Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

Y. Ohya

Le problème de Cauchy à caractéristiques multiples - II

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. nº 10, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A11_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 9 - 1 9 8 0

LE PROBLEME DE CAUCHY A CARACTERISTIQUES MULTIPLES -II*-

par Y. OHYA

* Concernant -I-, voir Séminaire Vaillant 1979-1980.

Exposé n° X

15 Janvier 1980

Considérons le problème de Cauchy non caractéristique

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} P(t.x;D_t,D_x)\, u(t.x) = f(t,x) & \text{dans } \Omega \\ D_t^j u(O,x) = \varphi_j(x) \quad (j = o,1,\dots,m-1) & \text{sur } t = O \cap \Omega \end{cases}$$

où Ω est une bande $[O,T] \times \mathbb{R}^{\ell}$, $D_t = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$, $D_{xj} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant \ell)$ et

$$P(t,x;D_t,D_x) = D_t^m + \sum_{\substack{|\nu|+j \leqslant m \\ j<m}} a_{\nu j}(t,x) D_x^{\nu} D_t^j .$$

Notre but est de montrer l'existence de solution $u(t,x)$ et de domaine d'influence dans la classe $C^{\infty}(\Omega)$, étant données $a_{\nu j}(t,x)$ et $f(t,x) \in C^{\infty}(\Omega)$ et $\varphi_j(x) \in [C^{\infty}(\mathbb{R}^{\ell})]^m$.

Soit p le symbole de P ; $p = p_m + p_{m-1} + \dots + p_o$ où $p_k(t,x;\tau,\xi)$ est le symbole homogène de degré k. Pour la factorisation :

$$p_m(t,x;\tau,\xi) = \prod_{i=1}^{m-s} (\tau - \lambda_i(t,x;\xi)) \prod_{j=1}^{s} (\tau - \mu_j(t,x;\xi)) ,$$

on pose les

HYPOTHESES

1) $\lambda_i(t,x;\xi)$ $(1 \leqslant i \leqslant m-s)$ et $\mu_j(t,x;\xi)$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$

sont réelles pour tout $(t,x;\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^{\ell}_{\xi}$,

2) elles appartiennent à $C^{\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^{\ell}_{\xi} \setminus O)$,

3) pour chaque j $(1 \leqslant j \leqslant s)$, $\lambda_j(t,x;\xi)$ et $\mu_j(t,x;\xi)$ peuvent se coïncider dans $\Omega \times \mathbb{R}^{\ell}_{\xi}$, mais $\prod_{i=1}^{m-s} (\tau - \lambda_i(t,x;\xi)) = q_{m-s}(t,x;\tau,\xi)$ et $\prod_{j=1}^{s} (\tau - \mu_j'(t.x;\xi)) = \gamma_s(t,x;\tau,\xi)$ sont des polynômes strictement hyperboliques par rapport à τ.

On emploie les notations usuelles; $H_s(\mathbb{R}^{\ell})$ est l'espace complété de $C_o^{\infty}(\mathbb{R}^{\ell})$ par la norme $\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^{\ell}} (1+|\xi|)^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$, et on désigne $S^m(\Omega \times \mathbb{R}^{\ell}_{\xi})$ l'ensemble de symboles des opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre m que l'on note par

L(m). Dans la suite, on ne considère que les opérateurs pseudo-différentiels par rapport à x, mais différentiels par rapport à t, et on définit

$$\tilde{L}(m) = \left\{ \sum_{j=o}^{m} b_j(t,x;D)D_t^{m-j} \quad \text{où} \quad b_j(t,x;D) \in L(m) \right.$$
$$\left. \text{dépendant de t comme paramètre} \right\}.$$

Soient Q et R deux opérateurs pseudo-différentiels de $\tilde{L}(m-s)$ et $\tilde{L}(s)$ associés aux q_{m-s} et r_s ; c'est-à-dire,

$$\begin{cases} q = \text{symbole de } Q \sim q_{m-s} + q_{m-s-1} + \dots \\ r = \text{symbole de } R \sim r_s + r_{s-1} + \dots \end{cases}$$

où q_i et r_j sont des fonctions indéfiniment dérivables, homogènes de degré i et j par rapport à (τ,ξ) et polynômes de degré i et j par rapport à τ . A la place de (E), on résoud :

$$(E)' \qquad \begin{cases} Ru = v \\ Qv = -(P - QR)u + f \end{cases}$$

où Q et R sont des opérateurs pseudo-différentiels strictement hyperboliques.

