Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

C. Bardos
J. C. Guillot
J. Ralston

Relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. nº 13, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A14_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1979-1980

RELATION DE POISSON POUR L'EQUATION DES ONDES DANS UN OUVERT NON BORNE

par C. BARDOS, J. C. GUILLOT et J. RALSTON

Exposé n° XIII

5 Février 1980

I. INTRODUCTION

On se propose d'adapter au problème extérieur les résultats reliant les valeurs propres du laplacien à l'intérieur et les géodésiques fermées (cf [1], [2] , [3] , [4]).

Considérons par exemple l'équation des ondes dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^{2m+1}$ $(m > 0)$ complémentaire d'un nombre fini de parties compactes disjointes deux à deux et contenues dans la boule de rayon r. Le rôle joué pour le problème intérieur par les valeurs propres du laplacien l'est ici par l'ensemble des pôles $\{\lambda_j\}$ de la matrice de diffusion associée à l'équation des ondes dans Ω avec, par exemple, la condition de Dirichlet sur le bord et la relation de Poisson est l'affirmation que $\ell(t) = \sum_j e^{i\lambda_j t}$ est une distribution d'ordre fini sur $(2r,\infty)$ dont le support singulier est contenu dans l'ensemble des longueurs des rayons périodiques dans Ω .

La relation de Poisson est encore vérifiée sous des conditions plus générales. Dans le cas particulier où Ω est le complémentaire de deux parties convexes compactes disjointes on peut obtenir une formule de Poisson.

Enfin, on peut appliquer ces résultats à la théorie du scattering et obtenir des renseignements sur la distribution des pôles de la matrice S. Ces applications seront développées ultérieurement.

Comme les démonstrations détaillées des résultats énoncés ainsi que divers compléments seront publiés plus tard on se contentera ici d'en donner des indications.

II. NOTATIONS ET RAPPELS

On considère deux exemples caractéristiques :

1) L'équation des ondes dans $\mathbb{R}^n$ (n impair, $n \geqslant 3$) à coefficients variables :

$$(1) \qquad \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0$$

où $(a_{ij}(x))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ est une matrice définie positive et $c(x) > 0$. Ces coefficients appartiennent à $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et vérifient $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ et $c(x) = 1$ pour $|x| > r_1$ $(r_1 > 0)$.

2) L'équation des ondes dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ (n impair, $n \geqslant 3$), complémentaire de la réunion d'un nombre fini de parties compactes, disjointes deux à deux et dont le bord, $\partial\Omega$, est une variété C^∞ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_D u = 0 \tag{2}$$

où Δ_D est le laplacien associé à la condition de Dirichlet sur le bord $\partial\Omega$ qu'on suppose contenu dans la boule $B(0,r_2)$. On suppose en outre qu'aucune bicaractéristique associée à (2) n'est tangente en un point de $\partial\Omega$ à l'ordre infini (cf. [5]).

En introduisant $(u, \frac{\partial u}{\partial t})$ on décrit les solutions d'énergie finie des équations des ondes (1) et (2) à l'aide de groupes unitaires $U_1(t)$ et $U_2(t)$ dans, respectivement, les espaces de Hilbert $H_D(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ et $H_D(\Omega) \times L^2(\Omega)$, où, pour tout ouvert Ω, $H_D(\Omega)$ est le complété de $C_0^\infty(\Omega)$ pour la norme de Dirichlet (cf. [6]).

Nous avons

$$U_k(t) = e^{tA_k} \qquad k = 1,2$$

avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ L & 0 \end{pmatrix}$$

où L est l'opérateur autoadjoint dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ suivant

$$Lu = c^2(x) \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \quad u \in H^2(\mathbb{R}^n)$$

et

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta_D & 0 \end{pmatrix}$$

On notera $U_0(t)$ le groupe unitaire associé à l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^n$, i.e.

$$U_0(t) = e^{tA_0}$$

avec

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} .$$

Il convient, pour la suite, de considérer $U_2(t)$ comme un groupe unitaire dans $H_D(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ en le prolongeant par zéro sur le sous-espace orthogonal à $H_D(\Omega) \times L^2(\Omega)$ dans $H_D(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$. On posera dorénavant $H_E = H_D(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Hilbert muni de la norme énergie

$$\{f_1,f_2\}^2_E = \frac{1}{2}\int (|\nabla f_1|^2 + |f_2|^2)\,dx$$

on utilise de manière essentielle les résultats de la théorie de P. Lax et R. Phillips (cf. [6]). Pour cela on considère, pour $k = 1,2$, les sous-espaces

$$D^+_{r_k} = \{f \in H_E \ ; \ U_k(t)f \equiv 0 \quad \text{lorsque} \quad |x| < t + r_k \quad \text{et} \quad t > 0\}$$

$$D^-_{r_k} = \{f \in H_E \ ; \ U_k(t)f \equiv 0 \quad \text{lorsque } t < 0 \quad \text{et} \quad |x| < -t+r_k\}$$

Remarquons que $U_k(t) = U_o(t)$ sur $D^+_{r_k}$ lorsque $t > 0$ et sur $D^-_{r_k}$ lorsque $t < 0$.

