Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

A. Grigis

Propagation des singularités au bord d'ouverts de C^n

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. nº 15, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A16_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 9 - 1 9 8 0

PROPAGATION DES SINGULARITES

AU BORD D'OUVERTS DE $\mathbb{C}^n$

par A. GRIGIS

Exposé n° XV

5 Février 1980

Le but de l'exposé est de décrire quelques phénomènes de propagation des singularités en analyse complexe. Le théorème central utilisé (théorème 2) est une extension à des systèmes du résultat [10] sur des opérateurs pseudo-différentiels (scalaires) à caractéristiques doubles, qui a fait l'objet d'une conférence à Saint Cast en 1979. Nous nous intéressons aux singularités des solutions du problème $\bar{\partial}$-Neumann ou du laplacien induit $\square_b$ au bord d'ouverts de $\mathbb{C}^n$ où la forme de Levi garde un rang constant. On peut rapprocher nos résultats de questions posées par J. J. Kohn [13]. On trouvera des démonstrations complètes dans un article à paraître.

§ 1. RAPPELS SUR LE PROBLEME DE $\bar{\partial}$-NEUMANN

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$. On appellera X le bord de Ω et on supposera X de classe $\mathcal{C}^\infty$. Localement Ω est défini par une inégalité $\rho < 0$ et

$$X = \{\rho = 0\}$$

où ρ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ réelle dont la différentielle est non nulle au voisinage de X.

La forme de Levi associée à ρ, au point $x_0 \in X$, est la forme hermitienne

$$\mathcal{L}_{(x_0)}(h) = \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} \frac{\partial^2 \rho(x_0)}{\partial z_j \, \partial \bar{z}_k} h_j \bar{h}_k \qquad h \in T'_{x_0}$$

sur l'espace complexe des vecteurs holomorphes tangents à X en x_0 $\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(x_0) h_j = 0\right)$.

Une (0,q)-forme sur Ω s'écrit

$$u = \sum_{|J| = q} u_J \, d\bar{z}_J \in \Lambda^{0,q}$$

avec $d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge d\bar{z}_{j_2} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_q} \qquad 1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_q \leqslant n$.

L'opérateur $\bar{\partial} : \Lambda^{0,q} \to \Lambda^{0,q+1}$ s'écrit :

$$\bar{\partial} u = \sum_{|J|=q} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_J}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_J .$$

Si u et v sont deux (0,q)-formes à coefficients L^2 on pose

$$(u,v)_o = 2^q \sum_{|J|=q} \int_\Omega u_J \bar{v}_J \, dx\, dy$$

On note $\bar{\partial}^*$ l'adjoint formel de $\bar{\partial}$

$$\bar{\partial}^* : \Lambda^{o,q+1} \to \Lambda^{o,q}$$

et on forme le laplacien $\square = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$, qui est un système d'opérateurs différentiels, diagonal et elliptique

$$\square u = -\frac{1}{2} \sum_{|J|=q} \Delta u_J \, d\bar{z}_J$$

Le problème de $\bar{\partial}$-Neumann ([7]) est le problème aux limites suivant :

Etant donné $f \in \Lambda^{o,q}$ trouver $u \in \partial^{o,q}$ solution de

$$(\bar{\partial} - N) \qquad \begin{cases} \square u = f \\ u \in \mathcal{D}(\bar{\partial}^*) \\ \bar{\partial} u \in \mathcal{D}(\bar{\partial}^*) \end{cases}$$

Les conditions aux limites peuvent s'exprimer autrement. Si $\sigma(\bar{\partial}^*)(x,d\rho)$ est la matrice valeur au point $(x,d\rho) \in T^*_X\Omega$ du symbole de $\bar{\partial}^*$ elles s'écrivent

$$\begin{cases} \sigma(\bar{\partial}^*)(x,d\rho)u = 0 \\ \sigma(\bar{\partial}^*)(x,d\rho)\bar{\partial}u = 0 \end{cases} \qquad \text{sur } X .$$

Si $\bar{\partial} f = 0$ et si f est orthogonale aux formes harmoniques, $v = \bar{\partial}^* u$ est la solution minimale dans L^2 de $\bar{\partial} v = f$.

La question est la régularité jusqu'au bord de la solution de $(\bar{\partial}$-N), elle a été beaucoup étudiée. Donnons quelques résultats connus, en nous limitant au cas pseudoconvexe (la forme de Levi est positive) pour simplifier.

