Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

A. Unterberger

Quantification de certains espaces hermitiens symétriques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. nº 16, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A17_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 9 - 1 9 8 0

QUANTIFICATION DE CERTAINS ESPACES HERMITIENS SYMETRIQUES

par A. UNTERBERGER

Exposé n° XVI

18 Mars 1980

Le présent exposé ne comprend pas de démonstration; voir [9] pour un exposé systématique.

1. INTRODUCTION

On sait que la formulation hamiltonienne de la dynamique d'un système à un nombre fini de degrés de liberté est invariante par les transformations canoniques de l'espace de phase du système, i.e. les difféomorphismes qui conservent la structure symplectique de celui-ci. Depuis les premiers temps de la mécanique ondulatoire a été posé le problème de la quantification d'un tel système, c'est-à-dire l'énoncé de règles de correspondance raisonnables entre des fonctions sur l'espace de phase (les symboles dans la terminologie des analystes) et des opérateurs agissant sur un espace de Hilbert éventuellement constitué de fonctions définies sur un espace de configuration. Dans le cas où l'espace de phase est $\mathbb{R}^{2\nu}$ avec la structure symplectique définie par

(1) $$[(x,\xi),(y,\eta)] = -\langle x,\eta\rangle + \langle y,\xi\rangle,$$

on prend $\mathbb{R}^{\nu}$ comme espace de configuration, et la règle de quantification usuelle, due à H. Weyl, consiste à attacher au symbole a l'opérateur $Op_{1/2}(a)$ défini par :

(2) $$(Op_{1/2}(a)u)(x) = \iint a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right) e^{2i\pi \langle x-y,\xi\rangle} u(y)\,dy\,d\xi$$

pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu})$.

On supposait en outre, plus ou moins implicitement, qu'en vertu d'un "principe de correspondance" entre mécaniques classique et quantique on pouvait, à toute transformation canonique κ de l'espace de phase, associer une transformation unitaire U_κ de l'espace de Hilbert des fonctions d'onde telle que, Q étant la règle de quantification symboles $\mapsto$ opérateurs, on ait la formule

(3) $$U_\kappa\, Q(a)\, U_\kappa^{-1} = Q(a \circ \kappa).$$

Lorsque l'espace de phase est $\mathbb{R}^{2\nu}$, que Q est $Op_{1/2}$ et que κ est linéaire, la construction de U_κ est effectivement possible : on obtient un élément du groupe métaplectique, et la formule demandée est la formule de I. Segal. En revanche, Van Hove a montré qu'une telle définition de U_κ était en général impossible pour κ non linéaire : c'est d'ailleurs clair si l'on se limite à $Q = Op_{1/2}$, et vient simplement de ce que le symbole du crochet de deux opérateurs (le crochet de Moyal des symboles dans la terminologie des physiciens) ne se réduit pas au crochet de Poisson; il n'en est ainsi que si l'on néglige les termes en h^2 dans le développement bien connu de a # b... A ce titre, il est naturel que des solutions approchées du problème (i.e. mod.h^2 dans les développements) existent : c'est un des objets de l'opérateur d'Egorov et de la théorie des opérateurs intégraux de Fourier de Hörmander pour les transformations canoniques homogènes de degré un en la variable d'impulsion ; pour des transformations canoniques plus générales, on peut employer des opérateurs métadifférentiels (voir [8], en particulier § 3).

Il existe une autre façon d'interpréter la formule (3) : c'est d'admettre que la transformation unitaire U_κ fasse passer d'un espace de Hilbert à un autre espace de Hilbert dépendant de κ ; une meilleure façon de se poser ce problème est de proposer le problème de la quantification en les termes suivants : attacher à toute variété M munie d'une structure assez riche (en tous les cas beaucoup plus riche que celle de variété symplectique) un espace de Hilbert Q(M), et associer à toute fonction raisonnable a sur M un opérateur Q(a) sur Q(M); définir en outre, pour tout isomorphisme κ de M sur M' relativement à la structure donnée, une transformation unitaire U_κ de Q(M) sur Q(M') telle que (3) soit valable pour tout symbole a vivant sur M'.

