Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

M. Kashiwara

Faisceaux constructibles et systèmes holonomes d'équations aux dérivées partielles linéaires à points singuliers réguliers

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 19, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A20_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1979-1980

FAISCEAUX CONSTRUCTIBLES ET SYSTEMES HOLONOMES D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES LINEAIRES A POINTS SINGULIERS REGULIERS

par M. KASHIWARA

Exposé n° XIX

22 Avril 1980

C'est le 21ème problème d'Hilbert qui nous demande de construire une équation au dérivée ordinaire avec une monodromie donnée. Plus généralement, on peut construire un système holonôme d'équations aux dérivées partielles linéaires à point singulier régulier dont le faisceau des solutions est isomorphe à un faisceau constructible donné.

Soient X une variété complexe et $\mathcal{D}_X$ le faisceau d'anneaux des opérateurs différentiels d'ordre fini à coefficients holomorphes. Nous notons par $D(\mathcal{D}_X)$ la catégorie dérivée de la catégorie des $\mathcal{D}_X$-Modules à gauche. On note par $D^b_{rs}(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{D}_X)$ qui consiste des complexes bornés dont les cohomologie sont des $\mathcal{D}_X$-Modules holonômes à points singuliers réguliers (c.f. [2]).

On note par $D(X)$ la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X et par $D^b_c(X)$ la sous-catégorie pleine de $D(X)$ qui consiste des complexes bornés dont les cohomologies sont constructibles. Par $D^b_c(X)^0$ on signifie la catégorie opposée de $D^b_c(X)$.

Alors, $\Phi : \mathcal{M}^\cdot \mapsto \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ définit un foncteur de $D^b_{rs}(\mathcal{D}_X)$ dans $D^b_c(X)^0$.

<u>Théorème</u> : Φ est une équivalence des catégories $D^b_{rs}(\mathcal{D}_X)$ et $D^b_c(X)^0$.

Pour démontrer ce théorème nous construisons un foncteur inverse ψ de Φ.

Pour un objet $F^\cdot$ de $D^b_c(X)$, on peut trouver un complexe borné $G^\cdot$ des faisceaux $\mathbb{R}$-constructibles (cf. §3), qui est quasi-isomorphe à $F^\cdot$. D'autre part, pour un faisceau $\mathbb{R}$-constructible G, on peut définir un sous-faisceau $TH(G)$ du faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(G, \mathcal{D}b)$ des homomorphismes de G dans le faisceau $\mathcal{D}b$ des distributions sur la variété C^∞ sous-jacente à X. Or, $TH(G)$ est stable par des opérateurs différentiels, qui nous permet de construire le complexe de Dolbeault

$$TH(G)^{(0,\cdot)} : TH(G)^{(0,0)} \xrightarrow{\bar\partial} TH(G)^{(0,1)} \xrightarrow{\bar\partial} \dots \xrightarrow{\bar\partial} TH(G)^{(0,n)}$$

$(n = \dim X)$.

Alors $\psi(F^{\cdot})$ est défini comme le complexe simple associé au complexe double $TH(G^{\cdot})^{(0,\cdot)}$.

Notons que le Théorème est démontré aussi par Mebkkout par une méthode différente.

Dans la suite, nous aurons la définition du foncteur TH et ses propriétés.

1. Soit M une variété analytique réelle. Nous nous rappellons la définition d'une partie sous-analytique et ses propriétés étudiés par Hironaka [1] .

Définition 1.1.: On dit qu'une partie Z de M est sous-analytique au point x de M s'il existe des variétés analytiques réels $N_j^{(\nu)}$, des morphismes propres $f_j^{(\nu)}$ ($\nu=1,2$; $j=1,\ldots,m$) de $N_j^{(\nu)}$ dans M et un voisinage U de x tels que

$$U \cap Z = U \cap \bigcup_{j=1}^{m} (f_j^{(1)}(N_j)^{(1)} - f_j^{(2)}(N_j^{(2)})).$$

Si Z est sous-analytique à tout point de M, on dit simplement que Z est sous-analytique.

Proposition 1.2. :

1/ L'intersection et la réunion des parties sous-analytiques sont sous-analytiques.

2/ L'adhérence, une composante connexe, l'intérieur et le complémentaire d'une partie sous-analytique sont sous-analytiques.

3/ Toute partie sous-analytique relativement compacte a un nombre fini des composantes connexes.

2. Notons par $\mathcal{D}b_M$ le faisceau des distributions sur M (au sens de L. Schwartz).

Définition 2.1. : Soit u une distribution définie dans un ouvert U de M. On dit que u est tempérée dans M s'il existe une distribution définie sur M dont la restriction à U est égale à u.

