Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

C. Foias

R. Temam

Solutions statistiques homogènes des équations de Navier-Stokes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1978-1979), exp. nº 10, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A10_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 8 - 1 9 7 9

SOLUTIONS STATISTIQUES HOMOGENES DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

par C. FOIAS et R. TEMAM

Exposé n^{o} X

23 Janvier 1979

§ 1. INTRODUCTION

La théorie mathématique des écoulements turbulents est loin d'être achevée. Commencée à la fin du siècle dernier [20], elle s'est surtout développée comme un domaine de la physique théorique et expérimentale, dont le cadre mathématique est resté vague. Ce développement repose sur l'hypothèse que les moyennes statistiques des grandeurs physiques remarquables (vitesses, énergie, le spectre de l'énergie, etc...; voir [2], [19]) ont des propriétés spatio-temporelles déterminées (par les données physiques ou expérimentales de l'écoulement envisagé). Ainsi pour contruire un cadre mathématique rigoureux pour ce développement il fallait introduire dans les équations de Navier-Stokes des éléments aléatoires, d'écrire les nouvelles équations, les résoudre, etc... La voie la plus simple était de considérer les équations de Navier-Stokes :

$$(1.1) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \Delta u_i + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \ (i = 1,2,3), \quad \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

comme une "équation différentielle" dans un espace fonctionnel adéquat H dont la donnée initiale $u(0) = u_o$ satisfait

$$(1.2) \qquad \text{Probabilité } \{u_o \in A\} = \mu(A) \qquad (A \subset H, \text{ A borélien})$$

où μ est une mesure de probabilité dans H, et de déterminer et d'étudier

$$(1.3) \qquad \mu_t(A) = \text{Probabilité } \{u(t) \in A\} \qquad (A \subset H, \text{ A borélien}).$$

Ce programme initialisé dans [13], a été développé d'une manière mathématique rigoureuse dans [7], [8], [9], [10], [11], a été ensuite repris , généralisé et approfondi par des nombreux auteurs (voir par exemple [3], [1], [24], [4], [25], [17], [26], etc...). Toutefois même du point de vue académique, les résultats mathématiques obtenus jusqu'en 1977 ne concernaient pas le cas le plus étudié dans la théorie statistique de la turbulence notamment celui de la turbulence homogène (voir [2], [5]). C'est seulement en 1977 que M. I. Visik et A. V. Fursikov [26] sont parvenus à prouver que lorsque μ (voir (1.2)) est homogène (c'est-à-dire $H \subset L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)^3$ et μ est invariante par rapport à toutes les translations spatiales) on peut construire des μ_t homogènes (pour tout $t > 0$) telles que "(1.3) soit vraie". Leur construction, tout à fait ingénieuse, est basée sur une modification des équations de Navier-Stokes englobant une viscosité artificielle et une pénalisation, notamment elle est basée sur l'étude du sytème

$$(1.4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} - \nu \Delta u_i + \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j u_i) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \varepsilon\Big(\sum_{i=1}^{3} u_j^2\Big)^2 u_i = 0 \quad (i = 1,2,3) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\varepsilon p \,, \end{cases}$$

qui est proche d'une modification des équations de Navier-Stokes proposée en [22] pour l'analyse numérique de ces équations.

Il semble bien difficile d'utiliser (1.4) pour en déduire les estimations spectrales de type Kolmogorov (voir [14], [2], [19], [5], [21]) pour la distribution de l'énergie u(x).u(x) par rapport aux solutions μ_t .

Le but de cet exposé est de présenter une construction naturelle et directe des solutions statistiques homogènes , plus simple et plus maniable que celle de [26], qui en outre, permettra de formuler les problèmes mathématiques, presque tous ouverts, reliant les équations de Navier-Stokes aux modèles phénomènologiques remarquables de R. Kraichnan [15] et de U. Frisch, P. L. Sulem et M. Nelkin [12], décrivant d'une manière empirique convainquante le comportement dans l'intervalle spectral inertial d'un écoulement turbulent.♦

§ 2. SOLUTIONS STATISTIQUES PERIODIQUES

Considérons les espaces fonctionnels

$$(2.1)\quad \begin{cases} H_{loc} = \{u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)^n \,;\ \nabla \cdot u = 0\} \\ H^1_{loc} = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)^n \,;\ \nabla \cdot u = 0\} \end{cases}$$

munis des semi-normes ♦♦

♦ Le sens mathématique des termes utilisés dans cette introduction sera précisé dans la suite de cet exposé.