C'est ce problème (de la quantification géométrique) auquel nous apportons une solution exacte dans le travail décrit ici. Parmi les travaux déjà consacrés à cette question, il faut citer avant tout le travail de Kirillov, qui résoud le problème pour certains espaces homogènes de groupes de Lie nilpotents (voir N. R. Wallach [11]). Une solution approchée (i.e. dans un cadre asymptotique avec une variable d'homogénéité) a été décrite par Boutet de Monvel pour les variétés de contact [2] .

En outre, de nombreux travaux ont mis l'accent sur les aspects plus géométriques du problème, en négligeant un peu les aspects d'analyse. On pourra s'informer sur la préquantification de Kostant-Souriau et sur ce qui concerne la polarisation de Kostant dans le livre de Guillemin-Sternberg [4]. Enfin, Flato, Lichnerowicz et des collaborateurs [1] ont étudié des conditions géométriques permettant de définir, au sens des séries formelles en h, une composition des fonctions sur l'espace de phase généralisant la composition # des symboles de Weyl.

2. POURQUOI DES ESPACES HERMITIENS SYMETRIQUES

Nous avons montré dans [7],[8] le rôle important joué dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathbb{R}^{\nu}$ par les champs d'oscillateurs harmoniques ou ce qui revient au même, les champ $Y \mapsto \| \ \|_Y$ de normes symplectiques sur l'espace de phase, ici $\mathbb{R}^{2\nu}$: si l'on a l'identité $\|X\|_Y = |\kappa'(Y)X|$, où κ est une transformation canonique de $\mathbb{R}^{2\nu}$, on obtient même ([8],§ 8) une structure kählérienne sur $\mathbb{R}^{2\nu}$; enfin, se donner une norme symplectique $\| \ \|$ constante (mais non nécessairement la norme canonique) revient à se donner la transformation de Fourier associée

$$\mathcal{F} = \mathrm{Op}_{1/2}(2^{\nu/2}\, e^{\frac{i\pi\nu}{4}} \exp -2i\pi \|X\|^2). \tag{4}$$

On observera la différence essentielle entre cette transformation de Fourier, agissant sur l'espace des fonctions d'onde et nécessitant la donnée d'une norme symplectique sur $\mathbb{R}^{2\nu}$, et la transformation de Fourier qui échange les coordonnées de position et d'impulsion mais qui nécessite, au lieu de la donnée d'une norme symplectique, celle d'une <u>polarisation</u> (i.e. une décomposition appropriée de l'espace de phase) : c'est toujours avec en vue une généralisation de la première notion de transformation de Fourier que nous travaillerons. Si $B(X_1,X_2)$ est la forme quadratique définie par polarisation à partir de la norme symplectique $\| \ \|$, la forme

$$\tilde{B}(X_1,X_2) = B(X_1,X_2) + i\,[X_1,X_2] \tag{5}$$

est (cf. [8]) sesquilinéaire pour une structure complexe bien déterminée sur $\mathbb{R}^{2\nu}$; se donner deux éléments parmi la forme symplectique de $\mathbb{R}^{2\nu}$, la norme et la structure complexe détermine le troisième.

Les considérations qui précèdent suffisent,nous l'espérons, à expliquer le rôle que les variétés kählériennes jouent dans le processus de quantification. Dans la construction décrite plus loin, nous partirons de la structure complexe de la variété, et d'un fibré en droites holomorphe sur celle-ci (issu de la théorie de la préquantification, mais dépourvu de connection a priori), comptant sur une généralisation de la construction de Bergman de variétés kählériennes pour obtenir le reste de la structure.