1) Si en un point $x_o \in X$ la forme de Levi a r valeurs propres > 0, alors $(\bar{\partial}$-N) est $\frac{1}{2}$ sous-elliptique au voisinage de x_o dans les (0-q)-formes si $q > n-1-r$ (voir par exemple Hörmander [11]).

2) Si C est une variété complexe de dimension d passant par x_o et contenue dans le bord, alors $(\bar{\partial}$-N) n'est pas hypoelliptique au voisinage de x_o dans les (0,q)-formes $q \leqslant d$ (d'après les résultats de [13],[6],[4]).

Les conditions sur q qui interviennent dans 1) et 2) sont des expressions de la condition Z(q) (ou non Z(q)) usuelle. Les résultats connus sont bien plus avancés : pour le 1) étude de la ε-sous-ellipticité ($\varepsilon < \frac{1}{2}$) et pour le 2) utilisation de la dimension holomorphe mais nous voulons seulement donner une idée (voir M. Derridj [5] ou la bibliographie de [13]).

Nous nous intéressons aux résultats négatifs (comme en 2) et plus précisément au lieu des singularités des solutions (éventuelles) de $(\bar{\partial}$-N).

<u>Conjecture 1</u> : Soit V un voisinage de $x_o \in X$ et C une variété complexe passant par x_o et contenue dans X. Soit f une (O,q) forme $\mathscr{C}^\infty$ sur $\bar{\Omega} \cap V$. Si u est une solution de $(\bar{\partial}$-N) et $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de x_o, alors u est $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de la composante connexe de $C \cap V$ qui contient x_o (réciproquement si u est singulière en x_o elle est singulière sur $(C \cap V)_{x_o}$).

Dans un langage moins précis on dit que les singularités se propagent le long de la sous-variété C. Cette expression n'a pas le même sens que celui donné par J. J. Kohn [13] ou K.Diederich, P. Pflug [6].

Pour étudier $(\bar{\partial}$-N) on se ramène au bord. L'étude de la régularité pour ce problème est équivalente à celle pour un système d'opérateurs pseudodifférentiels sur le bord (voir Trèves [19], Øvrelied [14], Greiner-Stein [9], Tartakoff [18] ou encore Hörmander [12]).

Ce système $\mathscr{B}$ est de degré 1, à caractèristiques doubles, très lié à $\square_b$.

$$\square_b = \bar{\partial}_b \bar{\partial}_b^* + \bar{\partial}_b^* \bar{\partial}_b$$

$\bar{\partial}_b$: opérateur de Cauchy-Riemann induit sur X
$\bar{\partial}_b^*$: adjoint formel de $\bar{\partial}_b$.

Le système $\square_b$ est à caractéristiques doubles sur $\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ avec

$$\Sigma^\pm = \{(x,\lambda\tau), x \in X, \lambda \in \mathbb{R}^\pm, \tau = i(\bar{\partial}-\partial)\rho|_X\}$$

(Σ est donc un fibré en droites sur X).

$\mathscr{B}$ est elliptique hors de Σ^+, et sur Σ^+, $\mathscr{B}$ a les mêmes invariants que $\square_b$ (à la mutliplication par un O.P.D. elliptique près). Ces invariants seront précisés pour $\square_b$ au paragraphe 4.

§ 2. HYPERSURFACES FEUILLETEES

Soit X l'hypersurface de $\mathbb{C}^n$ constituée par le bord de Ω et V un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Dans toute la suite on fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse O1 : On suppose que dans $V \cap X$, la forme de Levi garde un rang constant r.

Pour éviter les trivialités on supposera $r < n-1$. (Ω non strictement pseudoconvexe).

Proposition 1 : (voir par exemple Freemann [8] ou Sommer [17]). Sous l'hypothèse O1, l'hypersurface réelle X est, dans V, feuilletée par des variétés complexes de dimension n-1-r. L'espace tangent a ces sous-variétés est le radical de la forme de Levi.

Théorème 1 : Soit Ω un ouvert pseudoconvexe, dont le bord X vérifie l'hypothèse O1 dans un ouvert V. Le problème $(\bar\partial\text{-}N)$ est hypoelliptique dans V pour les $(0,q)$-formes si et seulement si $q > n-1-r$. Si $q \leqslant n-1-r$ les singularités des solutions se propagent sur les feuilles complexes contenues dans $V \cap X$ (la conjecture 1 est vérifiée pour chacune de ces feuilles).