D'abord, on se rappelle du

<u>Lemme O</u> : Si $P(t,x:D_t,D)$ est un opérateur pseudo-différentiels strictement hyperboliques de $\tilde{L}(m)$, alors il existe γ telle que

$$|(\|D^{n+m-1}u(t)\|_\sigma)'_t| \leqslant \gamma(\|D^{n+m-1}u(t)\|_\sigma + \|D^n(Pu(t))\|_\sigma)$$

pour n : ∀ entier ($\geqslant$ O) et σ : ∀ réel, où

$$\|D^n f(t)\|_\sigma = \sup_{o \leqslant i \leqslant n} \|D_t^i u(t)\|_{\sigma+n-i} .$$

Evidemment, il faut imposer une certaine condition sur P pour la résolubilité dans $C^\infty(\Omega)$, puisque, en général, on a $(P - QR) \in \tilde{L}(m-1)$; en effet,

$$\text{symbole de} \quad (P - QR) \sim (p_m - q_{m-s}r_s) +$$
$$+ \{p_{m-1} - \frac{1}{i}\sum_{\alpha=o}^{\ell} \frac{\partial q_{m-s}}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial r_s}{\partial x_\alpha} - (q_{m-s}\, r_{s-1} + q_{m-s-1}\, r_s)\} +$$
$$+ \text{termes de degré} \leqslant m - 2 .$$

En définissant

(1) $$\ell_{m-1} = p_{m-1} - \frac{1}{i} \sum_{\alpha=o}^{\ell} \frac{\partial q_{m-s}}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial r_s}{\partial x_\alpha} \; ,$$

si l'on peut établir

(2) $$\ell_{m-1} = q_{m-s}\, r_{s-1} + q_{m-s-1}\, r_s$$

par le choix convenable de (q_{m-s-1}, r_{s-1}), alors on aura $(P - QR) \in \tilde{L}(m-2)$.

Pour nous conduire bien, citons deux exemples :

i) $P = D_t^2 - x^2 D_x^2 + cxD_x$

ii) $P = D_t^2 - t^2 D_x^2 + cD_x$.

On a déjà exposé le résultat pour i) dans le Séminaire Vaillant [14] , donc dans cet exposé, on discute le cas ii). Une propriété typique de cet exemple est que l'on peut supposer

(3) $$\mu_j - \lambda_j /t \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^\ell_\xi \setminus 0).$$

Si l'on pose $\tau = \mu_j$ dans (2), alors on a

$$\ell_{m-1}(t,x;\mu_j(t,x;\xi),\xi) = \prod_{\substack{i=1 \\ \neq j}}^{m-s} (\mu_j - \lambda_i) \; \frac{\mu_j - \lambda_j}{t} \; (tr_{s-1}(\mu_j))$$

pour $1 \leqslant j \leqslant s$, qui détermine $tr_{s-1}(t,x;z,\xi)$ de telle manière que tr_{s-1} est une fonction indéfiniment dérivable de $\Omega \times \mathbb{R}^\ell_\xi \setminus 0$, sous l'hypothèse - condition généralisée de E. E. Levi -

(4) pour chaque j $(1 \leqslant j \leqslant s)$, $\ell_{m-1}(\mu_j)$ est divisible par $\dfrac{\mu_j - \lambda_j}{t}$ au sens de $\ell_{m-1}(\mu_j) \Big/ \dfrac{\mu_j - \lambda_j}{t} \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^\ell_\xi \setminus 0)$ compte tenu de (3).

Désormais , on considère

(5) $$\left\{ \begin{array}{l} q \sim q_{m-s} + \dfrac{q_{m-s-1}}{t} + q_{m-s-2} + \dots \\[2ex] r \sim r_s + \dfrac{r_{s-1}}{t} + r_{s-2} + \dots \end{array} \right.$$

<u>Théorème 1</u> : Pour le problème de Cauchy (E) sous les hypothèses 1) 2) 3) et (3), si l'on suppose (4), alors on a

$$\| D^{n+m-2}u(t)\|^2 \leqslant C\{\sum_{j=o}^{m-1} \|\varphi_j\|_{m-j+n+m+N} + \\ + \|D^N f(O)\|^2_{n+m} + \int_o^t \|D_\tau^{N+1} f(\tau)\|_n^2 dz\}$$

pour n : $\forall$ entier ($\geqslant$ O) , N étant choisi convenablement. Il se démontre par les Lemmes suivants .

