I. Ekeland

Oscillations forcées de systèmes hamiltoniens non linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. nº 14, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A15_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1979-1980

OSCILLATIONS FORCEES DE SYSTEMES HAMILTONIENS NON LINEAIRES

par I. EKELAND

Exposé n° XIV

5 Février 1980

§ 1. UN PRINCIPE VARIATIONNEL

Dans toute la suite, nous nous intéressons aux équations suivantes, où $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $(f,g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sont des fonctions données :

$$(\mathcal{H}) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}\, i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(x,p) + f_i(t) \\[2ex] \dfrac{dp}{dt}\, i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}(x,p) + g_i(t) \end{cases} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

C'est un système de 2n équations différentielles ordinaires, tout à fait fondamental en mécanique et en physique. La fonction H, appelée hamiltonien, décrit un système conservatif, et les fonctions f et g des excitations exogènes. Une question difficile, à laquelle Poincaré en particulier a attaché son nom, est la suivante sachant que f et g sont T-périodiques, trouver des solutions T-périodiques du système $(\mathcal{H})$.

Nous indiquerons au paragraphe suivant comment répondre à cette question dans certains cas. La méthode (nouvelle) repose sur un principe variationnel dû à F. Clarké et l'auteur ([2]), que nous allons exposer maintenant.

Introduisons la terminologie suivante. Appelons <u>extrêmale</u> d'une intégrale

$$\int_0^T L(t,u(t),\dot{u}(t))dt$$

où $u(t) = (u_1(t),\dots,u_{2n}(t))$, toute solution des équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} = \frac{\partial L}{\partial u_i} \qquad 1 \leqslant i \leqslant 2n$$

Un des plus anciens résultats de la mécanique et de la physique mathématiques est le principe de moindre action, qui fait partie des grandes découvertes du XVIIe siècle. Enonçons-le de la manière suivante :

<u>Proposition 1</u> : Les solutions du système $(\mathcal{H})$ sont les extrémales de l'intégrale

$$(\mathcal{A}) \qquad \int_0^T \{x\dot{p} + H(x,p) - xg + pf\}dt.$$

Démonstration : Il suffit d'écrire les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}(x_i) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(x,p) + f_i$$

$$\frac{d}{dT}(O) = \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial x_i}(x,p) - g_i \quad . \blacksquare$$

Pour les raisons que nous exposerons tout à l'heure, ce principe variationnel n'est pas utilisable directement pour trouver des solutions. D'où l'idée de le transformer. On utilise pour cela une transformation de Legendre, technique courante en analyse convexe, et utilisée pour la première fois dans ce contexte par Clarke ([1]).

Dorénavant, nous supposerons H convexe. Sa fonction convexe conjuguée G est définie par les formules de Fenchel :

$$G(y,q) = \mathrm{Sup}\{xy + pq - H(x,p) \mid (x,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\}$$

Pour simplifier, supposons H et G partout finies et différentiables. La formule ci-dessus se ramène alors à la classique formule de Legendre :

$$\begin{cases} G(y,q) = xy + pq - H(x,p) \\ \text{où } y_i = \dfrac{\partial H}{\partial x_i} \text{ et } q_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

on dispose également des formules de réciprocité :

$$(y,q) = \nabla H(x,p) \Longleftrightarrow (x,p) = \nabla G(y,q)$$

On énonce alors ([2]) :

Proposition 2 : Si $(y(t),q(t))$ est une extrémale de l'intégrale

$$(\mathcal{P}) \qquad \int_0^T \{-\dot{y}q + G(-\dot{q}+g,\dot{y}-f)\}\, dt$$

alors il existe des constantes x_o et $p_o \in \mathbb{R}^n$ telles que

$$(x'(t) = y(t) + x_o, p(t) = q(t) + p_o)$$

soit une solution du système $(\mathcal{H})$.

<u>Démonstration</u> : Ecrivons les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}(-q_i + \frac{\partial G}{\partial q_i}(-\dot{q}+g,\dot{y}-f)) = 0$$

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial G}{\partial y_i}(-\dot{q}+g,\dot{y}-f) = -\dot{y}_i$$

Définissons de nouvelles fonctions x(t) et p(t) par :

$$x_1(t) = \frac{\partial G}{\partial y_i}(-\dot{q}(t) + g(t),\dot{y}(t) - f(t))$$

$$p_i(t) = \frac{\partial G}{\partial q_i}(-\dot{q}(t) + g(t),\dot{y}(t) - f(t))$$

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent :

$$\dot{q}_i = \dot{p}_i$$

$$\dot{y}_i = \dot{x}_i$$

D'où $x(t) = y(t) + x_o$ et $p(t) = q(t) + p_o$.

