Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

P. Bolley
J. Camus
C. Mattera

# Analyticité microlocale et itères d'opérateurs

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1978-1979), exp. nº 13, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A13_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 8 - 1 9 7 9

# ANALYTICITE MICROLOCALE ET ITERES D'OPERATEURS

par P. BOLLEY, J. CAMUS, C. MATTERA

Exposé n° XIII 20 Février 1979

On se propose de donner une version microlocale du théorème classique sur les itérés d'un opérateur elliptique.

## § 1. ESPACES $C^L$

Comme dans Hörmander [2], soit $L_k$ une suite croissante de nombres positifs tels que $L_o = 1$, $k \leq L_k$ et $L_{k+1} \leq CL_k$ pour une constante C. Si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note $C^L(\Omega)$ l'ensemble des distributions u dans $\Omega$ telles que, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C_K$ avec

$$(1.1) \qquad \|D^\alpha u\|_{L^2(K)} \leq C_K(C_K L_{|\alpha|})^{|\alpha|}$$

pour tout multi-indice $\alpha$. Notons que l'on peut remplacer dans (1.1) les normes $L^2(K)$ par des normes $H^s(K)$ sans modifier l'espace. Quand $L_k = k+1$, l'espace $C^L(\Omega)$ est l'espace des fonctions analytiques (réelles) dans $\Omega$.

Si $P = P(x,D)$ est un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques dans $\Omega$ et s est un nombre réel, on note $C^L_s(\Omega;P)$ l'espace des distributions u dans $\Omega$ telles que, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C_K$ avec

$$(1.2) \qquad \|P^N u\|_{H^s(K)} \leq C_K(C_K L_{mN})^{mN}$$

pour tout entier $N = 0,1,\ldots$

On note $C^L(\Omega;P) = \bigcup_s C^L_s(\Omega;P)$ . On rappelle le théorème classique sur les itérés d'un opérateur elliptique (Kotaké-Narasimhan [3],...).

**Théorème 1.1** : Si P est un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans $\Omega$ on a $C^L(\Omega) \subset C^L(\Omega;P)$. Inversement si P est elliptique dans $\Omega$, on a $C^L(\Omega;P) \subset C^L(\Omega)$.

On se propose donc de donner une version microlocale de ce théorème; c'est l'objet des théorèmes 3.1 et 3.2.

Tout d'abord les espaces $C^L(\Omega)$ et $C^L(\Omega;P)$ peuvent être décrits à l'aide de la transformation de Fourier. Pour les espaces $C^L(\Omega)$, Hörmander [2] donne la caractérisation suivante :

<u>Proposition 1.2</u> : Soient $x_o \in \Omega$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors $u \in C^L(V)$ pour un voisinage V de $x_o$, si et seulement si, pour un voisinage U de $x_o$, il existe une suite bornée $u_N \in \mathcal{E}'(\Omega)$ telle que :

$$u_N = u \quad \text{dans } U$$

(1.3) $$|\hat{u}_N(\xi)| \leq C(C L_N/|\xi|)^N \qquad N = 1,2,\ldots$$

pour une constante $C > 0$.

On a une caractérisation du même type pour les espaces $C^L(\Omega;P)$.

<u>Proposition 1.3</u> : Avec les notations précédentes, $u \in C^L(V;P)$ pour un voisinage V de $x_o$ si et seulement si pour un voisinage U de $x_o$, il existe une suite $f_N \in \mathcal{E}'(\Omega)$ telle que :

$$f_N = P^N u \quad \text{dans } U$$

(1.4) $$|\hat{f}_N(\xi)| \leq C(C L_{mN})^{mN}(1 + |\xi|)^M \qquad N = 0,1,\ldots$$

pour des constantes $C > 0$ et M.

