement, nous avons établi trois estimations a priori, sur le domaine $R(\delta)$ $\forall\ \delta_o \geqslant \delta > 0$, sur

1) la norme C^o de u ;
2) la norme C^o de $p = (p_1,\dots,p_{2n})$ où

$$(4.9)\quad p_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \alpha\frac{\partial u_i}{\partial x}\ ,\ p_{n+i} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \beta\ \frac{\partial u_i}{\partial x} \qquad (i = 1,\dots,n)\ ;$$

3) le module de continuité modifié de p :

$$(4.10)\quad \Omega(\eta|\,p) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sup_{\substack{i=1,\dots,2n \\ |t'-t''|\leqslant\eta \\ \beta\leqslant|\frac{x'-x''}{t'-t''}|\leqslant\alpha}} |p_i(t',x') - p_i(t'',x'')|\ .$$

(3) $\forall\ \ v \in C^1(R\ (\delta))$, d'après le point (2), nous pouvons définir un opérateur $u = Tv$ au moyen du problème linéaire suivant

$$
(4.11)\begin{cases}
\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \zeta_{\ell j}(t,x,v)\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_\ell(t,x,v)\frac{\partial u_j}{\partial x}\right) = \mu_\ell\,(t,x,v)\,, \\
\text{sur } x = \alpha t,\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \zeta_{rj}(t,x,v)\,u_j = \psi_r(t) \equiv G_r(t,v) + \sum_{j=1}^{n}(\zeta_{rj}(t,x,v) - \zeta^{o}_{rj})v_j\,, \\
\text{sur } x = \beta t,\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \zeta_{sj}(t,x,v)u_j = \psi_s(t) \equiv G_s(t,v) + \sum_{j=1}^{n}(\zeta_{sj}(t,x,v) - \zeta^{o}_{sj})v_j\,.
\end{cases}
$$

En utilisant les trois estimations a priori susmentionnés grâce à la condition (4.6), après un long calcul, nous avons démontré que, sur $R(\delta)$ où $\delta > 0$ assez petit, cet opérateur $u = Tv$ a un point fixe $u = u(t,x)$ qui est la solution du problème aux limites typique (4.1)-(4.3) d'où le théorème.

Remarque 1 : La hauteur δ du domaine d'existence $R(\delta)$ dépend continûment de la norme C^1 des fonctions $\zeta_{\ell j}$, λ_ℓ, μ_ℓ et G_ℓ, du module de continuité de $\dfrac{\partial G_\ell}{\partial u_j}$ $(\ell, j = 1,\dots,n)$ et de la norme C^o de $1/\det|\zeta_{\ell j}|$.

Remarque 2 : Pour obtenir le résultat désiré, il est essentiel d'estimer les dérivées tangentielles à la frontière p_i $(i = 1,\dots,2n)$ et leur module de continuité modifié.

Remarque 3 : Pour tous les autres problèmes susmentionnés nous pouvons écrire la matrice jacobienne correspondante Θ et obtenir le résultat analogue.

Remarque 4 : Nous pouvons facilement vérifier la condition de résolubilité (4.5) dans les problèmes concrets, parce que nous avons des règles pour calculer le nombre $|\Theta|_{min}$, par exemple

$$
(4.12)\qquad \text{si } \Theta = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad |\Theta|_{min} = |ab|\,;
$$

si $\bar{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & \Theta_1 \end{pmatrix}$ où Θ_1 est une matrice $k \times k$, T est une matrice $k \times (n-k)$, alors

$$
(4.13)\qquad |\bar{\Theta}|_{min} = |\Theta_1|_{min}\,.
$$

Comme une application du théorème 1, considérons l'écoulement plan supersonique autour d'une arête avec une frontière courbe (cf. l'ex. dans § 2). Ce problème a été étudié par diverses méthodes : la méthode de l'hodographe ([25]), la méthode de la fonction de Courant ([26][27]) et le théorème des fonctions implicites de Nash-Moser ([28][29]). Maintenant, d'après la condition d'entropie, il est facile de constater que c'est un problème à frontière libre typique. D'ailleurs, nous pouvons vérifier la condition de résolubilité correspondante (4.5) grâce à la propriété de chocs. Alors nous obtenons facilement le même résultat (cf.[30], [31]).