Restent à trouver les équations que vérifient x(t) et p(t). Par définition, on a :

$$(x(t),p(t)) = \nabla G(-\dot{q}(t) + g(t),\dot{y}(t) - f(t))$$

En utilisant les formules de réciprocité, ceci devient

$$(-\dot{q}(t) + g(t),\dot{y}(t) - f(t)) = \nabla H(x(t),p(t))$$

En remplaçant $\dot{q}(t)$ par $\dot{p}(t)$ et $\dot{y}(t)$ par $\dot{x}(t)$, on obtient le résultat désiré. ■

Pour montrer l'existence d'une solution T-périodique des équations $(\mathcal{H})$, on pourra songer, soit à minimiser l'intégrale $(\mathcal{U})$ dans la classe des courbes (x(t), p(t)) définies sur [O,T] et vérifiant

$$(x(0),p(0)) = (x(T),p(T)),$$

soit à minimiser l'intégrale $(\mathcal{P})$ dans la classe des courbes (y(t),q(t)) définies sur [O,T] et vérifiant :

$$(y(0),q(0)) = (y(T),q(T)).$$

Ces deux démarches ne sont pas équivalentes. En effet, pour montrer l'existence d'un minimum, il faut trouver des estimations a priori, sur les dérivées c'est pratiquement impossible pour l'intégrale ($\mathcal{M}$), où $\dot{x}(t)$ ne figure pas et où $\dot{p}(t)$ n'intervient que linéairement. De fait, on peut se convaincre sur des exemples simples que l'intégrale ($\mathcal{M}$) n'est pas bornée inférieurement (ou supérieurement). Par contre, en ce qui concerne l'intégrale ($\mathcal{P}$), ce sera relativement facile, moyennant des hypotheses de croissance convenables sur G (et donc sur H). C'est ce que nous allons voir maintenant.

§ 2. APPLICATIONS

La méthode ci-dessus a déjà reçu de nombreuses applications ([2],[3],[4],[5],[6],[7]). Choisissons-en deux.

A- Hamiltoniens sous-quadratiques

On suppose que $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe, vérifie $\forall (x,p)$, $H(x,p) \leqslant \frac{k}{2}(x^2 + p^2) + C$.
On suppose que f et g appartiennent à $L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$ et sont T-périodiques, avec

$$T < 2\pi k^{-1}$$

Alors le système ($\mathcal{H}$) admet au moins une solution T-périodique.

La démonstration consiste à minimiser la fonctionnelle

$$\int_0^T \{-\dot{y}q + G(-\dot{q}+g,\dot{y}-f)\}\, dt$$

sur l'espace :

$$y \in H^1(0,T;\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \int_0^T \dot{y}\, dt = 0$$

$$q \in H^1(0,T;\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \int_0^T \dot{q}\, dt = 0$$

On remarque que l'intégrale ne change pas si on translate y et q d'une constante dans $\mathbb{R}^n$. On peut donc imposer la condition supplémentaire :

$$\int_0^T y(t)dt = 0$$

$$\int_0^T q(t)dt = 0$$

Moyennant cette condition, on a l'estimation a priori

$$\|q\|_2 \leqslant \frac{T}{2\pi} \|\dot{q}\|_2$$

Par ailleurs, la condition donnée sur H se traduit par la condition suivante sur G :

$$\forall(y,q)\ G(y,q) \geqslant \frac{1}{2k}(y^2+q^2) - C.$$

D'où l'estimation :

$$\int_0^T \{-\dot{y}\, q + G(-\dot{q}+g,\dot{y}-f)\}dt \geqslant -\frac{T}{2\pi}\|\dot{y}\|\,\|\dot{q}\| + \frac{1}{2k}(\|\dot{q}-g\|^2 + \|\dot{y}-f\|^2) - C$$

$$\geqslant -\frac{T}{4\pi}(\|\dot{y}\|^2 + \|\dot{q}\|^2) + \frac{1}{2k}(\|\dot{q}-g\|^2 + \|\dot{y}-f\|^2) - C$$

On en déduit que la fonctionnelle est coercive pourvu que $\frac{1}{2k} > \frac{T}{4\pi}$, c'est-à-dire $T < \frac{2\pi}{k}$. Par ailleurs elle est faiblement semi-continue inférieurement : le terme $\int_0^T \dot{y}q\,dt$ est compact, et le terme $\int_0^T G(-\dot{q}+g,\dot{y}-f)dt$ est convexe continu. L'existence d'un minimum en découle immédiatement.