La suite $f_N$ s'obtient en tronquant la suite $P^N u$ par une même fonction. La suite $u_N$ s'obtient en tronquant u par une suite de fonctions $\chi_N$ ayant des majorations convenables sur leurs dérivées jusqu'à un certain ordre ; dans ce cas la suite $u_N = \chi_N u$ est bornée dans $\mathcal{E}'(\Omega)$, propriété que l'on utilise sous la forme $|\hat{u}_N(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^M$ , $N = 1,2,\ldots$ pour des constantes $C > 0$ et M. Dans le problème des itérés qui nous intéresse ici, cette propriété est remplacée par :

<u>Proposition 1.4</u> : Avec les notations précédentes, soient K un compact de $\Omega$ et $\chi_N \in C_o^\infty(K)$ vérifiant $|D^\alpha \chi_N| \leq C(CN)^{|\alpha|}$ pour $|\alpha| \leq N = 0,1,\ldots$ Alors la suite $f_N = \chi_{pmN+q} P^N u$ , où p et q sont deux entiers indépendants de N, vérifie :

$$|\hat{f}_N(\xi)| \leq C(C(mN + |\xi|))^{mN+M} \qquad N = 0,1,\ldots$$

pour des constantes $C > 0$ et M.

## § 2. FRONT D'ONDE

Dans le cas où u n'est pas $C^L(V)$ pour un voisinage V d'un point $x_o$, on peut obtenir des informations sur la structure des singularités en $x_o$, en examinant les directions pour lesquelles (1.3) n'est pas satisfaite, ce qui a conduit à la définition du front d'onde (Hörmander [2]) que l'on rappelle ici :

Définition 2.1 : Soient $x_o \in \Omega$, $\xi_o \in \mathbb{R}^n \backslash 0$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$; on dit que $(x_o,\xi_o)$ est dans le complémentaire du front d'onde $WF_L(u)$ de u par rapport à $C^L$ si et seulement s'il existe un voisinage ouvert U de $x_o$, un voisinage ouvert conique $\Gamma$ de $\xi_o$ et une suite $u_N \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tels que

$$u_N = u \quad \text{dans } \Omega$$

$$u_N \text{ est bornée dans } \mathcal{E}'(\Omega)$$

$$|\hat{u}_N(\xi)| \leq C(CL_N/|\xi|)^N \qquad \xi \in \Gamma\ ,\quad N = 1,2,\ldots \tag{2.1}$$

pour une constante $C > 0$.

Rappelons également le lemme de troncature suivant (Hörmander [2], lemme 3.3) qui sera utile plus loin.

Lemme 2.2 Avec les notations de la définition 2.1, soient K un voisinage compact de $x_o$ contenu dans U et F un voisinage conique de $\xi_o$ contenu dans $\Gamma$ et fermé dans $\mathbb{R}^n \backslash 0$. Soit $\chi_N \in C_o^\infty(K)$ telle que $|D^\alpha \chi_N| \leq C(CN)^{|\alpha|}$, $|\alpha| \leq N = 0,1,\ldots$ Alors la suite $\chi_N u$ satisfait (2.1) dans F.

De même pour le problème des itérés qui nous intéresse ici, dans le cas où u n'est pas $C^L(V;P)$ pour un voisinage V de $x_o$, on peut obtenir des informations en examinant les directions pour lesquelles (1.4) n'est pas satisfaite ; ce qui nous conduit à la définition du front d'onde associé aux itérés de P :

Définition 2.3 : Soient $x_o \in \Omega$, $\xi_o \in \mathbb{R}^n \backslash 0$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et P un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients dans $\Omega$ ; on dit que $(x_o,\xi_o)$ est dans le complémentaire du front d'onde $WF_L(u;P)$ de u par rapport à $C^L$ et aux itérés de P si et seulement s'il existe un voisinage ouvert U de $x_o$, un voisinage ouvert conique $\Gamma$ de $\xi_o$ et une suite $f_N \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tels que :

$$f_N = P^N u \qquad \text{dans } U$$

$$|\hat{f}_N(\xi)| \le C(C(L_{mN} + |\xi|))^{mN+M} \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$

(2.2) $$|\hat{f}_N(\xi)| \le C(CL_{mN})^{mN}(1+|\xi|)^M \qquad \xi \in \Gamma,\ N = 0,1,\dots$$

pour des constantes $C > 0$ et $M$.