Il reste à expliquer l'origine de l'hypothèse de symétrie. Soit, pour $Z = (z,\zeta) \in \mathbb{R}^{2\nu}$, τ_Z la "translation de phase", opérateur défini par

$$(\tau_Z u)(x) = u(x-z)\,e^{2i\pi \langle x - \frac{z}{2},\zeta\rangle}. \tag{6}$$

On pose aussi $\sigma_o u = \check{u}$, $\check{u}(x) = u(-x)$, et $\sigma_Z = \tau_{2Z}\, \sigma_o$. Ces transformations, que nous appellerons symétries de phase, quantifient les symétries géométriques de l'espace de phase, puisque pour tout symbole a l'on a :

(7) $$\sigma_Z \, Op_{1/2}(a) \, \sigma_Z = Op_{1/2}(X \mapsto a(2Z - X)).$$

On a aussi $(u,v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu))$ l'identité

(8) $$(Op_{1/2}(a)u,v) = 2^\nu \int a(X)\,(\sigma_X u,v)\,dX,$$

qui sera notre point de départ pour la généralisation de la quantification des symboles.

3. DESCRIPTION RAPIDE DU FONCTEUR DE QUANTIFICATION

La catégorie considérée est celle des Q-espaces. Un objet de cette catégorie est un triple $(M,E,E^{1/2})$, où M est une variété complexe connexe paracompacte de dimension complexe ν, et E et $E^{1/2}$ sont deux fibrés en droites complexes, holomorphes, au-dessus de M. On suppose que $E^{1/2}$ est une racine carrée de E, i.e. que les carrés d'un système de fonctions de transition holomorphes pour $E^{1/2}$ constituent un système de fonctions de transition holomorphes pour E ; désignant par $\Omega^{p,q}$ le fibré des formes de bidegré (p,q), on suppose enfin que l'on s'est donné une structure $\Omega^{\nu,\nu}$-hermitienne sur E, c'est-à-dire un champ C^∞ d'applications sesquilinéaires $(\ ,\ )_X : E_X \times E_X \to \Omega^{\nu,\nu}_X$ hermitiennes et définies positives, ce dernier adjectif étant justifié par le fait que M est canoniquement orientée.

Les isomorphismes de Q-espaces sont les triples $\kappa = (\kappa_o, \kappa, \kappa^{1/2}) : (M,E,E^{1/2}) \to (M',E',E'^{1/2})$ qui conservent les structures holomorphes, les structures fibrées, la structure $\Omega^{\nu\nu}$-hermitienne et la relation entre un fibré en droites et son carré.

Soit Q(M,E) l'espace de Hilbert des sections holomorphes de E, de carré sommable pour le produit scalaire

(9) $$(f,g) = \int_M (f(X),g(X))_X \, .$$

Bien qu'il y ait un candidat pour une interprétation quantique de cet espace, ce n'est pas encore l'espace des fonctions d'onde. Nous dirons que $(M,E,E^{1/2})$ vérifie la condition de Bergman (B) si, pour tout $X \in M$, il existe suffisamment d'éléments de Q(M,E) pour que leurs quotients par l'un d'eux définissent au voisinage de X un système de coordonnées holomorphes admissibles. Une généralisation de la construction de Bergman (cf. A. Weil [12]) permet alors de définir sur M une structure kählérienne, invariante par la première composante κ_o de tout automorphisme du Q-espace $(M,E,E^{1/2})$. Nous désignerons par $d\mu$ la mesure kählérienne associée.

On peut alors définir l'espace $Q(M,\bar{E}^{1/2})$ des sections antiholomorphes du fibré $\bar{E}^{1/2}$ (le conjugué de $E^{1/2}$), de carré sommable pour le produit scalaire

(10) $$(f,g) = \int_M (f(X),g(X))_X (d\mu(X))^{1/2}.$$

C'est cet espace $Q(M,\bar{E}^{1/2})$ qui constituera notre espace de Hilbert de fonctions d'onde.