♦♦ Les produits scalaires associés seront notés par $(u,v)_Q$ et resp. $((u,v))_Q$.

$$(2.2)\qquad \begin{cases} |u|_Q = \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x).u(x)dx\right)^{1/2}, \text{ resp.} \\ \|u\|_Q = \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} u(x). \frac{\partial}{\partial x_j} . u(x)dx\right)^{1/2}, \end{cases}$$

où $Q =]a,b[^n (-\infty < a < b < \infty)$; évidemment ces espaces sont des espaces de Fréchet. Pour $0 < L < \infty$ soit $H(L)$ et $H^1(L)$ les sous-espaces, respectivement de H_{loc} et H^1_{loc}, respectivement, formés par les u périodiques de période L^n, c'est-à-dire tels que

$$u(x_1,\dots,x_j + L,\dots,x_n) = u(x_1,\dots,x_n) \text{ (pp.) dans } \mathbb{R}^n, \ j = 1,\dots,n.$$

munis des normes

$$(2.3)\qquad |u|_{Q(L)} \quad \text{et} \quad \left(|u|^2_{Q(L)} + \|u\|^2_{Q(L)}\right)^{1/2} \quad (\text{où } Q(L) =]0,L[^n)$$

respectivement, $H(L)$ et $H^1(L)$ sont des espaces de Hilbert. Pour $U \in \mathbb{R}^n$, soit $H_U(L)$ la sous-variété affine de $H(L)$ formes par les $u \in H(L)$ vérifiant la condition

$$(2.4)\qquad \int_{Q(L)} u\,dx = U .$$

Posons aussi $H^1_U(L) = H_U(L) \cap H^1(L)$; sur $H^1_o(L)$, $\|u\|_Q$ est une norme équivalente à celle de $H^1(L)$, indiquée dans (2.3). Dans [11] (voir les §§ I.1,3 et II.2.3) on a démontré le résultat suivant ♦ :

Soit μ une mesure de probabilité, borélienne (c'est-à-dire, définie sur les parties boréliennes de H_{loc}) telle que

$$(2.5)\qquad \mu(H_U(L)) = 1$$

pour certains $L \in]0,\infty[$ et $U \in \mathbb{R}^n$ et

$$(2.6)\qquad \int |u|^2_{Q(L)}\, d\mu(u) < \infty .$$

Alors il existe une famille

$$(2.7)\qquad \{\mu_t\}_{0 \le t < \infty}$$

de mesures de probabilité, boréliennes dans H_{loc}, telle que

$$(2.8)\qquad \mu_t(H_U(L)) = 1 \qquad (t \in [0,\infty[),$$

♦ L'énoncé de ce résultat de [11] est réduit ici à une forme correspondante à nos préoccupations dans cet exposé.

$$(2.9)\qquad \begin{cases} \int |u|^2_{Q(L)}\, d\mu_.(u) \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}) \\ \int \|u\|^2_{Q(L)}\, d\mu_.(u) \in L^1(0,T;\mathbb{R}) \end{cases} \qquad (T \in]0.\infty[)$$

et

$$(2.10)\qquad \begin{cases} \mathcal{E}_t(\Phi) \overset{\text{def}}{=} \int \Phi(u)d\mu_t(u) + \int_0^t \{\int [\nu((u,\Phi'(u)))_{Q(L)} + \\ + ((u.\nabla)u,\Phi'(u))_{Q(L)}]d\mu_\tau(u)\}d\tau = \int \Phi(u)d\mu(u) \quad (t \in]0,\infty[) \end{cases}$$

où $\Phi : H^1_U(L) \mapsto \mathbb{R}$ est une fonctionnelle telle que sa différentielle de Fréchet $\Phi'(u)$ dans $H_o(L)$ soit continue et bornée de $H^1_U(L)$ dans $H^1_o(L)$.

En outre

$$(2.12)\qquad \mathcal{E}_t(\Phi) \leq \mathcal{E}_o(\Phi) \qquad (t \in]0,\infty[)$$

quel que soit

$$(2.13)\qquad \begin{cases} \Phi(u) = \varphi(|u|^2_{Q(L)}) \quad (u \in H^1_U(L)),\ \text{où} \\ \varphi \in C^1([0,\infty[;R),\ 0 \leq \varphi' \in L^\infty(0,\infty;\mathbb{R}) . \end{cases}$$

Remarquons que (2.10) est une forme différentielle rigoureuse de la définition (1.2,3). En effet si μ_t était définie par (1.2,3), alors pour une fonctionnelle Φ comme ci-dessus, on aurait :

$$(2.14)\qquad \int \Phi(u)d\mu_t(u) = \int \Phi(u(t))d\mu(u) ,$$

où $u(t) = u(.,t)$ est la solution des équations de Navier-Stokes (1.1) à valeurs (pour t fixé) dans $H_U(L)$, aux données initiales $u \in H_U(L)$ (évidemment cette définition aurait un sens seulement si une telle solution était déterminée par ses données initiales ce qui est encore, plus de 40 ans après [18], un problème ouvert). De (2.14) nous obtenons (toujours d'une manière heuristique)

$$\frac{d}{dt}\int \Phi(u)d\mu_t(u) = \int \frac{d}{dt}\Phi(u(t))d\mu(u) =$$

$$= \int (\int_{Q(L)} (\frac{du}{dt} \cdot \Phi'(u(t))dx)d\mu(u) =$$

$$= \int [\int_{Q(L)} (-\nu\,\Delta u(t) + (u(t).\nabla)u(t) + \nabla p(t)).\Phi'(u(t))dx]\,d\mu(u) =$$

$$= \int\left[\int_{Q(L)} (-\nu\,\Delta u(t) + (u(t).\nabla)u(t)).\Phi'(u(t))dx\right]d\mu(u) =$$

$$= \int\left[\int_{Q(L)} ((-\nu\,\Delta u + (u.\nabla)u).\,\Phi'(u))dx\right]d\mu_t(u) =$$

$$= \int\left[\nu((u,\Phi'(u)))_{Q(L)} + ((u.\nabla)u,\Phi'(u))_{Q(L)}\right]d\mu_t(u),$$

d'où (2.8)◆.