Lemme 1 : Soit le symbole de $\tilde{P} \sim p_m + \frac{p_{m-1}}{t} + p_{m-2} + \ldots + p_o$. Si p_m est un symbole strictement hyperbolique, alors on aura

$$|(\|D^{n+m-1}u(t)\|^2)'_t| \leqslant C(\|D^{n+m-1}u(t)\|^2 + \\ + \sum_{k=o}^{n} \frac{\|D^{n+m-1-k}u(t)\|^2}{t^{2k+1}} + t \|D^n f(t)\|^2_\sigma)$$

pour n : $\forall$ entier ($\geqslant$ O) et σ : $\forall$ réel .

Lemme 2 :

$$\|D^n(P - QR)u(t)\| \leqslant \text{const.} \sum_{k=o}^{n+m-s-1} \frac{\|D^{n+m-2-k} u(t)\|}{t^{k+2}}$$

A cause du Lemme 2 - c'est-à-dire, il y a singularité plus élevé que le Lemme 1 - on fait depuis le début $u = tw$, alors on a

$$\text{(E)''} \qquad \begin{cases} Rw = \frac{1}{t}(v - [R,t]w) \\ Qv = -(P - QR)(tw) + f \ , \end{cases}$$

où $[A,B] = AB - BA$.

Lemme 3 :

$$\|D^n(\frac{v - [R,t]w}{t})\| \\ \leqslant \text{const.} \{\sum_{k=o}^{n} \frac{\|D^{n-k}v(t)\|}{t^{k+1}} + \sum_{k=o}^{n+1} \frac{\|D^{n+s-1-k}w(t)\|}{t^{k+1}}\} \ .$$

Compte tenu des lemmes 2 et 3 , on emploie le Lemme 1 à chacune des équations (E)", on obtient

$$(6) \qquad (\|D^{n+m-2}w(t)\|^2)'_t \leqslant \gamma\{\|D^{n+m-2}w(t)\|^2 +$$

$$+ \sum_{k=o}^{n+m-s-1} \frac{\|D^{n+m-s-1-k}v(t)\|^2}{t^{2k+1}} + \sum_{k=o}^{n+m-s} \frac{\|D^{n+m-2-k}w(t)\|^2}{t^{2k+1}}\}$$

$$(7) \qquad (\|D^{n+m-s-1}v(t)\|^2)'_t \leqslant \gamma\{\|D^{n+m-s-1}v(t)\|^2 +$$

$$+ \sum_{k=o}^{n} \frac{\|D^{n+m-s-1-k}v(t)\|^2}{t^{2k+1}} + \sum_{k=o}^{n+m-s} \frac{\|D^{n+m-2-k}w(t)\|^2}{t^{2k+1}}$$

$$+ t\,\|D^n f(t)\|^2\} .$$

En choisissant n+m-2-j au lieu de n+m-2 dans (6) et n+m-s-1-j au lieu de n+m-s-1 dans (7), on ajoute ces deux inégalités.

Si l'on définit

$$(8) \qquad \Phi_n(t) = \sum_{j=o}^{n+m-s} \frac{\|D^{n+m-2-j}w(t)\|^2}{t^{2j+1}} + \sum_{j=o}^{n+m-s-1-j} \frac{\|D^{n+m-s-1-j}v(t)\|^2}{t^{2j+1}}$$

alors on aura

$$t\Phi'_n(t) \leqslant Ct\Phi_n(t) + (\Gamma - 1)\,\Phi_n(t) + C\,\frac{\|D^n f(t)\|^2}{t^{2n-3}}$$

où

$$\Gamma = 2(\gamma - 1)(n+m-s) + 2\gamma \quad \text{et} \quad C = \max(\gamma, \gamma\,\frac{t^{2n}-1}{t^2-1})$$

En multipliant $t^{-\Gamma}e^{-Ct}$, il s'ensuit :

$$(t^{-\Gamma+1}\,e^{-Ct}\,\Phi_n(t))' \leqslant Ct^{-\Gamma-2n+3}\,e^{-Ct}\,\|D^n f(t)\| .$$

Si l'on peut vérifier

$$(9) \qquad \lim_{t \downarrow o} t^{-\Gamma+1}\,e^{-Ct}\,\Phi_n(t) = o \quad ,$$

alors on peut l'intégrer ; donc on a

$$\Phi_n(t) \leqslant Ct^{\Gamma - 1} \int_o^t \tau^{-\Gamma - 2n+3} e^{C(t-\tau)} \| D^n f(\tau)\|^2 \, d\tau .$$

Pour vérifier (9), on définit

$$z(t.x) = u(t.x) - \sum_{j=o}^{N+m} \frac{(it)^j}{j!} D_t^j u(0,x)$$

à nouveau .