Mais, la condition de résolubilité du théorème 1 n'est qu'une condition suffisante. Pour obtenir une condition nécessaire et suffisante de résolubilité, examinons le problème dans une classe de fonctions suffisamment régulières ou dans C^∞.

Posons

$$(4.14) \qquad \sigma_r = \frac{\lambda_r^o}{\lambda_r^o - 1}, \quad \sigma_s = \frac{\lambda_s^o - 1}{\lambda_s^o} \qquad (r = 1,\dots,m \ ; \ s = m+1,\dots,n) ,$$

$$(4.15) \qquad \sigma = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$$

et

$$(4.16) \qquad \Theta_k = \Theta\sigma^k \qquad (k = 1,2,\dots) .$$

Pour le problème aux limites typique, évidemment

$$(4.17) \qquad 0 \leqslant \sigma_\ell < 1 \qquad (\ell = 1,\dots,n) .$$

<u>Théorème 2</u> ([32]) : Supposons qu'il existe un entier $N \geqslant 0$ tel que

$$(4.18) \qquad \det|I - \Theta_k| \neq 0 \qquad (k = 1,\dots,N-1)$$

et

$$(4.19) \qquad |\Theta_N|_{min} < 1 .$$

Supposons de plus que $\zeta_{\ell j}$, λ_ℓ, μ_ℓ et G_ℓ $(\ell, j = 1,\dots,n)$ sont des fonctions de classe C^{N+1} de toutes les variables sur le domaine considéré.

Alors, le problème aux limites typique (4.1) - (4.3) admet une unique solution $u(t,x) \in C^{N+1}$ sur $R(\delta)$ où $\delta > 0$ est assez petit.

Ou, de même

Théorème 2bis : Supposons que $\zeta_{\ell j}$, λ_ℓ, μ_ℓ et G_ℓ $(\ell,j = 1,\dots,n)$ sont des fonctions suffisamment régulières (ou C^∞) et que

(4.20) $$\det|I - \Theta_k| \neq 0 \qquad (k = 1,2,\dots).$$

Alors, le problème (4.1)-(4.3) admet une unique solution $u(t,x)$, suffisamment régulière (ou C^∞), sur $R(\delta)$ où $\delta > 0$ est assez petit.

Démonstration : Si $N = 0$, cela résulte du Théorème 1. Si $N = 1$, posons

(4.21) $$A = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \quad , \qquad B = \frac{\partial}{\partial t} \ ,$$

nous prenons comme nouvelles fonctions inconnues une partie des dérivées tangentielles à la frontière

(4.22) $$u^{(1)} = (Au_1,\dots,Au_m,\ Bu_{m+1},\dots,Bu_n)$$

et nous construisons le nouveau problème comme suit :

Introduisons

(4.23) $$v^{(1)} = (Bu_1,\dots,Bu_m,Au_{m+1},\dots,Au_n),$$

à partir du système originel (4.1), on a

(4.24) $$v_\ell^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} a_{\ell j}(t,x,u)u_j^{(1)} + b_\ell(t,X,u) \qquad (\ell = 1,\dots,n),$$

où $a_{\ell j}$, b_ℓ $(\ell,j = 1,\dots,n)$ sont des fonctions connues de (t,x,u) et

(4.25) $$a^o_{\ell j} \equiv a_{\ell j}(0,0,0) = \sigma_\ell \delta_{\ell j}.$$

Posons

(4.26) $$D_r = A,\ D_s = B \qquad (r = 1,\dots,m\ ;\ s = m+1,\dots,n),$$

en appliquant D_ℓ à l'équation (4.1) d'indice ℓ et en utilisant (4.24) pour éliminer $v^{(1)}$, nous obtenons le système en $u^{(1)}$:

(4.27) $$\sum_{\ell=1}^{n} \zeta_{\ell j}^{(1)}(t,x,u)\left(\frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial t} + \lambda_\ell(t,x,u)\frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x}\right) = \mu_\ell^{(1)}(t,x,u,u^{(1)}),(\ell = 1,\dots,n$$

où $\zeta_{\ell j}^{(1)}$, $\mu_{\ell}^{(1)}$ $(\ell, j = 1,\dots,n)$ sont des fonctions connues et