En vertu de ces considérations, la famille $\{\mu_t\}_{0\leq t<\infty}$ est une solution statistique (des équations de Navier-Stokes) à donnée initiale μ.

Si maintenant μ, au lieu de (2.5) vérifie la condition moins restrictive

(2.15) $$\mu(H(L)) = 1,$$

on peut construire une solution statistique $\{\mu\}_{0\leq t<\infty}$ à donnée initiale μ qui vérifie , au lieu de (2.8), la condition :

(2.16) $$\mu_t(H(L)) = 1 \qquad (t\in[0,\infty[).$$

L'idée d'une preuve de ce résultat est la suivante : on fait la désintégration de μ (voir [6]) :

(2.17) $$\mu = \int_{\mathbf{R}^n}\mu^{(U)}d\lambda(U)$$

où λ est une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^n$. On montre qu'on peut choisir des solutions statistiques $\{\mu_t^{(U)}\}_{0\leq t<\infty}$ $(U\in\mathbf{R}^n)$ aux données initiales $\mu^{(U)}$ telles que

(2.18) $$\mu_t = \int\mu_t^{(U)}d\lambda(U)$$

ait un sens pour tout $t\in[0,\infty]$. On vérifie ensuite que (2.9) et (2.12,13) sont vérifiées et que dans (2.10) on peut prendre toute fonctionnelle $\Phi : H^1(L) \mapsto \mathbf{R}$ dont la différentielle de Fréchet Φ' dans $H(L)$ est continue et bornée de $H^1(L)$ dans $H^1(L)$.

◆◆ Les deux intégrations par parties faites ci-dessus sont justifiées (toujours d'une manière heuristique) par l'hypothèse de périodicité.

Une telle solution statistique sera appelée périodique, de période L. De (2.12-13) il vient facilement

$$\frac{1}{2}\int |u|^2_{Q(L)}\, d\mu_t(u) + \int_0^t [\nu\int \|u\|^2_{Q(L)} d\mu_\tau(u)]\, d\tau \leq$$

(2.19)

$$\leq \frac{1}{2}\int |u|^2_{Q(L)}\, d\mu(u) \qquad (t \in [0,\infty[).$$

Pour $0 \leq K_o < K_1 \leq \infty$ et $u \in H(L)$ posons

(2.20)
$$\begin{cases} P_{K_o}^{K_1} u(x) = \displaystyle\sum_{K_o \leq |k| < K_1} a_k\, e^{\frac{2\pi i}{L} k.x} & (x \in \mathbb{R}^n), \text{ où} \\ u(x) = \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k\, e^{\frac{2\pi i}{L}} & (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

est le développement en série de Fourier de u. Alors en prenant dans (2.10), $\Phi(u) = \frac{1}{2}\varphi(|P_o^K u|^2_{Q(L)})$ avec des fonctions $\varphi: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ convenables , on obtient l'identité suivante :

(2.21)
$$\begin{cases} \frac{1}{2}\int_{\{u:\frac{1}{2}|P_o^k u|^2_{Q(L)} < \xi\}} |P_o^k u|^2_{Q(L)}\, d\mu_t(u) + \\ + \int_0^t \{\int_{\{u:\frac{1}{2}|P_o^k u|^2_{Q(L)} < \xi\}} [\nu\|P_o^k u\|^2_{Q(L)} + ((P_k^\infty u.\nabla)P_k^\infty u, P_o^k u)_{Q(L)} - \\ - ((P_o^k u.\nabla)P_o^k u, P_k^{2k} u)_{Q(L)}]\, d\mu_\tau(u)\}\, d\tau = \\ = \frac{1}{2}\int_{\{u:\frac{1}{2}|P_o^k u|^2_{Q(L)} < \xi\}} |P_o^k u|^2_{Q(L)}\, d\mu(u) \quad (t \in [0,\infty[,\ K \in]0,\infty[). \end{cases}$$

§ 3. MESURES HOMOGENES

Pour $a \in \mathbb{R}^n$, soit $\tau_a : H_{loc} \mapsto H_{loc}$ définie par

(3.1) $$(\tau_a u)(x) = u(x-a) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Il est évident que si $A \subset H_{loc}$ est borélien alors $\tau_a A$ est aussi borélien. Ainsi si μ est une mesure de probabilité, borélienne dans H_{loc}, et si

$$(\mu \circ \tau_a)(A) \overset{\text{def}}{=} \mu(\tau_a A) \qquad (A \subset H_{loc},\ A \text{ borélien}), \tag{3.2}$$

alors $\mu \circ \tau_a$ est aussi une mesure de probabilité, borélienne, dans H_{loc}. μ est dite <u>homogène</u> lorsque

$$\mu \circ \tau_a = \mu \qquad (a \in \mathbb{R}^n). \tag{3.3}$$

Une telle mesure μ a plusieurs propriétés remarquables. Nous nous bornerons à indiquer seulement celles qu'on utilisera dans la suite .