Un isomorphisme κ d'un Q-espace $(M,E,E^{1/2})$ sur un Q-espace $(M',E',E'^{1/2})$ vérifiant (B) permet de construire une transformation unitaire U_κ de $Q(M',\bar{E}'^{1/2})$ sur $Q(M,\bar{E}^{1/2})$.

Nous dirons qu'un Q-espace $(M,E,E^{1/2})$ est symétrique s'il vérifie (B) et si pour tout $X \in M$ il existe un automorphisme $(S_X^o, S_X, S_X^{1/2})$ de $(M,E,E^{1/2})$ vérifiant (i) et (ii) :

(i) S_X^o est un automorphisme involutif de M dont X est un point fixe isolé

(ii) $\forall \xi \in E_X^{1/2}$, $S_X^{1/2}\xi = e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} \xi$.

On pose pour simplifier $U_{S_X} = \Sigma_X$, et l'on définit la fonction de Wigner W(u,v) de deux fonctions d'onde u et v par

(11) $$W(u,v,X) = 2^\nu e^{\frac{i\pi\nu}{2}} (\Sigma_X u,v) ,$$

après avoir noté que $(S_X^o,\ S_X,\ S_X^{1/2})$ est nécessairement unique.

Enfin, à toute fonction $a \in L^1(M,d\mu)$ (a est un symbole), on associe l'opérateur Q(a) borné sur $Q(M,\bar{E}^{1/2})$ défini par

(12) $$(Q(a)u,v) = \int a(X)W(u,v,X)d\mu\,(X) .$$

Naturellement, il y a en général, pour que cette formule définisse Q(a) comme opérateur borné sur $Q(M,\bar{E}^{1/2})$, des conditions sur a moins sévères que l'appartenance à $L^1(M,d\mu)$, mais ce n'est pas l'objet de ce travail. L'essentiel est que, si κ est un isomorphisme de Q-espaces symétriques, la formule (3) est bien vérifiée.

Dans les deux prochains paragraphes, nous expliciterons la construction que nous venons de faire dans le cas euclidien, puis dans le cas important où M est le domaine de Siegel $Sp(n,\mathbb{R})/U(n)$. D'autres cas de la classification d'E. Cartan (cf. Helgason [5]) paraissent prometteurs, en particulier $SO_o(p,2)/SO(p) \times SO(2)$ pour les applications à la relativité. Enfin, il convient de ne pas oublier les degrés de liberté supplémentaires de la théorie constitués par le choix du fibré E.

4. LE CAS EUCLIDIEN

Soit $\theta \in P_\nu$, espace des matrices symplectiques symétriques positives de rang ν, et soit $\|X\|_\theta = (\theta^{-1}X,X)^{1/2}$ la norme symplectique associée; soit V une matrice symplectique telle que $VV' = \theta$; posant $X_j = x_j + i\xi_j$, $1 \leqslant j \leqslant \nu$, les fonctions $X_j^\theta = X_j \circ V^{-1}$ constituent un système de coordonnées holomorphes sur $\mathbb{R}^{2\nu}$ compatible avec $\| \ \|_\theta$, définissant sur $\mathbb{R}^{2\nu}$ la structure de variété complexe M^θ . On pose $dX^\theta = dX_1^\theta \wedge \ldots \wedge dX_\nu^\theta$, c'est une forme de bidegré $(\nu,0)$ qui ne dépend que de θ à la multiplication près par un nombre complexe de module 1.

Le fibré E_θ est le fibré $\Omega^{\nu,o}$ (pour la structure de fibré en droites complexes de celui-ci), muni de la structure $\Omega^{\nu,\nu}$ hermitienne pour laquelle

$$(f,g)_X = 2^{-\nu} i^{\nu^2} f(X) \wedge \overline{g}(X),$$

et de la structure holomorphe <u>dépendant de</u> θ pour laquelle la section

$$s_1(X) = 2^{\nu/2} e^{-\pi\|X\|_\theta^2} dX^\theta \tag{13}$$

est holomorphe.