(4.28) $$\zeta_{\ell j}^{(1)0} \equiv \zeta_{\ell j}^{(1)}(0,0,0) = \delta_{\ell j}.$$

En dérivant les conditions aux limites (4.2) (4.3) en t et en utilisant (4.24) pour éliminer $v^{(1)}$, nous obtenons les conditions aux limites en $u^{(1)}$:

(4.29) $$\begin{cases} \text{sur } x = t,\ u_r^{(1)} = \sum\limits_{s=m+1}^{n} \dfrac{\partial G_r}{\partial u_s} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{sj} u_j^{(1)} + b_s \right) + \dfrac{\partial G_r}{\partial t}, & (r = 1,\dots,m), \\ \text{sur } x = 0,\ u_s^{(1)} = \sum\limits_{r=1}^{m} \dfrac{\partial G_s}{\partial u_r} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{rj} u_j^{(1)} + b_r \right) + \dfrac{\partial G_s}{\partial t}, & (s = m+1,\dots,n). \end{cases}$$

En outre, les conditions aux limites en u s'écrivent

(4.30) $$\begin{cases} \text{sur } x = t, & u_r = \displaystyle\int_0^t u_r^{(1)}(t,t)dt, & (r = 1,\dots,m), \\ \text{sur } x = 0, & u_s = \displaystyle\int_0^t u_s^{(1)}(t,0)dt, & (s = m+1,\dots,n). \end{cases}$$

Alors, nous obtenons le problèmes (4.1) (4.27) (4.29) (4.30), nouveau problème aux limites typique en $(u,u^{(1)})$ avec conditions aux limites sous forme fonctionnelle. Ce nouveau problème équivaut au problème originel dans une classe de fonctions régulières, mais la matrice Θ de ce nouveau problème est de la forme

$$\bar{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_1 & \Theta_1 \end{pmatrix}$$

où $\Theta_1 = \Theta\sigma$, T_1 est une matrice $n \times n$. En remarquant (4.13), d'après le théorème 1, ce nouveau problème a une unique solution, donc il en est de même pour le problème originel.

Si $N = 2$, grâce à la condition $\det|I - \Theta_1| \neq 0$, on peut déterminer uniquement une solution $u^{(1)}$ à l'origine en utilisant les conditions aux limites en $u^{(1)}$ (4.29). Et on poursuit le processus.

Remarque 1 : Grâce à (4.17), la condition (4.20) est automatiquement satisfaite si k est assez grand. Par conséquent, le nombre des conditions qui doivent être vérifiées est fini.

Remarque 2 : La condition de résolubilité (4.20) équivaut au fait que l'on peut uniquement déterminer tour à tour toutes les dérivées de la solution à l'origine en utilisant le système et les conditions aux limites. Evidemment, c'est une condition nécessaire et suffisante de résolubilité pour les solutions suffisamment régulières.

Remarque 3 : Dans le contre exemple (3.10)-(3.12), l'hypothèse ab = 9 équivaut à $\det|I - \Theta_1| = 0$ qui détruit la condition de résolubilité précédente.

Comme une application du théorème 2, envisageons le problème de Cauchy avec conditions initiales discontinues pour le système de l'écoulement unidimensionnel instationnaire.

Pour des conditions initiales constantes par morceaux

$$(4.31) \qquad t = 0 \ , \ (u,\rho,p) = \begin{cases} (u^+, \rho^+, p^+) & \text{si } x > 0 \ , \\ (u^-, \rho^-, p^-) & \text{si } x < 0 \ , \end{cases}$$

où u la vitesse, ρ la densité et p la pression, c'est un problème de Riemann qui a été bien étudié. Maintenant, nous examinons le cas général où les conditions initiales sont régulières par morceaux :

$$(4.32) \qquad t = 0 \ , \ (u,\rho,p) = \begin{cases} (u^+(x), \rho^+(x), p^+(x)) & \text{si } x > 0, \\ (u^-(x), \rho^-(x), p^-(x)) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

avec $(u^+(0), \rho^+(0), p^+(0)) \neq (u^-(0), \rho^-(0), p^-(0))$. Nous avons démontré le