Soit d'abord $G : H_{loc} \mapsto L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$G(\tau_a u)(x) = G(u)(x-a) \quad \text{pp dans } \mathbb{R}^n \ (a \in \mathbb{R}^n) \tag{3.4}$$

$$\int \int_Q |G(u)(x)|\, dx\, d\mu(u) < \infty \tag{3.5}$$

pour un certain $Q = Q_o =]a_o, b_o[^n$. Alors il est facile de voir que pour tout $Q =]a,b[^n$ l'intégrale existe

$$\int \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q G(u)(x)dx \right) d\mu(u) \tag{3.6}$$

et prend une valeur indépendante de Q. En outre si

$$G(u)(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} G'(u)(x) \quad \text{pp. dans } \mathbb{R}^n \tag{3.7}$$

pour un j (=1,2,...,n) et une application G' jouissant des propriétés (3.4,5), alors la valeur (3.6) est égale à 0.

Supposons maintenant que μ possède en outre l'une des propriétés suivantes

$$\frac{1}{2} \int |u|_Q^2 \, d\mu(u) < \infty , \tag{3.8}$$

$$\nu \int \|u\|_Q^2 d\mu(u) < \infty , \tag{3.9}$$

pour un certain $Q = Q_o$ (comme ci-dessus). En appliquant la conclusion précédente à

$$G(u)(x) = u(x).u(x) \quad \text{ou} \quad G(u)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} u(x).\frac{\partial}{\partial x_j} u(x) ,$$

nous obtenons que l'intégrale (3.8) ou (3.9) selon le cas, existe pour tout Q et est indépendante de Q. On les notera $e(\mu)$, resp. $\varepsilon(\mu)$. Il est facile de voir ensuite que

$$\int\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x).u(x)}{(1+x.x)^\alpha}\, dx\right) d\mu(u) \leq C_\alpha\, e(\mu) \tag{3.10}$$

et

$$\int\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) . \frac{\partial}{\partial x_j} u(x)}{(1+x.x)^\alpha}\, dx\right) d\mu(u) \leq C_\alpha\, \varepsilon\,(\mu) \tag{3.11}$$

où $\alpha > n/2$ est arbitraire et C_α est une constante $\in]0,\infty[$ convenable. Ainsi μ est concentrée sur les espaces de Hilbert

$$H_\alpha = \{u \in H_{loc} : |u|_\alpha^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x).u(x)}{(1+x.x)^\alpha} dx < \infty\} \tag{3.12}$$

si (3.8) est vraie et

$$H_\alpha^1 = \{u \in H_{loc}^1 : \|u\|_\alpha^2 = |u|_\alpha^2 + \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\frac{\partial}{\partial x_j} u(x) . \frac{\partial}{\partial x_j} u(x)}{(1+x.x)^\alpha} dx < \infty\} \tag{3.13}$$

si (3.8,9) sont vraies, et cela quel que soit $\alpha > n/2$.

Concernant ces espaces (3.12,13) remarquons que

$$H(L) \subset H_\alpha \qquad (L \in]0,\infty[,\ \alpha \in]\tfrac{n}{2},\infty[) \tag{3.14}$$

et que l'application identique de H_β^1 dans H_α est compacte lorsque $\alpha > \beta$ $(> \frac{n}{2})$.♦ Finalement il existe des applications linéaires $P_\alpha(L)$ définies presque partout par rapport à μ, de H_α sur $H(L)$ telles que presque partout par rapport à μ, on a

$$P_\alpha(L)\tau_a u = \tau_a P_\alpha(L) u \qquad (a \in \mathbb{R}^n) \tag{3.15}$$

et (de nouveau pour $\alpha > \frac{n}{2}$)

$$P_\alpha(L_p)u \xrightarrow{H_\alpha} u \qquad (u \in H_\alpha), \tag{3.16}$$

pour toute suite $L_p \to \infty$, $L_{p+1}/L_p \in \mathbb{N}$.

♦ Cette courte présentation des propriétés des mesures homogènes sur H_{loc} est inspirée de [26].