Il n'y a alors aucune difficulté pour définir $E_\theta^{1/2}$, ce qui donne naissance à un Q-espace $(M ,E_\theta,E_\theta^{1/2})$.

La condition de Bergman est vérifiée (ce ne serait pas le cas pour la structure holomorphe standard de $\Omega^{\nu,o}$!) et la partie imaginaire de la forme de Kähler est exactement la forme symplectique canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soit $L_\theta = Op_{1/2}(\pi \|X\|_\theta^2)$ l'oscillateur harmonique attaché à θ (cf. [7] ou [8]) et soit φ_θ son état fondamental, explicitable à l'aide de la représentation de Siegel. Renvoyons à la formule (6) pour la définition des translations de phase.

A toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^\nu)$, associons la section $K_\theta u$ de $\bar{E}_\theta^{1/2}$ définie par

(14) $$(K_\theta u)(x) = (u, \tau_X \varphi_\theta)(d\bar{X}^\theta)^{1/2} .$$

L'opérateur K_θ est une transformation unitaire de $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ sur $Q(M, \bar{E}^{1/2})$: les physiciens l'appellent la représentation de Bargmann-Fock dans le cas où θ est la matrice identité.

Si κ_o est une transformation linéaire symplectique de $\mathbb{R}^{2\nu}$ elle définit un isomorphisme $\kappa = (\kappa_o, \kappa, \kappa^{1/2})$ de $(M^\theta, E_\theta, E_\theta^{1/2})$ sur $(M^{\theta'}, E_{\theta'}, E_{\theta'}^{1/2})$ à condition que θ et θ' soient liés par l'identité $\|X\|_\theta = \|\kappa_o(X)\|_{\theta'}$. En composant avec les deux transformations K_θ et $K_{\theta'}$, un diagramme commutatif exprime que la transformation unitaire U_{κ_o} n'est autre que, vue sous un autre angle, la transformation métaplectique qui relève κ_o par l'homomorphisme de Segal.

Enfin, pour ce qui concerne les symétries, il convient de poser

(15) $$S_X^o(Z) = 2X - Z$$

et

(16) $$S_X^{1/2}((dZ^\theta)^{1/2}) = e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} e^{2i\pi[X,Z]}(dZ^\theta)^{1/2} .$$

Définissant, pour tout symbole a, Q(a) par (12), on a enfin

(17) $$K_\theta^{-1} Q(a) K_\theta = Op_{1/2}(a) .$$

Le paragraphe qui précède est ainsi une description en termes invariants par changement de coordonnées, de la quantification de Weyl; en revanche, l'étude qui suit du domaine de Siegel nous amène à une situation intrinsèquement différente.

5. LE CAS DU DOMAINE DE SIEGEL

Soient n un entier ≥ 1, et $\nu = \frac{n(n+1)}{2}$. On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^\nu$ à l'espace des matrices symétriques réelles de rang n, muni du produit scalaire défini par (A,B) = Tr AB. Soit Γ le cône convexe $\subset \mathbb{R}^\nu$ constitué des matrices semi-définies positives, et soit $\mathring{\Gamma}$ son intérieur. Le domaine de Siegel considéré est $M_\nu = \mathring{\Gamma} + i\,\mathbb{R}^\nu$: son point courant est la matrice $Y = Y_1 + iY_2$, dont les termes sur la diagonale et au-dessus constituent un système de coordonnées holomorphes pour M_ν. On pourra consulter H. Maass [6] pour tout ce qui concerne ce domaine. Rappelons d'ailleurs (cf. [7]) que la correspondance entre un oscillateur harmonique et son état fondamental permet d'identifier P_n (dont nous avons parlé au début du § 4) à M_ν : cette correspondance est, à peu de choses près, celle de Siegel.