Théorème 3 ([32]) : Pour les gaz parfaits, quel que soit $\max(|u^+(0) - u^-(0)|, |\rho^+(0) - \rho^-(0)|, |p^+(0) - p^-(0)|)$, il existe une unique solution $u, \rho, p(t,x)$ de ce problème dans un domaine local en temps. Cette solution a une structure analogue à celle du problème de Riemann correspondant aux conditions initiales

$$(4.33) \qquad t = 0, \quad (u, \rho, p) = \begin{cases} (u^+(0), \rho^+(0), p^+(0)) & \text{si } x > 0 \ , \\ (u^-(0), \rho^-(0), p^-(0)) & \text{si } x < 0 \ . \end{cases}$$

Démonstration :

(1) Cas où il y a deux équations.
Pour les écoulements isentropiques, en utilisant la méthode de l'hydographe, voir [33]. Pour le système général de deux équations, en utilisant les coordonnées caractéristiques, le théorème a été démontré dans [34]-[36].

(2) Pour les écoulements unidimensionnels instationnaires généraux, il y a 4 situations possibles pour le problème de Riemann correspondant ; la solution est composée (cf. Fig. 5):

(a) d'une onde simple centrée rétrograde, d'une discontinuité de contact et d'une onde simple centrée progressive.

(b) d'un choc rétrograde, d'une discontinuité de contact et d'une onde simple centrée progressive.

(c) d'une onde simple centrée rétrograde, d'une discontinuité de contact et d'un choc progressif.

(d) d'un choc rétrograde, d'une discontinuité de contact et d'un choc progressif.

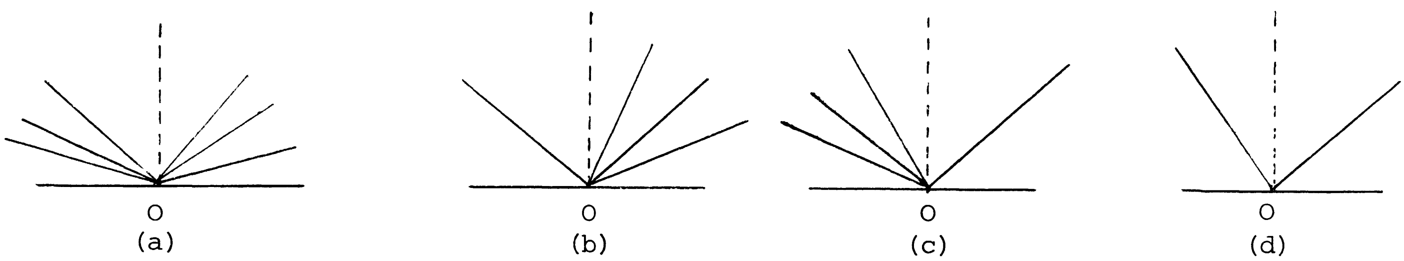

Fig. 5

Nous utilisons les variables de Lagrange pour faire la démonstration. Pour les trois premiers cas, le théorème 3 peut être démontré d'après le théorème 1 et les résultats dans [34], donc nous obtenons la solution avec une structure analogue. Quant au dernier cas, après avoir résolu deux problèmes de Cauchy respectivement à gauche et à droite, d'après la condition d'entropie, nous obtenons un problème à frontière libre général. Pour ce problème, en général la condition $|\Theta|_{min} < 1$ ne peut pas être satisfaite, mais la condition de résolubilité du théorème 2 est toujours satisfaite, alors, d'après le théorème 2, on a également la résolubilité.