A ces sous-espaces P. Lax et R. Phillips ont associé deux types de représentations translation distinctes. Ce sont, pour chaque k, deux isomorphismes hilbertiens $T^k_\pm$ distincts de H_E sur $L^2(\mathbb{R}, L^2(S_n))$ tels que

$$T^+_k D^+_{r_k} = L^2((r_k,\infty), L^2(S_n))$$
$$T^-_k D^-_k = L^2((-\infty, r_k), L^2(S_n))$$

et tels que $(T^\pm_k)\ U_k(t)(T^\pm_k)^{-1}$. Soit l'opérateur de translation à droite par t.

Si $f \in H_E$ on pose $f^\pm_k = T^\pm_k f$ et on définit l'opérateur de diffusion $S_k = T^+_k(T^-_k)^{-1}$. S_k est unitaire et commute avec les translations.

Si maintenant pour chaque k on fait suivre chaque transformation T par une transformation de Fourier par rapport à t, on obtient alors des représentations spectrales et l'opérateur de diffusion devient un opérateur décomposable $(S_k(\sigma))_{\sigma \in \mathbb{R}}$ où $S_k(\sigma)$ est un opérateur unitaire dans $L^2(S_n)$ pour presque tout $\sigma \in \mathbb{R}$.

Le premier résultat essentiel est qu'il existe un prolongement de $S_k(.)$ à tout le plan complexe, qu'on notera encore $S_k(z)$, dont tous les pôles sont contenus dans le demi plan $\{\mathrm{Im}\ z > 0\}$.

Le second résultat essentiel de la théorie de P. Lax et R. Phillips est le lien entre l'évolution $U_k(t)$ et la structure méromorphe de $S_k(z)$ par l'intermédiaire du semi groupe $Z_k(t)$ $(t > 0)$ défini par :

$$Z_k(t) = P^+_{r_k} U_k(t) P^-_{r_k} \quad , \quad t > 0$$

où $P^+_{r_k}$ (resp. $P^-_{r_k}$) est la projection sur $(D^+_{r_k})^\perp$ (resp. $(D^-_{r_k})^\perp$).

Le spectre du générateur de chacun de ces semi groupes est composé de valeurs propres de multiplicité finie. Soit $\{\mu_j^k\}_{j \geq 1}$ le spectre de générateur de $Z_k(t)$. On a $\operatorname{Re} \mu_j^k < 0$ pour tout j et si l'on pose $\lambda_j = -i \mu_j^k$ alors $\{\lambda_j^k\}_{j \geq 1}$ sont les pôles de $S_k(z)$. Par suite $\operatorname{Im} \lambda_j^k > 0$ pour tout j.

III. RESULTATS

Par analogie avec le cas intérieur nous sommes a priori amenés à considérer les opérateurs $\int_{\mathbb{R}} \rho(t) (U_k(t) - U_o(t)) dt$ pour une fonction $\rho(.)$ a support compact et suffisamment régulière.

Ainsi a-t-on

<u>Théorème 1</u> : <u>Soit</u> $\rho(.) \in C_o^{n+1}(\mathbb{R})$. <u>Alors, pour</u> $k = 1,2,$ $\int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U_k(t) - U_o(t))dt$ <u>est un opérateur nucléaire dans</u> H_E.

Donnons quelques indications de la démonstration dans le cas k = 2. Le cas k = 1 est plus simple.

Soit P le projecteur de H_E sur $H_D(\Omega) \times L^2(\Omega)$. On montre alors que

$$P(\{f,g\}) = \{f - u, \chi_\Omega g\}$$

où $u = f$ sur $\mathbb{R}^n - \Omega$ et $\Delta u = 0$ dans Ω et $u \in H_D(\mathbb{R}^n)$ Soit $\rho(.) \in C_o^{n+1}(\mathbb{R})$ et supposons que le support de $\rho(.)$ est contenu dans l'intervalle $(-T,T)$ avec $T > 0$. Soit $\psi(.) \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \leq \psi(x) \leq 1$, $\psi(x) = 1$ lorsque $|x| < T + r_2$ et $\psi(x) = 0$ lorsque $|x| > T + 2r_2$. Utilisant la vitesse finie de la propagation de l'énergie, on a, pour tout $h \in H_E$,

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U_2(t) - U_o(t)) \, dt = \int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U_2(t) - U_o(t)) \, \psi h \, dt .$$

De même, pour $|x| > 2T + 2r_2$, a-t-on

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U_o(t) \, \psi h)(x) dt = 0$$