§ 4. SOLUTIONS STATISTIQUES PERIODIQUES ET HOMOGENES

Soit μ une mesure de probabilité, borélienne dans H_{loc}, homogène et vérifiant (2.15). Soit $\{\mu_t\}_{0\leq t<\infty}$ la solution statistique périodique, de période L, à donnée initiale μ, dont l'existence et quelques propriétés ont été indiquées dans le paragraphe 2. Alors on vérifie aussitôt que $\{\tau_a\mu_t\}_{0\leq t<\infty}$ est une solution du même type quelque soit $a\in \mathbb{R}^n$. Par conséquent si

$$(4.1) \qquad \tilde{\mu}_t = L^{-n}\int_{Q(L)} \tau_a\mu_t\, da \qquad (t\in[0,\infty]) ,$$

alors $\{\tilde{\mu}_t\}_{0\leq t<\infty}$ est aussi une solution statistique périodique, de période L, et à donnée initiale μ. Comme μ_t vérifie (2.16), de (4.1) on déduit aussitôt que $\tilde{\mu}_t$ est homogène.

Ainsi on obtient que pour toute mesure de probabilité, borélienne dans H_{loc}, satisfaisant (2.15) et (2. 6) (cette dernière étant équivalente à

$$(4.2) \qquad e(\mu) < \infty),$$

il existe une solution statistique $\{\mu_t\}_{0\leq t<\infty}$, périodique, de période L et homogène (c'est-à-dire telle que μ_t soit homogène pour tout $t\in[0,\infty]$) à donnée initiale μ.

Remarquons qu'en vertu du paragraphe 3, la relation (2.19) devient

$$(4.3) \qquad e(\mu_t) + \int_0^t \varepsilon\,(\mu_\tau)d\tau \leq e(\mu) \qquad (t\in[0,\infty[).$$

§ 5. SOLUTIONS STATISTIQUES HOMOGENES

$$(5.1) \qquad e(\mu) < \infty .$$

Soit μ une mesure de probabilité, borélienne, dans H_{loc} homogène et telle que : Pour un $\alpha\in]n/2,\infty[$ fixé et $L\in]0,\infty[$ arbitraire posons

$$(5.2) \qquad \mu^{(L)}(A) = \mu(P_\alpha(L)^{-1}(A\cap H(L))) \quad (A\subset H_{loc} , \text{ A borélien }) ;$$

$\mu^{(L)}$ est une mesure de probabilité, borélienne, dans H_{loc}, qui de plus est homogène et concentrée sur H(L) (c'est-à-dire, vérifiant (2.15)). En outre on a aussi

$$\sup_{L} e(\mu^{(L)}) < \infty . \tag{5.3}$$

Soit $\{\mu_t^{(L)}\}_{0\le t<\infty}$ une solution statistique périodique, de période L, homogène, à donnée initiale $\mu^{(L)}$. Alors en vertu de (4.3) et de (3.10, 11, 12,13) on déduit aussitôt que pour tout $T \in \,]0,\infty[$ fixé, on a

$$\sup_{0\le t\le T} \int |u|_\alpha^2 d\mu_t^{(L)}(u) \le C_1 \qquad (L \in \,]0,\infty[\,) \tag{5.4}$$

$$\int_0^T [\int \|u\|_\beta^2 d\mu_t^{(L)}(u)]\,dt \le C_2 \quad (L \in \,]0,\infty[\,) \tag{5.5}$$

où C_{1-2} sont des constantes convenables et $\alpha > \beta > n/2$. Fixons $\beta \in \,]\frac{n}{2},\alpha[$ et introduisons l'espace $\mathcal{C}_2(H_\alpha)$ des fonctionnelles $\Phi : H_\alpha \mapsto \mathbb{R}$ continues et telles que

$$\|\Phi\|_{\mathcal{C}_2(H_\alpha)} = \sup \frac{|\Phi(u)|}{1+|u|_\alpha^2} < \infty \tag{5.6}$$

Soit en outre $F^{(L)} \in (L^1(0,T;\mathcal{C}_2(H_\alpha)))'$ définie par

$$F^{(L)}(\Phi) = \int [\int \Phi(t,u)\,d\mu_t^{(L)}(u)]\,dt \quad (\Phi \in L^1(0,T;\mathcal{C}_2(H_\alpha))) . \tag{5.7}$$

Evidemment

$$\|F^{(L)}\| \le 1 + C_1 . \tag{5.8}$$

Prenons $L_p \to \infty$, $L_{p+1}/L_p \in \mathbb{N}$; soit $F \in (L^1(0,T;\mathcal{C}_2(H_\alpha)))'$ un point adhérent pour la topologie $\sigma((L^1(0,T;\mathcal{C}_2(H_\alpha)))' , L^1(0,T;\mathcal{C}_2(H_\alpha))$. Alors en vertu de (5.5) et du fait que l'application identique de H^1_β dans H_α est compacte il résulte (voir [8]) que

$$F(\Phi) = \int [\int \Phi(t,u)\,d\mu_t(u)]\,dt \quad (\Phi \in L^1(0,T; \mathcal{C}_2(H_\alpha)) \tag{5.9}$$

pour une certaine famille $\{\mu_t\}_{0\le t\le T}$ de mesures de probabilité, boréliennes, dans H_{loc}. Il est facile à vérifier que μ_t est homogène pour tout t et aussi de définir μ_t pour tout $t \ge 0$, par un procédé diagonal par rapport à T). Cette famille sera par définition <u>la solution statistique des équations de Navier-Stokes à donnée initiale</u> μ.