On prend pour E le fibré $\Omega^{\nu,0}$ muni de sa structure $\Omega^{\nu,\nu}$-hermitienne et de sa structure holomorphe naturelles : la construction de Bergman marche comme il est bien connu, et définit sur M_ν une structure kählérienne que l'on peut expliciter [6]. Désignant par dm les mesures de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ ou sur $\mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$, la formule

$$d\mu(Y) = (\det Y_1)^{-(n+1)} dm(Y) \quad , \qquad Y = Y_1 + iY_2 \ , \tag{18}$$

définit une mesure $d\mu$ proportionnelle à la mesure de Kähler : c'est $d\mu$ que nous choisirons dans ce qui suit, elle est invariante par les automorphismes complexes de M_ν.

Le domaine M_ν est symétrique : il convient de définir (cf. § 3)

$$S_Y^0(Z) = iY_2 + Y_1(Z - iY_2)^{-1}Y_1 \quad , \tag{19}$$

et S_Y au moyen de l'image réciproque par S_Y^0 agissant sur les $(\nu,0)$-formes.

Il y a tout de suite une légère difficulté si l'on cherche à appliquer à la lettre le programme tracé au § 3 : c'est que la norme sur $Q(M_\nu,\bar{E}^{1/2})$ apparaît comme le produit d'une norme d'interprétation agréable par une constante numérique malheureusement infinie!

Cette singularité est due à des pôles d'une fonction gamma généralisée (voir [6], p.76) : nous allons donc imiter les physiciens et renormaliser la situation.

A cet effet, on introduit, pour α réel, les puissances $\bar{E}^\alpha$ du fibré $\Omega^{0,\nu}$, ce qui permet de définir un espace de Hilbert $Q(M\ ,\bar{E}^\alpha)$. Si $\alpha \geqslant 1$, et $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{n+1}$, une forme du théorème de Paley-Wiener permet d'identifier $Q(M_\nu,\bar{E}^\alpha)$ à l'espace de Hilbert H_λ des fonctions u mesurables sur $\mathbb{R}^\nu$, à support contenu dans Γ, vérifiant

$$\|u\|^2_{H_\lambda} = \int |u(X)|^2 (\det X)^{-\lambda} dm(X) < \infty \ . \tag{20}$$

Nous conviendrons de choisir H_0 comme espace de fonctions d'onde.

Lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$, la transformation de Laplace n'identifie pas H_0 à $Q(M_\nu,\bar{E}^{1/2})$, mais à un espace de Hardy : nous n'utilisons pas cette transformation, recourant plutôt au prolongement analytique en α pour l'étude des opérateurs sur H_0.

On désigne par sgn A la signature d'une matrice symétrique réelle A.

Théorème : Soit $Y \in M_\nu$; soit $\sigma_Y^{1/2}$ l'opérateur agissant sur $H_o = L^2_\Gamma(\mathbb{R}^\nu, dm)$ défini par $\sigma_Y^{1/2} = \mathcal{F}\hat{\sigma}_Y^{1/2}\mathcal{F}^{-1}$, où $\mathcal{F}$ est la transformation de Fourier ordinaire, et

$$(21) \qquad (\hat{\sigma}_Y^{1/2} g)(\Xi) = \left(\frac{\det Y_1}{|\det(\Xi - Y_2)|}\right)^{\frac{n+1}{2}} (\exp i\pi\tfrac{n+1}{4}\mathrm{sgn}(\Xi - Y_2))g(Y_2 + Y_1(Y_2 - \Xi)^{-1}Y_1).$$

Alors $\sigma_Y^{1/2}$ est une isométrie de H_o sur lui-même.