La plupart des propriétés du front d'onde $WF_L(u)$ se transposent pour cette nouvelle notion. Tout d'abord, on a le lemme de troncature suivant analogue au lemme 2.2.

<u>Lemme 2.4</u> : Avec les notations de la définition 2.3, soient $K$ un voisinage compact de $x_o$ contenu dans $U$ et $F$ un voisinage conique de $\xi_o$ contenu dans $\Gamma$ et fermé dans $\mathbb{R}^n\backslash 0$. Soit $\chi_N \in C_o^\infty(K)$ telle que $|D^\alpha \chi_N| \le C(CN)^{|\alpha|}$, $|\alpha| \le N = 0,1,\dots$ Alors la suite $\chi_{mN} P^N u$ satisfait (2.2) dans $F$ .

Ce lemme 2.4 permet en particulier de montrer, à l'aide de la proposition 1.3, le résultat suivant sur la projection de $WF_L(u\,;P)$ :

<u>Théorème 2.5</u> : La projection de $WF_L(u;P)$ est le complémentaire du plus grand ouvert $\Omega'$ de $\Omega$ tel que $u \in C^L_{loc}(\Omega';P)$, où l'espace $C^L_{loc}(\Omega';P)$ est défini de façon naturelle.

Quant à l'invariance par changement de coordonnées, on a :

<u>Théorème 2.6</u> : La définition de $WF_L(u;P)$ est invariante par changement de coordonnées.

Comme pour $WF_L(u)$, on peut regarder $WF_L(u;P)$, non seulement comme un sous-ensemble conique fermé de $\Omega \times \mathbb{R}^n\backslash 0$, mais aussi comme un sous-ensemble conique fermé de $T^*(\Omega)\backslash 0$ en utilisant l'identification standard de l'espace cotangent de $\mathbb{R}^n$ avec $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

## § 3. THEOREME DES ITERES

On peut maintenant donner une version microlocale du théorème des itérés pour un opérateur elliptique.

Tout d'abord on a la "partie directe" suivante :

**Théorème 3.1** : Soient $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $P$ un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans $\Omega$. Alors $WF_L(u;P) \subset WF_L(Pu) \subset WF_L(u)$.

**Démonstration** : Il suffit de vérifier que $WF_L(u;P) \subset WF_L(u)$ ; car si l'on a cette inclusion, on aura $WF_L(Pu;P) \subset WF_L(Pu)$ et, comme d'une part $WF_L(Pu;P) = WF_L(u;P)$ et d'autre part $WF_L(Pu) \subset WF_L(u)$, on pourra en déduire le résultat annoncé.

Soit donc $(x_o,\xi_o) \notin WF_L(u)$ ; il existe un voisinage ouvert $U$ de $x_o$, un voisinage ouvert conique $\Gamma$ de $\xi_o$ et une suite $u_N \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tels que $u_N = u$ dans $U$ et $|\hat{u}_N(\xi)| \leq C(CL_N/|\xi|)^N$, $\xi \in \Gamma$.

Soient $K$ un voisinage compact de $x_o$ contenu dans $U$, $F$ un voisinage conique de $\xi_o$ contenu dans $\Gamma$, fermé dans $\mathbb{R}^n\backslash 0$ et $\chi_N \in C_o^\infty(U)$ avec $\chi_N \equiv 1$ dans $K$ et $|D^\alpha \chi_N| \leq C(CN)^{|\alpha|}$ pour $|\alpha| \leq N = 0,1,\ldots$ On va montrer que la suite $f_N = \chi_{2mN} P^N u$ convient pour en déduire que $(x_o,\xi_o) \notin WF_L(u;P)$.