En employant le raisonnement ci-dessus au problème de Cauchy

$$\begin{cases} Pz = g \\ D_t^j z(0,x) = 0 \qquad (j = 0.1 \ldots N+m) \end{cases}$$

où $g = f - P\{\sum_{j=o}^{N+m} \frac{(it)^j}{j!} D_t^j u(0,x)\}$, si l'on tient compte du

Lemme 4 :

$$D_t^k g(0,x) = 0 \qquad (k \leqslant N)$$

implique

$$\| g(s)\|^2 \leqslant \text{const.} S^{2N+1} \int_o^s \| D_z^{N+1} g(z)\|^2 \, dz ,$$

on peut terminer la preuve du théorème 1, en choisissant $N \geqslant \max(\frac{\Gamma - 1}{2} + n - 1,\ 2n - \frac{7}{2})$.

Théorème 2 : Pour le problème de Cauchy adjoint à (E)

$$(E)^* \quad \begin{cases} P^*(t,x;D_t,D_x)\, v(t,x) = h(t,x) \quad \text{dans } \Omega \\ D_t^j v(T,x) = \psi_j(x) \quad (j = 0,1,\ldots,m-1) \end{cases}$$

sous les hypothèses 1) 2) 3) et (3), si l'on suppose (4), alors on aura

$$\int_o^T \| D^{n+m-2} v(t)\|^2 \, dt \leqslant \text{const.} \{\sum_{j=o}^{m-1} \|\psi_j\|^2_{m-j+n+M} +$$

$$+ \| D^{n+M-1} h(T)\|^2_M + \int_o^T \| D^{n+M-1} h(\tau)\|^2_M \, d\tau\}$$

où M est le plus petit entier plus grand que

$$(n+s)(\gamma + 1) + \gamma - 1 .$$

On résoud (E)" comme il précède ;

$$\begin{cases} Qv = w \\ Rw = -(P^* - RQ)v + h \end{cases}$$

ou plutôt en posant

$$v = t\tilde{v} , \qquad \begin{cases} R\tilde{v} = \frac{1}{t}(w - [Q,t]\tilde{v}) \\ Rw = -(P^* - RQ)(t\tilde{v}) + h . \end{cases}$$

Alors on aura

$$t^{A-2} \| D^{n+m-2} v(t) \|_N^2 \leqslant \text{const.} \{ T^{1+A} \Phi_n^*(T) + \\ + \int_t^T \tau^{A-2n+3} \| D^n h(\tau) \|_N^2 \, d\tau \}$$

pour n'importe quel entier positif N, où

$$A = 2\{Cn + s)(\gamma + 1) + \gamma\},$$

puisque

$$P^* - RQ \in \tilde{L}(m-2)$$

sous l'hypothèse (4).

Si l'on emploie les

Lemme 5 : Pour σ : $\forall$ réel, il existe δ_j $(j = 1,2)$ tel que

$$\| D^{n+m-2} v(t) \|_\sigma^2 \geqslant \delta_1^k \| D^{n+m-2+k} v(t) \|_{\sigma-k}^2 - \\ - \sum_{i=o}^{k-1} \delta_2 \, \delta_1^i \| D^{n-1+i} h(t) \|_{\sigma-1-i}^2 .$$

Lemme 6 : Pour σ : $\forall$ réel, il existe $\{A_i\}_{o\leqslant i\leqslant \mu}$ $\{\beta_i\}_{1\leqslant i\leqslant \mu}$ tel que

$$A_1 \int_0^T \| D_t^{\lambda-\mu} v(t) \|_\sigma^2 \, dt - \sum_{i=1}^{\mu} A_{i+1} \beta_i \, T^{2i-1} \| D_t^{\lambda - \mu + i - 1} v(T) \|_\sigma^2$$

$$\leqslant \int_0^T t^2 \, \| D_t^{\lambda} v(t) \|_\sigma^2 \, dt$$

pour λ $(\geqslant)$ μ : $\forall$ entier ($\geqslant 0$), alors on complétera la preuve du Théorème 2.

Théorème 3 : Pour le problème de Cauchy (E) sous les hypothèses 1) 2) 3) et (3) si l'on suppose (4), alors il existe une solution dans $H_\infty(\Omega)$ pour $f \in H_\infty(\Omega)$ et $\varphi_j \in [H_\infty(\mathbb{R}^2)]^m$.