La transformation $\sigma_Y^{1/2}$ doit être considérée comme une "symétrie de phase". Cette formule conduit à la définition qui suit des opérateurs "pseudo-différentiels" sur M_ν : pour tout $a \in L^1(M_\nu, d\mu)$, on définit l'opérateur $Q(a)$ sur H_o par

$$(22) \qquad Q(a)u(X) = 2^\nu \int_{M_\nu} a(Y)(\sigma_Y^{1/2}u)(X)d\mu\ (Y), \qquad X \in \mathbb{R}^\nu .$$

Cette règle de quantification permet d'associer une formule du type (3) à tout automorphisme κ de la structure complexe de M_ν .

On peut, au moins dans le cas n = 1, expliciter $Q(a)$ sous une forme plus proche de la représentation traditionnelle des opérateurs : posant $Q(a) = \mathcal{F}\hat{Q}(a)\mathcal{F}^{-1}$, le noyau k de $\hat{Q}(a)$ est donné par

$$(23) \qquad k(\xi,\eta) = -\frac{1}{i(\xi-\eta)} \int_o^1 \frac{a(|\xi-\eta|\sqrt{s(1-s)} + i((1-s)\xi + s\eta))}{s(1-s)} ds .$$

On notera que le noyau $-\frac{1}{i\pi(\xi-\eta)}$ interprété comme valeur principale, fournirait l'opérateur identique sur H_o, espace constitué de fonctions à support dans la demi-droite positive : on peut donc interpréter $Q(1)$ comme le produit de l'opérateur identique par une constante infinie! Nous sommes persuadés cependant que, malgré ses singularités, ce calcul des opérateurs, et ceux que l'on peut déduire des autres modèles, irréductibles ou non, de la classification d'E. Cartan, se révéleront utiles dans les équations aux dérivées partielles, en particulier pour certains problèmes avec bords ou arêtes.

6. QUANTIFICATION DE CERTAINS GROUPES DE ROTATIONS

Les espaces hermitiens symétriques possédant des groupes transitifs d'isométries G (voir [5] , théorème 6.1 pour une description de ceux-ci), la règle de quantification fournit "à peu près" (à cause des nombres complexes de module 1) une représentation unitaire de tels groupes G, et même une famille de représentations si l'on ne se limite pas aux formes de poids $\frac{1}{2}$; à cet égard, il est naturel que la formule (21) présente une grande analogie avec les formules développées par exemple par N. J. Vilenkin [10] ou Gelfand, Graev, Pyatetskii-Shapiro [3] dans les chapitres consacrés aux réprésentations de $SL(2,\mathbb{R})$.

Si, dans le cas euclidien avec la norme canonique, on quantifie le groupe de rotations de $\mathbb{R}^{2\nu}$ défini par les matrices-blocs $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, on obtient un sous-groupe du groupe métaplectique (mais, si ν est impair, il faut aller jusqu'à $\theta = 4\pi$ pour revenir à l'opérateur identique) ; pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on obtient l'opérateur $e^{-\frac{i\pi\nu}{4}}\mathcal{F}$; le générateur infinitésimal du groupe unitaire est $-iL$, où L est l'oscillateur harmonique $Op_{1/2}(\pi\,\|X\|^2)$; enfin, l'état fondamental de L est précisément la fonction "élémentaire" qui définit la représentation de Bargmann-Fock.

Bien entendu, tout cela reste valable, mutatis mutandis, dans le cas euclidien, si la norme symplectique utilisée n'est pas la norme canonique. Mais, ce qui est plus intéressant, nous allons montrer qu'une situation tout à fait analogue (la représentation de Bargmann-Fock étant remplacée par celle de Laplace) se produit dans le cas du domaine de Siegel.

Le groupe de rotations utilisé, centré en $I \in M_\nu$ pour simplifier les formules, est ici donné par

$$R^o_\beta(Z) = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\, I + i\cos\frac{\beta}{2}\, Z}{\sin\frac{\beta}{2}\, Z + i\cos\frac{\beta}{2}\, I}\,, \qquad \beta \in \mathbb{R}\,, \tag{24}$$

où l'on emploie la notation fractionnaire pour des matrices qui commutent : la raison de ce choix est que, pour $n = 1$, (24) définit effectivement la rotation d'angle β autour de 1.