On a :

$$\hat{f}_N(\xi) = \int e^{-i<x,\xi>} \chi_{2mN}(x)\, P^N u(x)dx = \int u(x)\, {}^tP^N(\chi_{2mN}(x)e^{-i<x,\xi>})dx$$

On pose :

$${}^tP(e^{-i<x,\xi>}\chi_{2mN}(x)) = e^{-i<x,\xi>} R\,\chi_{2mN}$$

où $R$ est un opérateur de la forme $R(x,\xi;D)$ qu'on ordonne suivant les puissances de $\xi$ : $R = R_o + R_1 + \ldots + R_m$, $R_j$ étant un opérateur différentiel d'ordre $\leq j$, à coefficients analytiques en $x$ et homogènes de degré $m-j$ en $\xi$.

Ainsi :

$$\hat{f}_N(\xi) = \int e^{-i<x,\xi>} u(x)\, R^N \chi_{2mN}(x)dx$$

avec $R^N \chi_{2mN}(x) = \sum_{0 \leq j_i \leq m} R_{j_1} \ldots R_{j_N}\, \chi_{2mN}$ .

En utilisant les propriétés des dérivées des $\chi_N$, l'analyticité en x des coefficients des $R_j$ et l'homogénéité en $\xi$ de ces mêmes coefficients, on a (cf. Hörmander [2], lemme 5.2) :

$$|D^\alpha(R_{j_1}\ldots R_{j_N}\chi_{2mN})| \leq C^{N+1}(mN)^{|\alpha|+j_1+\ldots+j_N}|\xi|^{mN-j_1-\ldots-j_N}$$

pour $|\alpha| \leq mN$. Par conséquent :

$$|D^\alpha(R^N\chi_{2mN})| \leq C^{N+1}(mN)^{|\alpha|}|\xi|^{mN} \quad |\alpha| \leq mN\ ,\ |\xi| \geq mN$$

De là on peut déduire grâce au lemme de troncature 2.2 que $\hat{f}_N(\xi)$ satisfait (2.2) pour $\xi \in F$ et $|\xi| \geq mN$.

Il est alors facile d'en déduire que $(x_o,\xi_o) \notin WF_L(u;P)$.

"Inversement" on a le résultat suivant :

<u>Théorème 3.2</u> : Soient $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et P un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques dans $\Omega$. Alors :

$$WF_L(u) \subset WF_L(u;P) \cup \{(x,\xi) \in T^*(\Omega)\backslash 0; P_m(x,\xi) = 0\}$$

$P_m$ étant la partie principale de P.

<u>Démonstration</u> : On adapte la technique utilisée par Hörmander ([2], théorème 5.1) pour démontrer l'inclusion :

$$WF_L(u) \subset WF_L(Pu) \cup \{(x,\xi) \in T^*(\Omega)\backslash 0; P_m(x,\xi) = 0\}.$$

Soit donc $(x_o,\xi_o) \notin WF_L(u;P)$ et tel que $P_m(x_o,\xi_o) \neq 0$.

Il existe un voisinage ouvert U de $x_o$, un voisinage conique ouvert $\Gamma$ de $\xi_o$ et une suite $f_N$ qui coïncide avec $P^N u$ dans U et vérifiant (2.2) et (2.3). Soient K un voisinage compact de $x_o$, contenu dans U, F un voisinage conique de $\xi_o$ contenu dans $\Gamma$ et fermé dans $\mathbb{R}^n\backslash 0$ tels que $P_m(x;\xi) \neq 0$ dans $K\times\Gamma$. Soit $\chi_N \in C_o^\infty(K)$ avec $|D^\alpha\chi_N| \leq C(CN)^{|\alpha|}$ pour $|\alpha| \leq N = 0,1,\ldots$. On va montrer que la suite $u_N = \chi_{3m^2N}P^N u$ convient pour en déduire que $(x_o,\xi_o) \notin WF_L(u)$.