Par contre, on a, pour $h = \{h_1,h_2\}$ et pour $|x| > 2T + 2r_2$,

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U_2(t) \, \psi h)(x) dt = \{u(x),0\} \int_{\mathbb{R}} \rho(t) dt$$

où $u(x)$ est déterminée à partir de ψh_1 comme précédemment :

$$u(x) = \psi(x)h_1(x) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$$

Soit $\varphi(.) \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$, $\varphi(x) = 1$ si $|x| < 2T + 2r_2$, $\varphi(x) = 0$ si $|x| > 2T + 3r_2$, nous avons

$$\text{(3)} \quad \int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U_2(t) - U_o(t))h\, dt = \int_{\mathbb{R}} \rho(t)\ \varphi(U_2(t) - U_o(t))\ \psi h\, dt$$

$$+ (1 - \varphi)\{u,0\} \int_{\mathbb{R}} \rho(t)\, dt$$

on peut montrer facilement que chacun des opérateurs

$$\text{(4)} \qquad h \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \rho(t)\ \varphi\ U_o(t)\ \psi h\, dt$$

$$\text{(5)} \qquad h \longmapsto (1 - \varphi)\{u,0\} \int_{\mathbb{R}} \rho(t)dt$$

est un opérateur nucléaire de H_E dans H_E .

Pour démontrer que l'opérateur

$$\text{(6)} \qquad h \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \rho(t)\ \varphi\ U(t)\ \psi\ hdt$$

est un opérateur nucléaire de H_E dans H_E, il suffit d'intégrer par parties (n+1) fois.

La démonstration montre aussi que l'application

$$\rho(.) \longrightarrow \mathrm{Tr} \int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U_k(t) - U_o(t))dt\ , \quad k = 1,2$$

est une distribution d'ordre (n+1) sur $(0,\infty)$. On note $\mathrm{Tr}(U_k(t) - U_o(t))$ cette distribution.

Le théorème 1 permet de déduire de la théorie de Lax et Phillips et de celle de Birman-Krein le théorème suivant :

<u>Théorème 2</u> :

i) <u>En se restreignant à l'intervalle</u> $(2r_k,\infty)$ <u>on a, pour</u> $k = 1,2$:

$$\sum_{j\leqslant 1} e^{i\lambda_j^k t} = \mathrm{Tr}(U_k(t) - U_o(t))$$

ii) Plus généralement, on a pour tout $\rho(.) \in C_o^{\infty}(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Tr}\int_{\mathbb{R}} \rho(t)(U_k(t) - U_o(t))dt = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\hat{\rho}}{d\lambda}(\lambda)\mathrm{Log}\ \det S_k(\lambda)d\lambda$$

où $\hat{\rho}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}\rho(t)dt$.

La démonstration de ii) repose sur la formule de M. S. Birman et M. G. Krein [7] et sera omise ici.

Pour démontrer i) on commence par remarquer que si $\rho(.) \in C_o^{n+1}((2r_k,\infty))$ on a

$$(7)\qquad \mathrm{Tr}\int_o^{\infty} \rho(t)(U_k(t) - U_o(t))dt = \mathrm{Tr}\int_o^{\infty}\rho(t)Z_k(t)dt$$

En effet, comme $U_k(t)h = U_o(t)h$ lorsque $h \in D^+_{r_k}$ et $t > 0$ on a

$$\int_o \rho(t)(U_k(t) - U_o(t))dt = \int_o \rho(t)(U_k(t) - U_o(t))P^+_{r_k}dt .$$

D'autre part si $h \in H_E$ et $f \in D^-_{r_k}$ on a pour $t > 0$

$$(g,(U_k(t) - U_o(t))f) = 0$$

Par suite

$$\int_o \rho(t)(U_k(t) - U_o(t))dt = \int_o \rho(t)P^-_{r_k}(U_k(t) - U_o(t))P^+_{r_k}dt$$

De plus on a

$$P^+_{r_k}P^-_{r_k} = P^+_{r_p}P^+_{r_k}$$

D'où l'on déduit que

$$\mathrm{Tr}\int_o^{\infty}\rho(t)(U_k(t) - U_o(t))dt = \mathrm{Tr}\int_o^{\infty} \rho(t)P_{r_k}(U_k(t) - U_o(t))P^-_{r_k}dt$$

Remarquant que $P^+_{r_k}U_o(t)P^-_{r_k} = 0$ lorsque $t > 2r_k$ (cf. [6]) on en déduit (7).

Le théorème de Lidskii (cf [8]) sur la trace d'un opérateur nucléaire permet alors de déduire i) de (7).