B- <u>Hamiltoniens sur-quadratiques</u>

On suppose que $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe, vérifie

$$0 = H(0,0) \leqslant H(x,p) \leqslant \frac{k^\beta}{\beta}(x^2+p^2)^{\beta/2}$$

avec $\beta > 2$. Soit α l'exposant conjugué :

$$\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$$

On suppose que f et g appartiennent à $L^\alpha(0,T;\mathbb{R}^n)$ et sont T-périodiques, avec

$$\int_0^T f\,dt = 0 = \int_0^T g\,dt$$

$$\|f,g\|_\alpha \leqslant \frac{1}{2}\pi^{-2/\beta}\, k^{\frac{-\beta}{\beta-2}}\, T^{-\frac{2}{\beta}\,\frac{\beta-1}{\beta-2}}$$

Alors le système $(\mathcal{H})$ possède au moins une solution T-périodique vérifiant l'estimation :

$$\|\dot{x}-f,\dot{p}-g\|_\alpha \leqslant \frac{2}{\beta-2}\|f,g\|_\alpha .$$

Ce qu'on désigne par $\| f,g\|_\alpha$, c'est la norme de la fonction $t \mapsto (f(t),g(t))$ dans $L^\alpha(O,T;\mathbb{R}^{2n})$.

La démonstration consiste à minimiser la fonctionnelle

$$\int_O^T \{-\dot{y}q + G(-\dot{q}+g,\dot{y}-f)\}dt$$

sur l'espace

$$\dot{y} \in L^\alpha(O,T;\mathbb{R}^n) \; , \; \int_O^T \dot{y}dt = O = \int_O^T ydt$$
$$\dot{q} \in L^\alpha(O,T;\mathbb{R}^n) \; , \; \int_O^T qdt = O = \int_O^T qdt$$

On fait le changement de variable $w = y - \bar{f}$ et $z = q - \bar{g}$, où $\bar{f}$ (resp. $\bar{g}$) est la primitive de f (resp. de g) de moyenne nulle. Ce faisant, grâce aux hypothèses sur f et g, on ne change pas d'espace. On se ramène à minimiser la fonctionnelle

$$\int_O^T \{-\dot{w}z - fz - \dot{w}\bar{g} + G(-\dot{z},\dot{w})\} \, dt$$

sur le même espace. On la minore par :