Pour les problèmes de ce type, il y a des résultats plus généraux. Pour le système hyperbolique sous forme conservative

(4.34) $$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t,x,u)}{\partial x} = \psi(t,x,u),$$

où $u = (u_1,\dots,u_n)$ et $\varphi,\psi(t,x,u) : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, supposons que le système est strictement hyperbolique :

(4.35) $$\lambda_1(t,x,u) < \dots < \lambda_n(t,x,u)$$

et que le $k^{\text{ième}}$ $(k = 1,\dots,n)$ champ caractéristique est soit vraiment non linéaire :

(4.36) $$\sum_{j=1}^{n} \zeta^{jk} \frac{\partial \lambda_k}{\partial u_j} \neq 0$$

soit linéairement dégénéré :

(4.37) $$\sum_{j=1}^{n} \zeta^{jk} \frac{\partial \lambda_k}{\partial u_j} \equiv 0 ,$$

où (ζ^{jk}) est matrice inverse de $(\zeta_{\ell j}) = (\frac{\partial \varphi}{\partial u})$.

Pour des conditions initiales régulières par morceaux

(4.38) $$t = 0 , \quad u = \begin{cases} u^+(x) & \text{si} \quad x > 0, \\ u^-(x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

avec $|u^+(0) - u^-(0)| \neq 0$, nous avons démontré le

Théorème 4 ([37]) : Supposons que $|u^+(0) - u^-(0)|$ est assez petit, sur un domaine local en temps il existe une unique solution du problème (4.34) (4.38). Cette solution a une structure analogue à celle du problème de Riemann correspondant

(4.39) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial \varphi(0,0,u)}{\partial x} = 0 , \\ t = 0, \quad u = \begin{cases} u^+(0), & \text{si } x > 0, \\ u^-(0), & \text{si } x < 0 . \end{cases} \end{cases}$$

Remarque 1 : Le problème de Riemann (4.39) a été étudié par P. D. Lax ([38]). C'est la fondation de la méthode de J. Glimm (cf.[39]).

Remarque 2 : La solution du problème (4.34) (4.38) est composée de n familles d'ondes : soit le choc soit l'onde centrée (correspondant au champ caractéristique vraiment non linéaire) soit la discontinuité de contact (correspondant au champ caractériqtique linéairement dégénéré).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. SCHAUDER : Cauchy'sches problem für partielle differentialgleichungen erste Ordnung, Commentarii Math., Helvetici, 9, 1937, p.263-283.

[2] K. O. Friedrichs : Nonlinear hyperbolic differential equations of two independent variables, Amer. Jour. of Math., 70, 1948, p.555-589.

[3] R. Courant, P. D. Lax : On nonlinear differential equations with two independent variables. Comm. Pure Appl. Math., 2, 1949, p.255-273.

[4] A. Douglis : Some existence theorems for hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variables. Comm. Pure Appl. Math.,2, 1952, p.119-154.

[5] P. Hartman, A. Wintner : On hyperbolic partial differential equations, Amer. Jour . of Math., 74, 1952, p.834-864.

[6] R. Courant, E. Isaacson, M. Rees : On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite difference, Comm. Pure Appl. Math., 5, 1952, p.243-255.

[7] P. D. Lax : Nonlinear hyperbolic equations, Comm. Pure Appl. Math., 6, 1953, p.231-258.

[8] P. D. Lax : The initial value problem for nonlinear hyperbolic equations in two independent variables. Ann. Math. Studies, Princeton University Press, 33, 1954, p.211-229.

[9] R. Courant, P. D. Lax : Cauchy's problem for nonlinear hyperbolic equations in two independent variables. Annali di Matematica pura ed Applicata, 40, 1955, p.161-166.

[10] R. Courant : Cauchy's problem for hyperbolic quasi-linear systems of first order partial differential equations in two independent variables. Comm. Pure Appl. Math., 14, 1961, p.257-265.

[11] Li Ta-tsien, Yu Wen-tzu : Cauchy's problem for quasi-linear hyperbolic systems of first order partial differential equations. Math. Progress, 7, 1964, p.152-171.

[12] P. D. Lax : Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations. J. Math. Phys., 5, 1964, p.611-613.

[13] J. B. Keller, L. Ting : Periodic vibrations of systems governed by nonlinear partial differential equations", Comm. Pure Appl. Math., 19, 1966, p.371-420.

[14] T. Nishida : Nonlinear hyperbolic equations and related topics in fluid dynamics. Publications Mathématiques d'Orsay, 1978, 02.