Le théorème 1 permet de déduire de [1] , [2] , [3] et [5] les résultats suivants :

Théorème 3 (Relation de Poisson) :

i) Le support singulier de $\mathrm{Tr}(U_1(t) - U_o(t))$ sur $(0,\infty)$ est contenu dans l'ensemble des périodes des courbes intégrales périodiques dans $T^*(\mathbb{R}^n)\setminus 0$ du champ hamiltonien $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) = \frac{1}{2} H_p$ où

$$p(x,\xi) = - \sum_{i,j=1}^{n} c^2(x)\, \xi_i\, a_{ij}(x)\, \xi_j$$

Réciproquement toute période d'une courbe intégrale périodique, telle que l'unité n'est pas valeur propre de l'application de Poincaré associée, appartient au support singulier de $\mathrm{Tr}(U_1(t) - U_o(t))$

ii) Le support singulier de $\mathrm{Tr}(U_2(t) - U_o(t))$ sur $(0,\infty)$ est contenu dans l'ensemble des longueurs des rayons périodiques pour le flot hamiltonien défini dans [5].

Donnons quelques indications de la démonstration de ii) on observe que l'on a

$$\mathrm{Tr}\int_0^\infty \rho(t)\,\varphi\, U_2(t)\,\psi\, dt = 2\mathrm{Tr}\int_0^\infty \rho(t)\,\varphi\, F(t)\,\psi\, dt$$

où, si $f \in L^2(\Omega)$, $F(t)f$ est l'élément de $L^2(\Omega)$ identique à la seconde composante de $U(t)\{0,f\}$ appartenant à H_E.

De même, a-t-on

$$\mathrm{Tr}\int_0^\infty \rho(t)\,\varphi\, U_o(t)\,\psi\, dt = 2\mathrm{Tr}\int_0^\infty \rho(t)\,\varphi\, F_o(t)\,\psi\, dt$$

où $F_o(t)f$ est la seconde composante de $U_o(t)\{0,f\}$. Mais on montre que

$$\mathrm{Tr}\int_0^\infty \rho(t)\,\varphi\, F_o(t)\,\psi\, dt = 0$$

La trace de l'opérateur (5) est de la forme $K\int_0^\infty \rho(t)dt$ pour une certaine constante.

De (3) on en déduit que

$$\operatorname{Tr} \int_0^\infty \rho(t)(U_2(t) - U_0(t))dt = 2\operatorname{Tr}\int_0^\infty \rho(t)\varphi\, F(t)\psi dt + K\int_0^\infty \rho(t)dt$$

Pour conclure, on peut alors appliquer les résultats de [3], en tenant compte des résultats plus récents de [5], à la distribution $\operatorname{Tr}\, \varphi\, F(t)\psi$.

Enfin, utilisant les résultats de [3] et [4], on peut dans certains cas préciser la nature des singularités de $\operatorname{Tr}\,(U_k(t) - U_0(t))$.

Ainsi dans le cas de deux sphères de rayon 1, distantes de 2d $(d > 0)$, on a :

<u>Théorème 4</u> : <u>Dans le cas de deux sphères de rayon</u> 1 <u>et distantes de</u> 2d <u>on a sur</u> $(2d + 4, \infty)$

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{i\lambda_j t} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} m\, e^{i\mu_{nm} t} + h(t)$$

<u>où</u> $h(t) \in L^2_{loc}((2d + 4, \infty))$, $\mu_{nm} = \frac{\pi n}{2d} - 2\,\frac{m}{d} \operatorname{Log} \alpha$ <u>et</u> $\alpha = \dfrac{(d+1)^{1/2} - d^{1/2}}{(d+1)^{1/2} + d^{1/2}}$.

Ce résultat se généralise au cas de deux parties compactes disjointes et strictement convexes et a des conséquences sur la distribution des pôles de la matrice S qui seront développées ultérieurement.

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>

[1] J. Chazarain : Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes. Inventiones Math. <u>24</u> p.65-82 (1974).

[2] J. J. Duistermaat et V. Guillemin : The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics. Inventiones Math. <u>29</u> p.39-79 (1975).

[3] K. Andersson et R. Melrose : The propagation of singularities along gliding rays. Inventiones Math. <u>41</u> p.23-95 (1977).

[4] V. Guillemin et R. Melrose : The Poisson summation formula for manifolds with boundary. Advances in Math. <u>32</u> p.204-232 (1979).

[5] R. B. Melrose et J. Sjöstrand : Singularities at boundary value problems I. C.P.A.M. <u>31</u> p.593-617. (1978).

[6] P. Lax et R. Phillips : Scattering theory. Academic Press (1967).

[7] M. Sh. Birman et M. G. Krein : On the theory of wave operators and scattering operators, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 144 p. 475-478 (1962).

[8] I. C. Gohberg and M. G. Krein : Introduction to the theory of linear non selfadjoint operators. Transl. Math. Monogr. vol. 18, A.M.S. Providence (1968).

****