On a :

$$\hat{u}_N(\xi) = \int u(x)\,\chi_{3m^2N}(x)\,e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx \quad .$$

Pour estimer ce terme, on construit une solution $v(x,\xi)$ de l'équation :

(3.1) $$ {}^tP^N v(x,\xi) = \chi_{3m^2N}(x)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle} $$

où ${}^tP$ est l'opérateur adjoint dont la partie principale est $P_m(x,-D)$. Pour faire cette construction on pose :

$$ v = e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, w / P_m^N(x,\xi) $$

On a :

$$ {}^tP(e^{-i\langle x,\xi\rangle} w/P_m(x,\xi)) = e^{-i\langle x,\xi\rangle}(I-R)w $$

où $R = R_1 + \ldots + R_m$ avec $R_j = R_j(x,\xi,D)$ opérateur différentiel d'ordre $\leq j$ à coefficients analytiques en $x$ et homogènes de degré $-j$ en $\xi$, pour $x \in K$ et $\xi \in F$ ; c'est le même genre de décomposition que dans la démonstration précédente. De cette formule, on déduit par récurrence que :

(3.2) $$ {}^tP^N(e^{-i\langle x,\xi\rangle} w/P_m^N(x,\xi)) = e^{-i\langle x,\xi\rangle}((I - R)P_m(x,\xi))^N P_m^{-N}(x,\xi)w $$

Il faut donc résoudre à la place de (3.1) :

(3.3) $$ ((I - R)P_m(x,\xi))^N P_m^{-N}(x,\xi)w = \chi_{3m^2N}(x) $$

La solution formelle de cette équation est $w = P_m^N(x,\xi)(P_m^{-1}(x,\xi)\sum_o^\infty R^k)^N \chi_{3m^2N}$. Cependant, on ne doit pas introduire des dérivées d'ordre trop élevé, si bien que l'on va considérer la solution approchée suivante de (3.3) :

$$ w_N = P_m^N \sum_{k_1+\ldots+k_N \leq mN} P_m^{-1}R^{k_1}P_m^{-1}\ldots P_m^{-1}R^{k_N}\chi_{3m^2N} $$

où $P_m = P_m(x;\xi)$.

Cette fonction $w_N$ vérifie l'équation

(3.4) $$ ((I-R)P_m)^N P_m^{-N} w_N = \chi_{3m^2N} - e_N $$

où

$$e_N = \sum_{j=1}^{N} ((I-R)P_m)^{N-j} \sum_{k_j+\ldots+k_N=mN} R^{k_j+1} P_m^{-1} R^{k_{j+1}} P_m^{-1} \ldots P_m^{-1} R^{k_N} \chi_{3m^2N}$$

D'après (3.2), cette relation (3.4) signifie :

$${}^tP^N(e^{-i<x,\xi>} w_N(x,\xi)/P_m^N(x,\xi)) = e^{-i<x,\xi>}(\chi_{3m^2N}(x) - e_N(x,\xi))$$

Ainsi, on a la formule de représentation :

$$\widehat{u\chi_{3m^2N}}(\xi) = \int u(x) e_N(x,\xi) e^{-i<x,\xi>} dx + \int e^{-i<x,\xi>} f_N(x) \frac{w_N(x,\xi)}{P_m^N(x,\xi)} dx$$

Il reste à évaluer chaque terme de droite. En utilisant les développements de $e_N$ et de $w_N$ en fonction des $R_j$, $P_m(x,\xi)$ et $P_m^{-1}(x,\xi)$, on obtient, comme dans la démonstration du théorème précédent, des majorations de la forme :

$$|D^\alpha w_N(x,\xi)| \le C^N (mN)^{|\alpha|}$$

$$|D^\alpha e_N(x,\xi)| \le C^N (mN)^{|\alpha|+mN} |\xi|^{-mN}$$

pour $|\alpha| \le mN$, $|\xi| \ge mN$ et $\xi \in F$, $x \in K$.