[15] A. Jeffrey : Quasilinear hyperbolic systems and waves. Research Notes in Mathematics, Pitman Publishing, 1976.

[16] F. John : Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation. Comm. Pure Appl. Math., 27, 1974, p.377-465.

[17] R. Courant, K. O. Friedrichs : Supersonic flow and shock waves. New York, 1948.

[18] P. Giovanni : Sulla risonluzione del problema misto per le equazioni iperboliche non lineari mediante le differenze finite. Ann. Mat. Pura. Appl., 46, 1958, p.313-341.

[19] V. Thomée : Difference methods for two dimensional mixed problems for hyperbolic first order systems. Arch. Rat. Mech. Anal., 8, 1961, p.68-88.

[20] V. Thomée : A mixed boundary-value problem for hyperbolic first-order systems with derivatives in the boundary conditions. Arch. Rat. Mech. Anal., 8, 1961, p.433-443.

[21] B. L. Rozdestvenskii, N. N. Yanenko : Systems of quasilinear equations. Izd. Nauka Moskva, 1968.

[22] Li Ta-tsien, Yu Wen-tzu : Some existence theorems for quasi-linear hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variables, (I) Typical boundary value problems, Scientia Sinica, 13, n°4, 1964, p.529-549.

[23] Li Ta-tsien, Yu Wen-tzu : (II) Typical boundary value problems of functional form and typical free boundary problems, ibid. 13, n°4, 1964, p.551-562.

[24] Li Ta-tsien, Yu Wen-tzu : (III) General boundary value problems and general free boundary problems, ibid, 14, n°7, 1965, p.1065-1067; Bulletin de Fudan, 10, n° 2-3, 1965, p.113-128.

[25] Gu Chao-hao, Li Ta-tsien et coll. : Ecoulements plans supersoniques autour d'une arête avec une frontière courbe. Recueil de la Faculté de Mathématiques de l'Université Fudan, 1960, p.17-28.

[26] Gu Chao-hao : Une méthode pour résoudre le problème de l'écoulement supersonique autour d'une arête avec une frontière courbe. Bulletin de Fudan, 7, n°1, 1962, p.11-14.

[27] Gu Chao-hao : A boundary value problem for hyperbolic systems and its applications. Acta Math. Sinica, 13, 1963, p.32-48.

[28] D. G. Schaeffer : An application of the Nash-Moser theorem to a free boundary problem. Lecture Notes in Mathematics, 648, 1978, p.129-143.

[29] D. G. Schaeffer : Supersonic flow past a nearly straight wedge. Duke Math. J., 43, 1976, p.637-670.

[30] Li Ta-tsien : Une remarque sur un problème à frontière libre. C. R. Acad. Sc. Paris, t.289 (9 Juillet 1979), série A, p.99-102.

[31] Li Ta-tsien : On a free boundary problem. A paraître dans Chinese Annals of Math.

[32] Li Ta-tsien, Yu Wen-tzu : The local solvability of the boundary value problems for quasi linear hyperbolic systems of partial differential equations. Bulletin de Fudan, 2, 1979, p.83-93.

[33] Gu Chao-hao, Li Ta-tsien et coll. : The Cauchy problem of typical hyperbolic system with discontinuous initial values. Recueil de la Faculté de Mathématiques de l'Université Fudan, 1960, p.1-16.

[34] Gu Chao-hao, Li Ta-tsien, Ho Zon-y : The Cauchy problem of quasi-linear hyperbolic systems with discontinuous initial values (1). Acta Math. Sinica, 11, 1961, p.314-323.

[35] Gu Chao-hao, Li Ta-tsien, Ho Zon-y : (II), ibid, 11, 1961, p.324-327.

[36] Gu Chao-hao, Li Ta-tsien, Ho Zon-y : (III), ibid, 12, 1962, p.132-143.

[37] Li Ta-tsien, Yu Wen-tzu : Discontinuous solutions for the quasi-linear hyperbolic systems. A paraître.

[38] P. D. Lax : Hyperbolic systems of conservation laws II. Comm. Pure Appl. Math., 10, 1957, p.537-566.

[39] J. Glimm : Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. Comm. Pure Appl. Math., 18, 1965, p.697-715.

***