Łojaciewicz a démontré la proposition suivante.

Proposition 2.2. : Soient U_1 et U_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Supposons que, pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, il existe $m_k > 0$ et $C_k > 0$ tels qu'on ait

$$(*) \qquad d(x,\partial(U_1 \cup U_2))^{m_k} \leqq C_k(d(x,\partial U_1) + d(x,\partial U_2))$$

pour tout $x \in K$.

Ici, $d(x,\partial U_j)$ est la distance de x et la frontière ∂U_j de U_j.

Dans cette condition, une distribution u définie sur $U_1 \cup U_2$ est tempérée dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $u|U_1$ et $u|U_2$ sont tempérées dans $\mathbb{R}^n$.

D'autre part, Hironaka a démontré l'inégalité $(*)$ pour deux ouverts sous-analytiques. Donc on obtient le théorème suivant.

Théorème 2.3. : Soient $U_1,\ldots,U_m$ des ouverts sous-analytiques de M, et u une distribution définie sur $\bigcup_{j=1}^{m} U_j$.
Alors u est tempérée si et seulement si $u|U_j$ est tempérée pour tout j .

Notons que la notion tempérée est celle de locale et aussi il ne dépend pas beaucoup à M ; i.e. soient f un morphisme propre de N dans M, U un ouvert de M. Si $f|U : f^{-1}(U) \to U$ est un isomorphisme, une distribution définie sur U est tempérée dans M si et seulement si elle est tempérée dans N.

Par exemple, prenons comme M la sphère S^n de dimension n, et comme U la demi-sphère et nous identifions U à $\mathbb{R}^n$. Alors une distribution u définie sur U est tempérée si et seulement si u est tempérée au sens ordinaire ; i.e. il existe $C > 0$ et $m > 0$ tels qu'on ait

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)dx\right| \leqq C \sum_{|\alpha|\leqq m} \sup|D^\alpha\varphi| \text{ pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) .$$

3. Pour un faisceau F sur une variété complexe X , on dit qu'il est <u>constructible</u> s'il existe une suite décroissante $\{X_j\}_{j=0,1,\dots}$ des sous-ensembles analytiques fermés telle que $X_0 = X$, $X_j = \emptyset$ et que $F|X_j - X_{j+1}$ soit localement constant de rang fini pour tout j . On modifie cette définition pour un faisceau sur une variété analytique réelle M .

<u>Définition 3.1.</u> : Soit F un faisceau d'espaces vectoriels sur M. On dit que F est $\mathbb{R}$-<u>constructible</u> s'il existe une famille localement finie $\{M_j\}$ de sous-ensembles sous-analytiques de M qui satisfait les conditions suivantes :

(1) $M = \cup M_j$

(2) $F|M_j$ est localement constant pour tout j .

<u>Définition 3.2.</u> : SOit f un homomorphisme d'un faisceau $\mathbb{R}$-constructible F dans $\mathcal{D}b_M$. On dit que f est tempéré s'il satisfait la condition suivante ; pour tout ouvert sous-analytique relativement compact U de M et une section s de F sur U, la distribution f(s) définie sur U est tempérée dans M.

On note par TH(F) le sous-faisceau de $Hom_{\mathbb{C}}(F,\mathcal{D}b_M)$ qui consiste des homomorphismes tempérés. Donc on a, pour tout ouvert de U,

$$\Gamma(U;TH(F)) = \{f : F|_U \to \mathcal{D}b_U \ ; \ f \text{ est tempéré}\} \quad .$$

<u>Exemple 1</u> : Si $F = \mathbb{C}_M$ le faisceau constant, alors $TH(F) = \mathcal{D}b_M$. En effet, TH(F) est un sous-faisceau de $\mathcal{D}b_M = Hom_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_M ; \mathcal{D}b_M)$. Donc il suffit de montrer que tout homomorphisme f de F dans $\mathcal{D}b_M$ est tempéré. Soit V un ouvert sous-analytique relativement compact d'un ouvert U de M, et soit s une section de F au-dessus de V. Soit $\{V_j\}$ les composantes connexes de V(c.f. prop. 12). Alors $s|_{V_j} = c_j 1$ pour $c_j \in \mathbb{C}$. Donc $f(s)|_{V_j}$ est tempérée.

Donc f(s) est tempérée par le théorème 2.3.

<u>Exemple 2</u> : Soient F un faisceau $\mathbb{R}$-constructible et Z une partie fermée sous-analytique. Alors on a

$$TH(F_Z) = \Gamma_Z(TH(F)).$$

Ici, F_Z est un faisceau tel que $F_Z|_Z \cong F|_Z$ et que $F_Z|_{M-Z} = 0$.