De là, on peut en déduire que d'une part, en utilisant en particulier le lemme 2.4, on a :

$$\left|\int e^{-i<x,\xi>} f_N(x) \frac{w_N(x,\xi)}{P_m^N(x,\xi)} dx\right| \le C(C\,L_{mN}/|\xi|)^{mN}(1+|\xi|)^M$$

pour $|\xi| \ge mN$ et $\xi \in F$, et que d'autre part :

$$\left|\int e^{-i<x,\xi>} u(x)\, e_N(x,\xi) dx\right| \le C^N (mN)^{mN+M'} |\xi|^{-mN+M'}$$

pour $|\xi| \ge mN$ et $\xi \in F$ (la constante $M'$ étant liée à l'ordre de $u$ dans K).

A partir de ces majorations, il est facile d'en déduire que $(x_o,\xi_o) \notin WF_L(u)$. Ceci termine la démonstration du théorème 3.2.

Comme corollaire, on retrouve le résultat de régularité donné par Hörmander ([2]; théorème 5.4) :

**Corollaire 1** : Soient $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $P$ un opérateur différentiel d'ordre $m$ à coefficients analytiques dans $\Omega$. Alors :

$$WF_L(u) \subset WF_L(Pu) \cup \{(x,\xi) \in T^*(\Omega)\backslash 0,\ P_m(x,\xi) = 0\} .$$

Si l'on a des majorations locales sur les itérés de $u$, on a le corollaire suivant :

**Corollaire 2** : Si $u \in C^L(\Omega;P)$ où $P$ est un opérateur différentiel d'ordre $m$ à coefficients analytiques dans $\Omega$, alors $WF_L(u) \subset \{(x,\xi) \in T^*(\Omega)\backslash 0 ,\ P_m(x,\xi) = 0\}$.

Pour terminer, on peut écrire un dernier corollaire relatif à un système d'opérateurs qui généralise le théorème de Kotaké-Narasimhan :

**Corollaire 3** : Soient $P_1,\dots,P_r$ des opérateurs différentiels à coefficients analytiques dans $\Omega$ d'ordre $m_1,\dots,m_r$ respectivement et tels que $\bigcap_{j=1}^{r} \{(x,\xi) \in T^*(\Omega)\backslash 0 \ ; P_{m_j}(x,\xi) = 0\} = \emptyset$. Alors $\bigcap_{j=1}^{r} C^L(\Omega;P_j)$ , $L = C^L(\Omega)$.

Remarque : Un résultat analogue au corollaire 3 a été démontré par Damlakhi [1], lorsque les $P_{m_j}(x;\xi)$ sont réels et lorsque l'espace $C^L(\Omega)$ est l'espace des fonctions analytiques ; la méthode utilisée dans [1] consiste à introduire une variable supplémentaire $t$ et des opérateurs de la forme $Q_j = D_t^{m_j} - P_j(x,D)$ auxquels on applique le théorème de régularité analytique de Hörmander ([2]; théorème 5.4) (que l'on retrouve ici dans le corollaire 1).

Signalons que cette méthode permet également de traiter le cas où les $P_{m_j}$ sont complexes ; plus précisément elle permet de démontrer le corollaire 2 lorsque l'espace $C^L(\Omega)$ est l'espace des fonctions analytiques.

---

## BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Damlakhi : Analyticité et itérés d'opérateurs pseudo-différentiels. A paraître dans J. Math. Pures et Appl.

[2] L. Hörmander : Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients. Comm. Pure Appl. Math., Vol.XXIV, 671-704 (1971).

[3] T. Kotaké , M. S. Narasimhan : Fractional powers of a linear elliptic operator. Bull. Soc. Math. France, 90, 449-471 (1962).