Le fait que cette définition peut être justifiée de la même manière que celle des solutions statistiques périodiques, ne sera pas abordé dans cet exposé.

§ 6. LIEN AVEC LA THEORIE DE LA TURBULENCE HOMOGENE

Soit $\{\mu_t\}_{0\le t<\infty}$ une solution statistique homogène des équations de Navier-Stokes, dont la donnée initiale μ vérifie la propriété (plus restrictive que (5.1))

$$\mu(\{u\in H_{loc} : |u|_Q^2 \le e_o\}) = 1 \tag{6.1}$$

Il en résulte

$$\mu^{(L)}(\{u\in H(L) : |u|^2_{Q(L)} \le e_1\}) = 1 \tag{6.2}$$

où $e_1 = e_1(e_o)$ est une constante convenable, et par suite que (2.21) conduit à la relation

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\int |P_0^k u|_Q^2 d\mu_t^{(L)}(u) + \int_o^t \{\int[\nu\|P_o^k u\|_Q^2 + \\ + ((P_k^\infty u.\nabla)P_k^\infty u, P_o^k u)_Q - ((P_o^k u.\nabla)P_o^k u, P_k^{2k} u)_Q] d\mu_\tau(u)\} d\tau = \\ = \frac{1}{2}\int |P_o^k u|_Q^2\, d\mu(u) \qquad (t\in[0,\infty[\,,\ K\in\,]0,\infty[) \end{cases} \tag{6.3}$$

où (en vertu du paragraphe 3) les entités ne dépendent pas de $Q =]a,b[^n$. Avec les notations

$$\begin{cases} e_{k_o}^{k_1}(\mu_t^{(L)}) = \frac{1}{2}\int |P_k^{k_1} u|_Q^2\, d\mu_t^{(L)}(u) \\ \varepsilon_{k_o}^{k_1}(\mu_t^{(L)}) = \nu\int \|P_{k_o}^{k_1} u\|_Q^2\, d\mu_t^{(L)}(u) \end{cases} \qquad (0\le k_o < k_1 \le \infty) \tag{6.4}$$

et

$$\varepsilon_{k_{10},k_{20},k_{30}}^{k_{11},k_{21},k_{31}}(\mu_t^{(L)}) = \int((P_{K_{10}}^{K_{11}} u.\nabla)P_{k_{20}}^{k_{21}} u,\ P_{k_{30}}^{k_{31}} u)_Q\, d\mu_t^{(L)}(u)\,. \tag{6.5}$$

où $0\le k_{j\,0} < k_{j1} \le \infty$ $(j = 1,2,3)$, (6.3) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} e_o^k(\mu_t^{(L)}) + \int_o^t [\varepsilon_o^k(\mu_\tau^{(L)}) + \varepsilon_{k,k,o}^{\infty,\infty,k}(\mu_\tau^{(L)}) - \varepsilon_{o,o,k}^{k,k,2k}(\mu_\tau^{(L)})] d\tau = \\ = e_o^k(\mu_o^{(L)}) \quad (t\in[0,\infty[\ ,\ k\in\,]0,\infty[) \end{cases} \tag{6.6}$$

où $\mu_o^{(L)} = \mu^{(L)}$. Sans restreindre la généralité on peut supposer qu'il existe des fonctions

$$e_{k_o}^{k_1}(t)\ ,\ \varepsilon_{k_o}^{k_1}(t),\ \varepsilon_{k_{10},k_{20},k_{30}}^{k_{11},k_{21},k_{31}}(t) \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}) \tag{6.7}$$

telles que (voir le paragraphe 5)

$$\left\{\begin{array}{l} e_{k_o}^{k_1}(\mu_{\cdot}^{(L_p)}) \to e_{k_o}^{k_1}(.),\ \varepsilon_{k_o}^{k_1}(\mu_{\cdot}^{(L_p)}) \to \varepsilon_{k_o}^{k_1}(.) \text{ et} \\ \varepsilon_{k_{10},k_{20},k_{30}}^{k_1\ ,k_{21},k_{31}}(\mu_{\cdot}^{(L_p)}) \to \varepsilon_{k_{10},k_{20},k_{30}}^{k_{11},k_{21},k_{31}}(.) \\ \text{pour la topologie } \sigma(L^\infty(0,T;\mathbb{R}),L^1(0,T;\mathbb{R})) \end{array}\right. \tag{6.8}$$

quels que soient $T \in\,]0,\infty[\ \ 0 \le k_o < k_1 < \infty,\ 0 \le k_{j0} < k_{j1} < \infty\ (j = 1,2,3)$.
Ainsi en passant à la limite dans (6.6) nous obtenons finalement

$$\left\{\begin{array}{l} e_o^k(t) + \int_o^t [\varepsilon_o^k(\tau) + \varepsilon_{k,k,o}^{\infty,\infty,k}(\tau) - \varepsilon_{o,o,k}^{k,k,2k}(\tau)]\,d\tau = \\ = e_o^k(0) \qquad\qquad (t \in [0,\infty[\,,\ k \in\,]0,\infty[\,) \end{array}\right. \tag{6.9}$$