A la fin, on peut vérifier qu'il y a domaine d'influence pour le problème de Cauchy (E) comme une propriété typique d'hyperbolicité. En effet, on a le

Théorème 4 : Pour le problème de Cauchy (E) où $f \equiv 0$ sous les hypothèses 1) 2) et 3), si l'on suppose

$$\left(p_{m-1} - \frac{1}{2i} \sum_{\alpha=0}^{\ell} \frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi_\alpha \, \partial x_\alpha}\right) (t,x;\mu_j(t,x;\xi),\xi) \Big/ \frac{\mu_j - \lambda_j}{t} \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^\ell_\xi \setminus 0)$$

et

$$\{q_{m-s}, r_s\}(\mu_j) \Big/ \frac{\mu_j - \lambda_j}{t} \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^\ell_\xi \setminus 0)$$

pour chaque j $(1 \leqslant j \leqslant s)$, où $\{\ ,\ \}$ est la parenthèse de Poisson, alors il y a domaine d'influence ; plus précisément, pour chaque t, le support de $u(t,x)$ est contenu dans l'ensemble

$\{x; \bigcup_y |x-y| \leqslant \lambda \max t$, où y parcourt le support des données $(\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x))\}$, où $\lambda \max = \sup|\lambda_i(t.x;\xi)|$ pour $(t,x) \in \Omega$, $|\xi| = 1$ et $1 \leqslant i \leqslant m$.

Remarquons que l'on ne peut pas montrer le théorème d'unicité locale qui est une extension du théorème d'Holmgren; puisque notre hypothèse (4) ne peut pas être conservée par la transformation d'hypersurface spatiale.

Considérons deux problèmes de Cauchy ;

$$\text{a)} \begin{cases} P\,u = 0 & \text{dans } \Omega \\ D_t^j u(0,x) = \varphi_j(x) & \\ \quad (0 \leq j \leq m-1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{a)}^* \begin{cases} P^* v = h & \text{dans } \Omega \\ D_t^j\, v(T,x) = 0 & \\ \quad (0 \leq j \leq m-1) \end{cases} .$$

Si l'on envisage a)* sur $[\delta,T] \times \mathbb{R}^\ell$ pour n'importe quel δ positif, alors nos hypothèses du Théorème 4 sont les mêmes que celles du Théorème 4 de [14] , pour lequel il y a le théorème d'unicité locale, donc domaine d'influence ; c'est à-dire, on a

$$\operatorname{supp} v(t,x) \subset \bigcup_{(s,y) \in \operatorname{supp}[h]} \{(t,x) \in [\delta,T] \,,\; |x-y| \leq \tilde{\lambda}\max|t-s|\}$$

où $\tilde{\lambda}\max = \sup\limits_{\substack{[\delta,T]\times\mathbb{R}^\ell \\ |\xi| = 1 \\ 1 \leq i \leq m}} |\lambda_i(t,x;\xi)|$. Alors, il est évident que l'on peut remplacer $\tilde{\lambda}\max$ par $\lambda\max$, à cause de notre hypothèse 2). Ceci nous permet de montrer l'unicité de $u(t,x)$ du problème a), d'où il résulte l'existence de domaine d'influence.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Chazarain : Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante, Ann. Inst. Fourier (1974).

[2] V. Ja. Ivrii et V. M. Petkov : Necessary conditions for the correctness of the Cauchy problem for non strictly hyperbolic equations, Uspehi Mat. Nauk (1974).

[3] J. Leray : Particules et singularités des ondes, Applications des équations non linéaires à la physique théorique (1962), Gauthier-Villars.

[4] J. Leray et Y. Ohya : Systèmes linéaires, hyperboliques non stricts, Deuxième colloque sur l'Analyse Fonctionnelle (1964).

[5] E. E. Levi : Caratteristiche multiple e problema di Cauchy, Ann. Math. Pura Appl. (1909).

[6] A. Menikoff : The Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Amer. J. Math. (1975).

[7] S. Mizohata et Y. Ohya : Sur la condition de E. E. Levi concernant des équations hyperboliques, Publ. Res. Inst. Math. Sci. (1968).

[8] S. Mizohata et Y. Ohya : Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques multiples II, Jap. J. Math. (1971).

[9] T. Nishitani : Some remarks on the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, J. Math. Kyoto Univ. (1977).

[10] Y. Ohya : Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques à caractéristique multiple , J. Math. Soc. Japan (1964).

[11] Y. Ohya : Le problème de Cauchy à caractéristiques multiples, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (1977).

[12] O. A. Oleinik : On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Comm. Pure Appl. Math. (1970).

[13] R. T. Seeley : Singular integrals on compact manifolds, Amer. J. Math. (1959).

[14] Y. Ohya : Séminaire Vaillant 1979-1980.

* * * *