On montre alors qu'il existe un groupe de transformations unitaires $(\rho^{1/2}_\beta)_{\beta\in\mathbb{R}}$ de $H_o = L^2_\Gamma(\mathbb{R}^\nu, dm)$, tel que, pour $0 < \beta < 2\pi$, on ait $\rho^{1/2}_\beta = \mathcal{F}\hat{\rho}^{1/2}_\beta\,\mathcal{F}^{-1}$, avec

$$\begin{aligned}(\hat{\rho}^{1/2}_\beta g)(\Xi) = {} & e^{-\frac{i\pi\nu}{2}}\left|\det(\sin\tfrac{\beta}{2}\,\Xi + \cos\tfrac{\beta}{2}\, I)\right|^{-\frac{n+1}{2}}\\ & \exp i\pi\,\frac{n+1}{4}\,\mathrm{sgn}(\sin\tfrac{\beta}{2}\,\Xi + \cos\tfrac{\beta}{2}\, I).g\left(\frac{\cos\frac{\beta}{2}\,\Xi - \sin\frac{\beta}{2}\, I}{\sin\frac{\beta}{2}\,\Xi + \cos\frac{\beta}{2}\, I}\right)\end{aligned} \tag{25}$$

Bien entendu, $\rho^{1/2}_{\frac{\pi}{2}}$ peut être considéré comme une transformation de Fourier "interne" sur H_o.

Soit $\frac{\partial}{\partial X}$ la matrice symétrique telle que

$$\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)_{jj} = \frac{\partial}{\partial X_{jj}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)_{jk} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X_{jk}} \qquad \text{si} \quad j < k.$$

On peut montrer que le générateur infinitésimal du goupe $\rho_\beta^{1/2}$ est $-iL$, avec

(26) $$L = -\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial}{\partial X}\, X\, \frac{\partial}{\partial X}\right) + \pi\,\mathrm{Tr}\, X\ .$$

La première valeur propre de L est $\frac{\nu}{2}$ (comme dans le cas euclidien); elle est simple, et l'état correspondant est donné par

(27) $$u(X) = e^{-2\pi\,\mathrm{Tr}X}c(X)\ ,$$

où c est la fonction caractéristique de Γ : c'est bien u qui définit la valeur en $Y = I$ de la représentation de Laplace; si $n = 1$, les autres états propres sont les produits de u par des polynômes de Laguerre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, P. Sternheimer : Deformation theory and quantization, Ann. of Physics III, 1 (1978), p.61-110.

[2] L. Boutet de Monvel : Quantized contact manifolds, résumé multigraphié, meeting des Houches (sept. 1979).

[3] I. M. Gelfand , M. I. Graev, I. I. Pyatetskii-Shapiro : Representation theory and automorphic functions, Saunders 1969.

[4] V. Guillemin, S. Sternberg : Geometric asymptotics, Math. Surveys n°14, A.M.S., 1977.

[5] S. Helgason : Differential geometry and symmetric spaces, Ac. Press, 1962.

[6] H. Maas : Siegel's modular forms and Dirichlet series, Lecture Notes in Math. 216, Springer 1970.

[7] A. Unterberger : Oscillateur harmonique et opérateurs pseudo-différentiels, Ann. Inst. Fourier 29, 3 (1979), 201-221.

[8] A. Unterberger : Les opérateurs métadifférentiels, à paraître aux Proceedings du meeting des Houches (sept. 1979).

[9] A. Unterberger : A quantization of Hermitian symmetric spaces, à paraître.

[10] N. J. Vilenkin : Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes, Dunod 1969.

[11] N. R. Wallach : Symplectic geometry and Fourier analysis, Math. Sc. Press (1977).

[12] A. Weil : Variétés kählériennes, Hermann 1958.

*
* *
*