Exemple 3 : Soit U un ouvert sous-analytique de M. Alors on a, pour tout ouvert W de M

$$\Gamma(W;TH(\underline{\underline{C}}_U) = \{u \in \Gamma(W \cap U; \mathcal{D}b_M) ;$$

u est tempérée dans W }= $\Gamma(W;\mathcal{D}b_M)/\Gamma_{W-U}(W;\mathcal{D}b_M)$.

On peut démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.3. : TH est un foncteur contravariant exact de la catégorie des faisceaux $\mathbb{R}$-constructibles.

4. Soit X une variété complexe de dimension n. Pour un faisceau F $\underline{\underline{R}}$-constructible sur X par rapport à la structure analytique réelle sous-jacente à X, on peut construire le complexe de Dolbeault.

$$TH(F)^{(0,.)} : TH(F)^{(0,0)} \xrightarrow{\bar\partial} TH^{(0,1)} \xrightarrow{\bar\partial} \dots \xrightarrow{\bar\partial} TH^{(0,n)}$$

Notons par $\underline{\text{T-Ext}}^i(F,\mathcal{O}_X)$ son i-ème groupe de cohomologie.

Si on note par B_X le faisceau des hyperfonctions, on a un homomorphisme canonique

$$TH(F)^{(0,.)} \to \underline{Hom}(F, \mathcal{D}b^{(0,.)}) \to \underline{Hom}(F,\mathcal{B}_X^{(0,.)})$$

Parce que $\mathcal{B}_X^{(0,.)}$ est une résolution flasque de $\mathcal{O}_X$, le i-ème groupe de cohomologie de $\underline{Hom}(F,\mathcal{O}_X^{(0,.)})$ n'est autre que $\underline{Ext}^i(F,\mathcal{O}_X)$. Donc on obtient un homomorphisme canonique de

$$\underline{\text{T-Ext}}^i(F,\mathcal{O}_X) \to \underline{Ext}^i(F,\mathcal{O}_X).$$

De la même manière, si on note par $\text{T-Ext}^i(X,F,\mathcal{O}_X)$ le i-ème groupe de cohomologie de $\Gamma(X;TH(F)^{(0,.)})$, on obtient un homomorphisme canonique

$$(**) \qquad \text{T-Ext}^i(X;F,\mathcal{O}_X) \to \text{Ext}^i(X;F,\mathcal{O}_X)$$

Par exemple, prenons comme U un ouvert strictement pseudo-convexe, relativement compact à frontière réelle analytique de $\mathbb{C}^n$ et comme F le faisceau $\mathbb{C}_U$. Alors,

$\text{T-Ext}^i(\mathbb{C}^n;F,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ est égale à 0 pour i ≠ 0 et pour i = 0 , il est égal à l'ensemble des fonctions holomorphes définies sur U avec croissance lente au bord de U. D'autre part, on a

$$\text{Ext}^i(\mathbb{C}^n;F,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = \begin{cases} \Gamma(U;\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) & i=0 \\ 0 & i\neq 0 \end{cases}$$

Si X est une complexifiée d'une variété analytique réelle M et si $F = \mathbb{C}_M$, on a

$$\underline{\text{T-Ext}}^i\,(F,\mathcal{O}_X) = \begin{cases} \mathcal{D}b_M & i = \dim M \\ 0 & i \neq \dim M \end{cases}$$

et

$$\underline{\text{Ext}}^i\,(F,\mathcal{O}_X) = \begin{cases} \mathcal{B}_M & i = \dim M \\ 0 & i \neq \dim M\,. \end{cases}$$

Dans l'homomorphisme (**) correspondant est l'inclusion de $\mathcal{D}b_M$ dans $\mathcal{B}_M$.

Remarquons que les groupes $\text{T-Ext}^i(X;F,\mathcal{O}_X)$ sont étudiés par les plusieurs auteurs, surtout par A. Martineau [3] .

Bibliographie

[1] H. Hironaka, Subanalytic sets, Numbert Theory, Algebraic geometry and Commutative algebra in honor of Y. Akizuki, 453-495, Kinokuniya, Publications, Tokyo, 1975.

[2] M. Kashiwara et T. Kawai, On holonomic systems of micro-differential equations III, Systems with regular singularities (Preprint).

[3] A. Martineau, Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes, Oeuvre de A. Martineau, C.N.R.S. 1977.

[4] S. Mebkhout , Thèse d'état, Paris VII, 1979.