Remarque 1 : Seule la partie propagation des singularités de ce théorème est nouvelle. On peut énoncer le théorème 1 sans hypothèse de pseudoconvexité, c'est à dire dans le cas a r_+ valeurs propres > 0 et r_- valeurs propres < 0, r_+ et r_- constants dans V.

Preuve de la proposition 1 : Considérons la forme réelle $\tau = \frac{1}{i}(\bar\partial - \partial)\rho|X$.
Elle s'annule sur les fibrés complexes T' et T" des champs tangents aX respectivement holomorphes et antiholomorphes. En posant :

$$\langle Z,W\rangle = i\langle\tau, [Z,\overline{W}]\rangle \qquad Z,W \in T'\oplus T''$$

on définit sur $T'\oplus T''$ une forme hermitienne dont la restriction à T' est la forme de Levi associée à ρ. Remarquons que $T'' = \overline{T'}$ et donc que $T'\oplus T'' = (\mathrm{Re}\, T')\oplus\mathbb{C}$
D'autre part T' et T" sont formellement intégrables; on en conclut que le radical de la forme ci-dessus est $(\mathrm{Re}\, T'_o)\otimes\mathbb{C}$ ou $T'_o \subset T'$ est le radical de la forme de Levi. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Re}\, T'_o$ est formellement intégrable, ce qui résulte immédiatement de l'identité de Jacobi. D'après le théorème de Frobenius $V \cap X$ est feuilletée par des feuilles complexes dont le fibré tangent est T'_o le radical de la forme de Levi.

Remarque 2 : D'après C. Rea [15] ce feuilletage n'est pas toujours la restriction à X d'un feuilletage de l'ouvert $V \subset \mathbb{C}^n$ (même si on restreint V).

§ 3. THEOREME MICROLOCAL

Nous énonçons ici le résultat microlocal de propagation des singularités qui permet de montrer le théorème 1 ainsi que le théorème 3 sur $\square_b$ (voir § 4).

Soit E un fibré de dimension ν sur une variété réelle de dimension μ et P un opérateur pseudo-différentiel de E dans E de degré m (voir [12]). Localement E est le fibré trivial $W \times \mathbb{C}^\nu$, W ouvert de $\mathbb{R}^\mu$ et P est un $\nu \times \nu$ système d'opérateurs pseudodifférentiels sur W classiques de degré m. Le symbole de P s'écrit

$$p(x,\xi) \sim \sum_{j=o}^{\infty} p_{m-j}(x,\xi)$$

et chaque terme p_{m-j} est une $\nu \times \nu$ matrice homogène de degré m-j en ξ.

Soit U un ouvert conique de $T^*W\backslash\{0\}$ et Σ une sous-variété conique de U.

Hypothèse 1 : On suppose que la restriction à Σ de la forme symplectique ω garde un rang constant et que le champ radial n'est pas orthogonal à Σ pour ω. La variété Σ admet un feuilletage canonique et est dite ω-feuilletée régulière (voir [10]).

Hypothèse 2 : On suppose que la partie principale de P s'écrit

$$p_m(x,D)\,\mathrm{Id}_E$$

avec $p_m(x,D)$ O.P.D. scalaire dont le symbole p_m est réel elliptique (> 0) dans $U\backslash\Sigma$ et s'annule à l'ordre 2 exactement sur Σ.

Définition 1 : On appelle invariant de Melin de P le morphisme de fibrés $E|_\Sigma \to E|_\Sigma$ défini (sur Σ) par :

$$I(P) = (p_{m-1})_{\nu\times\nu} - \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{\mu}\frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\,\partial x_j}\,\mathrm{Id}_\nu + \mathrm{tr}^+(\mathrm{Hess}\ p_m)\,\mathrm{Id}_\nu$$

Hypothèse 3 : On suppose que I(P) est autoadjoint positif et de rang constant r' sur Σ.

Soit π un système d'opérateurs pseudodifférentiels de degré 0 dont le symbole coïncide sur Σ avec la projection orthogonale sur le noyau de I(P). Il est possible de construire un tel système et il est unique modulo les systèmes dont les symboles s'annulent à l'ordre 1 sur Σ . Dans le cas où I(P) est bijectif on peut prendre $\pi = 0$ et si I(P) est nul (sur Σ) on peut prendre $\pi = Id_{\nu}$.