Remarquons que

$$\nu k_o^2\, e_{k_o}^{k_1}(t) \le \varepsilon_{k_o}^{k_1}(t) \le \nu k_1^2\, e_{k_o}^{k_1}(t)\ \ (t \ge 0,\ 0 \le k_o < k_1 < \infty\ ,\ \text{et que} \tag{6.10}$$

pour tous $0 \le k_o < k_1 < \ldots < k_m < \infty$ on a

$$\left\{\begin{array}{l} e_o^{k_o}(t) + e_{k_o}^{k_1}(t) + \ldots + e_{k_{m-1}}^{k_m}(t) + e_{k_m}^{\infty}(t) = e(t) \overset{\text{def}}{=\!=} e(\mu_t) \\ \varepsilon_o^{k_o}(t) + \varepsilon_{k_o}^{k_1}(t) + \ldots + \varepsilon_{k_{m+1}}^{k_m}(t) + \varepsilon_{k_m}^{\infty}(t) = \varepsilon(t) \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon(\mu_t) \end{array}\right. \quad (t \in [0,\infty[\tag{6.11}$$

Dans la théorie de la turbulence homogène, une notion fondamentale est l'énergie moyenne (à l'instant t) contenue dans les mouvements dont le nombre d'onde est dans $[k_o,k_1[$ (ou dont "l'étendue linéaire spécifique" est dans $]\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_o}]$). C'est exactement la quantité

$$e_{k_o}^{k_1}(t) = e_o^{k_1}(t) - e_o^{k_o}(t) \tag{6.12}$$

introduite dans (6.7,8,11). Comme $e_o^k(t)$ est non-décroissante en k,

$$(6.13) \qquad E(k;t) = \frac{\partial e_o^k(t)}{\partial k}$$

existe pp. pour $k \in]0,\infty[$. C'est par définition le spectre d'énergie (de la turbulence homogène représentée par notre solution statistique homogène ♦). Voici maintenant la définition d'une autre entité fondamentale concernant la turbulence homogène. Par définition l'intervalle $[k_o,k_1]$ est inertiel pour la turbulence homogène représentée par notre solution statistique homogène pendant l'intervalle temporel $[t_o,t_1]$ si

$$(6.14) \quad \begin{cases} \varepsilon_o^k(t) + \varepsilon_{k,k,o}^{\infty,\infty,k}(t) - e_{o,o,k}^{k,k,2k}(t) = \bar{\varepsilon}(t), \text{ où} \\ \varepsilon(t) \text{ est constante en } k, \text{ pour } t \in [t_o,t_1],\ k \in [k_o,k_1] \end{cases}$$

Ainsi si on admet l'hypothèse ♦ et on suppose que $E(.,.) \in \mathcal{C}^2([k_o,k_1] \times [t_o,t_1])$ il découle aussitôt

$$(6.15) \quad \begin{cases} E(k;t) = E(k), \text{ où } E(k) \text{ est constante en } t \text{ pour} \\ k \in [k_o,k_1],\ t \in [t_o,t_1] \end{cases}$$

Un des principaux problèmes dans la théorie de la turbulence est de déterminer la forme de cette fonction $E(k)$.

Voici maintenant la déduction heuristique de la forme de Kolmogorov [14] de $E(k)$ suivant les idées de Kraichnan [15], Frisch, Sulem et Nelkin [12]. On fait d'abord l'hypothèse que dans $[k_o,k_1] \times [t_o,t_1]$ on a

$$(6.16) \qquad \varepsilon_o^k(t) \ll \bar{\varepsilon}(t),\ \varepsilon_{k,k,o}^{\infty,\infty,k}(t) \ll \bar{\varepsilon}(t)$$

Ainsi

$$(6.17) \qquad -\varepsilon_{o,o,k}^{k,k,2k}(t) \approx \bar{\varepsilon}(t) \gg 0 \quad k \in [k_o,k_1],\ t \in [t_o,t_1]$$

Par conséquent, puisque $-\varepsilon_{o,o,k}^{k,k,2k}(t)$ représente le travail mécanique fait par les modes, dont les nombres d'onde est$<k$, sur les modes dont le nombre