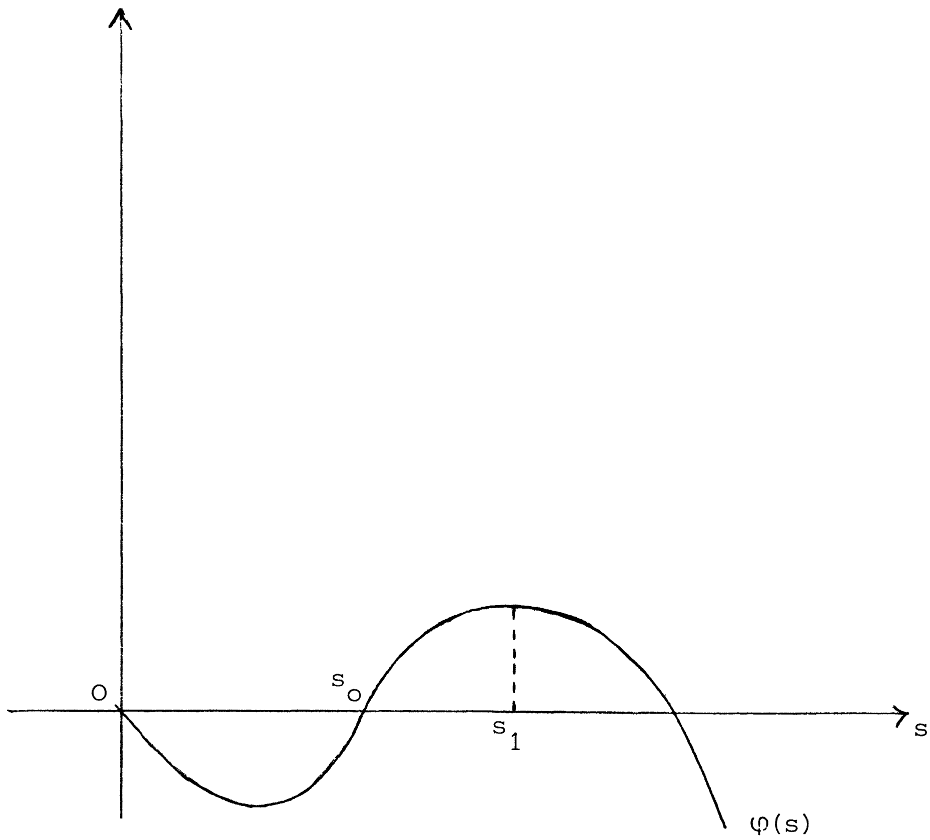
$$-\frac{1}{2}\|\dot{w},\dot{z}\|_\alpha \|w,z\|_\beta - \|\dot{w},\dot{z}\|_\alpha \|\bar{f},\bar{g}\|_\beta + \frac{1}{\alpha}\|\dot{w},\dot{z}\|_\alpha^\alpha$$

On estime la norme de l'opérateur $(\dot{w},\dot{z}) \longmapsto (w,z)$ de L^α dans L^β par le théorème de convexité de Marcel Riesz. On obtient $(\frac{T}{2\pi})^{2/\beta} \, (\frac{1}{2})^{1-2/\beta} = c(\beta)T^{2/\beta}$. La minoration s'écrit donc :

$$\int_O^T \{-\dot{w}z - fz - \dot{w}\bar{g} + G(-\dot{z},\dot{w})\}dt \geqslant \varphi(\|\dot{w},\dot{z}\|_\alpha)$$

où $\varphi(s) = -\frac{1}{2}\, c(\beta)T^{2/\beta} \, s^2 - c(\beta)T^{2/\beta}\|f,g\|_\alpha s + \frac{1}{\alpha k^\alpha} \, s^\alpha$.

Comme $\alpha < 2$, c'est une fonction qui tend vers $-\infty$ quand $s \to +\infty$, et qui n'a donc pas de minimum global. Mais une étude précise montre que, sous les conditions imposées à $\|f,g\|_\alpha$, elle a la forme suivante :



On cherche alors le minimum de la fonctionnelle, non plus sur l'espace entier, mais sur la boule centrée à l'origine et de rang s_1. On montre aisément que ce minimum est atteint. Par ailleurs, en faisant $w = 0 = z$, on trouve la valeur zéro, et le minimum doit donc être négatif ou nul. Il ne saurait donc être atteint sur le bord de la boule. Il est donc atteint à l'intérieur, et constitue un minimum local de la fonctionnelle sur l'espace tout entier. C'est donc bien l'extrémale cherchée de la fonctionnelle ($\mathcal{P}$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Clarke : "Periodic solutions to Hamiltonian inclusions", Journal of Differential Equations, à paraître.

[2] Clarke-Ekeland : "Hamiltonian trajectories having prescribed minimal period", Comm. Pure App. Math., à paraître.

[3] Clarke-Ekeland : "Nonlinear oscillations and boundary value problems for Hamiltonian systems", Archive Rat. Mech. An., à paraître.

[4] Ekeland : "Periodic solutions of Hamiltonian equations and a theorem of P-Rabinowitz", Journal Diff. Eq., 34 (1979) p.523-534.

[5] Ekeland : "Forced oscillations of nonlinear Hamiltonian systems, II", à paraître, Advances in Mathematics, numero spécial en l'honneur de L. Schwartz.

[6] Ekeland : "Oscillations de systèmes hamiltoniens non linéaires III", à paraître.

[7] Ekeland-Lasry : "On the number of periodic trajectories for a Hamiltonian flow on a convex energy surface", à paraître, Annals of Mathematics.

* * *