Si $u = (u_1,\ldots,u_\nu)$ est une section distribution de E on pose $WF(u) = \bigcup_{i=1}^{\nu} (WFu_i)$.

<u>Théorème 2</u> : Soit P un système tel que les hypothèses 1, 2 et 3 soient vérifiées et π défini ci-dessus. On a pour u section distribution de E :

i) Dans $U\setminus\Sigma$, $WF(u) = WF(Pu)$ (hypoellipticité)

ii) Sur Σ , $WF(u) = WF(Pu) \cup WF(\pi u)$ (hypoellipticité conditionnelle)

iii) $WF(u) \setminus WF(Pu)$ est une réunion de feuilles canoniques de Σ (propagation des singularités).

<u>Remarque 3</u> : La partie i) est une banalité, car on a supposé P elliptique dans $U \setminus \Sigma$; on aurait pu aussi bien le supposer seulement hypoelliptique.

<u>Remarque 4</u> : Si $r' = \nu$ alors P est hypoelliptique dans U car $\pi = 0$ et $WF(u) = WF(Pu)$ dans U. Dans ce cas P admet une paramétrixe dans la classe de L. Boutet de Monvel (voir [1] et [3]).

<u>Idée de la preuve</u> : On utilise la méthode de réduction de Grusin après avoir simplifié P à l'aide d'une transformation par un opérateur intégral de Fourier. Ceci se fait à peu près comme dans le cas scalaire [10] . On est ramené à l'étude d'un système $E^{\pm}$ du type ci-dessus avec Σ involutive et $I(P) = 0$. On montre la propagation des singularités pour $E^{\pm}$ en adaptant aux systèmes le travail de J. Sjöstrand [16] qui utilise des inégalités de Carleman.

§ 4. <u>L'OPERATEUR</u> $\square_b$

Nous allons décrire, un peu en détails, le résultat pour l'opérateur $\square_b$ en vue d'éclairer le théorème 2.

On peut se placer sur une variété presque quasi complexe (de dimension 2n-1) ou en particulier sur le bord d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$. On suppose cette variété munie d'une métrique hermitienne (voir [2]).

Soit T" le fibré complexe des champs antiholomorphes tangents à X. Soient $\bar{Z}_1,\dots,\bar{Z}_{n-1}$ une base orthogonale de T" et $\bar{\omega}_1,\dots,\bar{\omega}_{n-1}$ la base duale. Une (O,q)-forme sur X s'écrit :

$$u = \sum_J u_J \, \bar{\omega}_J \in \Lambda^q T''$$

et on a

$$\bar{\partial}_b u = \sum_{jJ} \bar{Z}_j u_J \, \bar{\omega}_j \wedge \bar{\omega}_J + \sum_J u_J \, \bar{\partial}_b \, \bar{\omega}_J$$

$$\bar{\partial}_b^* u = - \sum_{kJ} Z_k u_J \, \bar{\omega}_k \lrcorner \, \bar{\omega}_J + \sum_J u_J \, \bar{\partial}_b^* \, \bar{\omega}_J$$

Après un calcul simple qui se trouve dans [9] et beaucoup d'autres on obtient :

$$- \Box_b u = \sum_J \Big(\sum_{j=1}^{n-1} Z_j \, \bar{Z}_j \Big) u_J \; \bar{\omega}_J$$

$$+ \sum_{j,k,J} [\bar{Z}_j , Z_k] \, u_J \, \bar{\omega}_j \wedge (\bar{\omega}_k \lrcorner \, \bar{\omega}_J)$$

$$+ \mathcal{E}(u, \bar{\partial}_b u, \bar{\partial}_b^* u)$$

Dans $\mathcal{E}(u, \bar{\partial}_b u, \bar{\partial}_b^* u)$ on représente une somme de termes où u, ou $\bar{\partial}_b u$ ou $\bar{\partial}_b^* u$ sont multipliées par des matrices (c'est-à-dire des systèmes d'opérateurs différentiels de degré O).

Le terme principal de $\Box_b$ est donc diagonal, et il vérifie l'hypothèse 2 avec (en notant $\sigma(Z_j)$ le symbole de Z_j) :

$$(*) \qquad \begin{aligned} \Sigma &= \{\mathrm{Re}\, \sigma(Z_j) = \mathrm{Im}\, \sigma(Z_j) = 0 \qquad j = 1,\dots,n-1\} \\ \Sigma &= \{ (x, \lambda\tau) ,\ x \in X,\ \ \lambda \in \mathbb{R}^* \quad \tau = i(\bar{\partial} - \partial)\rho|_X \} \end{aligned}$$

Pour étudier le rang de la restriction à Σ de la forme symplectique on peut considérer la restriction à Σ de la matrice des crochets de Poisson des fonctions Re $\sigma(Z_j)$, Im $\sigma(Z_j)$ qui définissent Σ . Or on a :

$$\{\sigma(Z_j) , \sigma(\bar{Z}_{j'})\} \, (x,\lambda\tau) = \lambda \langle \tau, [Z_j , Z_{j'}] \rangle \, (x)$$

ce qui montre que l'hypothèse 1 sur Σ est vérifiée si on suppose que le forme de Levi a un rang constant (hypothèse O1).

Pour calculer l'invariant de Melin de $\square_b$ on calcule d'abord celui de $-\sum_{j=1}^{n=1} Z_j \bar{Z}_j$ qui vaut

$$\sum_{j=1}^{n-1} (|\lambda\lambda_j| - \lambda\lambda_j) \quad \text{au} \quad \text{point } (x_o, \lambda\tau) \in \Sigma$$

où $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}$ sont les valeurs propres de la matrice de Levi associée à ρ au point x_o.

D'autre part il faut calculer le symbole sur Σ du 2ème terme de $\square_b$ (les termes de degré 1 intervenant dans $\mathcal{E}(u, \bar{\partial}u, \bar{\partial}^* u)$ sont caractéristiques sur Σ). On trouve une matrice $\lambda \mathcal{L}^{(q)}_{(x_o)}$ qui est définie ainsi :

pour $q = o$ $\mathcal{L}^{(0)}$ est nulle

$q = 1$ $\mathcal{L}^{(1)}$ est la matrice de Levi (qu'on peut considérer comme un endomorphisme de $\Lambda^1 T''$) et

$$\mathcal{L}^{(q_1+q_2)}(\bar{\omega}_{J_1} \wedge \bar{\omega}_{J_2}) = (\mathcal{L}^{(q_1)} \bar{\omega}_{J_1}) \wedge \bar{\omega}_{J_2} + \bar{\omega}_{J_1} \wedge \mathcal{L}^{(q_2)} \bar{\omega}_{J_2}, \ |J_1| = q_1, \ |J_2| = q_2$$

Les valeurs propres de $\mathcal{L}^{(q)}$ sont donc les sommes $\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_q}$ $(1 \leqslant j_1 < \ldots j_q \leqslant n-1)$ et par suite les valeurs propres de $I(P)$ $(x_o, \lambda\tau)$ sont

$$\sum_{j=1}^{n-1} (|\lambda\lambda_j| - \lambda\lambda_j) + \lambda(\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_q}) \qquad 1 \leqslant j_1 \ldots \leqslant j_q$$

Elles sont positives ou nulles et si le rang de la forme de Levi est constant, le rang de $I(P)$ est constant sur chacune des nappes Σ^+ et Σ^- (hypothèse 3 vérifiée).

Supposons la matrice de Levi de rang constant r et Ω pseudodonvexe (pour simplifier). Les valeurs propres λ_j sont alors positives ou nulles. On peut alors trouver une base orthogonale de T''

$$\bar{Z}_1^+, \ldots, \bar{Z}_r^+, \quad \bar{Z}_1^o, \ldots, \bar{Z}_{n-1-r}^o$$

tels que les $\bar{Z}^o$ engendrent le noyau de la forme de Levi et les $\bar{Z}^+$ engendrent l'espace orthogonal. Soit

$$\bar{\omega}_1^+, \ldots, \bar{\omega}_r^+, \quad \bar{\omega}_1^o, \ldots, \bar{\omega}_{n-1-r}^o$$

la base duale.

(*) On appelle π_q^+ la projection orthogonale sur l'espace engendré par les formes $\bar{\omega}^o_{j_1}\wedge\ldots\wedge\bar{\omega}^o_{j_q}$ $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_q \leqslant n-1-r$ (non nul si $q \leqslant n-1-r$) et π_q^- la projection orthogonale sur l'espace engendré par les formes $\bar{\omega}^+_1\wedge\ldots\wedge\bar{\omega}^+_r \wedge \bar{\omega}^o_{j_1}\wedge\ldots\wedge\bar{\omega}^o_{j_{q-r}}$ $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{q-r} \leqslant n-1-r$ (non nul si $q \geqslant r$).

Remarquons que les feuilles canoniques de Σ se projettent sur les feuilles complexes de X et rappelons que le support singulier est la projection sur X du front d'onde (contenu dans T^*X). On déduit du théorème 2 (avec $\mu = 2n-1$, $\nu = C^q_{n-1}$, $\nu - r'^+ = C^q_{n-1-r}$, $\nu - r'^- = C^{q-r}_{n-1-r}$) le

<u>Théorème 3</u> : Soit $\square_b$ sur le bord X d'un ouvert r de $\mathbb{C}^n$ tel que l'hypothèse 1 soit vérifiée sur $V \cap X$, ouvert relatif de X. Soient Σ et $\pi_q^{\pm}$ définis comme ci-dessus (*). On a pour u (0,q)-forme :

i) $WF(u) = WF(\square_b u)$ hors de Σ

$WF(u) = WF(\square_b u) \cup WF(\pi_q^{\pm} u)$ sur $\Sigma^{\pm}$

ii) $WF(u) \setminus WF(\square_b u)$ est une réunion de feuilles canoniques de Σ

$SS(u) \setminus SS(\square_b u)$ est une réunion de feuilles complexes de X

<u>Remarque 5</u> : On peut écrire sans peine un théorème analogue dans le cas non pseudoconvexe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators, CPAM 27 (1974), 585-639.

[2] L. Boutet de Monvel : Intégration des équations de Cauchy-Riemann induites formelles, Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1975, exposé n°9 .

[3] L. Boutet de Monvel, A. Grigis, B. Helffer : Paramétrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples, Astérisque 34-35 (1976) 93-121.

[4] D. Catlin : Boundary behaviour of holomorphic functions on weakly pseudoconvex domains, Thesis, Princeton Univ. 1978.

[5] M. Derridj : Sur la régularité des solutions du problème de Neumann pour $\bar{\partial}$ dans quelques domaines faiblement pseudoconvexes, J. Diff. Geom. (à paraître).

[6] K. Diederich, P. Pflug : Necessary conditions for hypoellipticity of the $\bar{\partial}$-problem, preprint.

[7] G. B. Folland, J. J. Kohn : The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex, Princeton University Press, 1972.

[8] M. Freemann : Local complex foliation of real submanifolds, Math. Annalen 209 (1974) 1-30.

[9] P. C. Greiner, E. M. Stein : Estimates for the ∂-Neumann problem, Princeton University Press (1977).

[10] A. Grigis : Propagation des singularités pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles, Comm. in P.D.E. 4-11 (1979) 1233-1262.

[11] L. Hörmander : L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, Acta Math. 113 (1965) 89-152.

[12] L. Hörmander : Pseudodifferential operators and non-elliptic boundary problems Ann. of Math. 83 (1966), 129-209.

[13] J. J. Kohn : Subellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem on pseudoconvex domains : Sufficient conditions, Acta Math. 142 (1979), 79-121.

[14] N. Øvrelid : Estimées pour l'opérateur $\bar{\partial}$, conférence à l'Université d'Alger (mai 1977).

[15] C. Rea : Levi-flat submanifolds and holomorphic extension of foliations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 26 (1972) 664-681.

[16] J. Sjöstrand : Propagation of singularities for operators with multiple involutive characteristics, Ann. de l'Inst. Fourier, Grenoble 26-1 (1978), 141-155.

[17] F. Sommer : Komplex-analytische Blätterung reeller Hyperflächen im $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. 137 (1959), 392-411.

[18] D. S. Tartakoff : The local real analyticity of solutions to $\Box_b$ and the $\bar{\partial}$-Neumann problem, to appear.

[19] F. Trèves : Analytic hypoellipticity of a class of pseudodifferential operators with double characteristics and application to the $\bar{\partial}$-Neumann problem, Comm. in P. D. E. 3, 6 et 7 (1978), 475-642.

*
* *