---

♦ Dans la théorie de la turbulence homogène on fait toujours l'hypothèse que $e_o^k(t) = \int_o^k E(\varkappa,t)d\varkappa$. ($k \in]0,\infty[$)

d'onde $\in [k,2k[$, on peut supposer que le transfert de l'énergie des modes de nombre d'onde $< k$ se fait seulement vers ceux de nombre d'onde $\in [k,2k[$. Mais si $k/2 \in [k_o,k_1]$, alors l'énergie des modes, de nombre d'onde $< k/2$, est transférée directement aux modes de nombre d'onde $\in [k/2,k[$. Il découle que l'énergie transférée des modes de nombres d'onde $<k$ vers ceux de nombre d'onde $\in [k,2k[$ provient seulement des modes de nombre d'onde $\in [k/2,k]$. L'énergie moyenne contenue par ces modes est

$$e^k_{k/2}(t) = \int_{k/2}^{k} E(k)\,dk \tag{6.18}$$

(donc indépendant de $t \in [t_o,t_1]$). On remarque que les hypothèses faites jusqu'ici peuvent être justifiées par des estimations convenables (à obtenir) pour (6.5). L'argumentation heuristique qui suit est basée sur une hypothèse sur le mécanisme de la turbulence homogène, dont la justification devrait faire appel aux équations de type (2.10). Notamment on suppose que

$$v_k = (e^k_{k/2})^{1/2} \tag{6.19}$$

représente une vitesse moyenne des modes de nombre d'onde $\in [k/2,k]$, qui apparaissent comme des formations du fluide d'étendue linéaire $1/k$. Par conséquent

$$t_k = (1/k)/v_k \tag{6.20}$$

représenterait le temps moyen nécessaire pour que ces formations soient parcourues par les mouvements turbulents de leurs modes spécifiques. On fait l'hypothèse <u>que de cette manière toute l'énergie</u> $e^k_{k/2}$ <u>est transférée aux modes de nombre d'onde</u> $\geq k$. Par conséquent

$$\bar{\varepsilon}(t) = e^k_{k/2}/t_k \quad (= \bar{\varepsilon}) \tag{6.21}$$

est indépendante de $k \in [k_o,k_1]$, $t \in [t_o,t_1]$. Si $k_o << k_1$ il résulte maintenant facilement que

$$E(k) \approx \text{const. } \bar{\varepsilon}^{2/3} k^{-5/3} \quad (k_o << k << k_1) \tag{6.22}$$

C'est la célèbre <u>estimation spectrale de Kolmogorov</u>, mentionnée dans l'introduction. Comme cette estimation entraîne

$$\varepsilon_o^k(t) = \nu \int_o^k \varkappa^2 E(\varkappa, t) d\varkappa \approx \text{ const. } \nu . \bar{\varepsilon}^{2/3} k^{4/3} (k_o << k << k_1)$$

il découle que si

$$k \approx k_d = \text{const}(\bar{\varepsilon}/\nu^3)^{1/4} << k_1, \tag{6.23}$$

alors (6.16) n'est plus possible pour $k \geq k_d$. Ainsi l'extrémité droite k_1 de l'intervalle d'inertie $[k_o, k_1]$ "doit" être $\leq k_d$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. A. Arseniev : Construction of turbulent measures for the Navier-Stokes equations, Soviet Math. Dokl. 16 (1975), 1422-1424.

[2] G. K. Batchelor : The theory of homogeneous turbulence, Cambridge Univ. Press (1953).

[3] A. Bensoussan, R. Temam : Equations stochastiques du type Navier-Stokes, Journ. Funct. Anal., 13 (1973), 195-222.

[4] P. M. Bleher, M. I. Visik : On a class of pseudo-differential operators with infinitely many variables, Math. USSR Sb., 15 (1971), 443-491.

[5] A. J. Chorin : Lectures on Turbulence theory, Boston, Publ. or Per. Inc. (1975).

[6] J. Dieudonné : Eléments d'analyse, Tome II, Paris, Gauthier-Villars (1971).

[7] C. Foias : Ergodic problems in functional spaces related to Navier-Stokes equations, Proc. Intern. Conf. Funct. Anal., related topics, Tokyo (1969), 290-304.

[8] C. Foias : Solutions statistiques des équations d'évolution non linéaires, Centro Intern. Mat. Estivo, Varenna (1970), 131-188.

[9] C. Foias : Statistical study of the Navier-Stokes equations, I, Rendiconti sem. Mat.Univ. Padova, 48 (197), 219-348 ; II, idem, 49 (197), 9-123.

[10] C. Foias : A functional approach to turbulence, Russian Math. surveys (Uspehi Mat. Nauk), 29 (1974), n° 2, 293-326.

[11] C. Foias : Solutions statistiques des équations de Navier-Stokes. Cours au Collège de France (1974).

[12] U. Frisch, P. L. Sulem, M. Nelkin : A simple dynamical model for intermittent fully developed turbulence, J. Fluid Mech., 87 (1978), 719-736.

[13] E. Hopf : Statistical hydrodynamics and functional calculus, Journ. Rat. Mechanics and Anal., 16 (1948), 87-123.

[14] A. N. Kolmogorov : The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number, C. R. Acad. Sc. U.R.S.S., 30 (1941), 301-305.

[15] R. Kraichnan : Statistical mechanics : New concepts, New problems, New applications, U. of Chicago (1972), 201-

[16] O. A. Ladyzenskaya : Mathematical analysis of the Navier-Stokes equations for incompressible liquids. Ann. Rev. Fluid. Mech., 7 (1975), 249-272.

[17] O. A. Ladyzenskaya, A. M. Vershik : Sur l'évolution des mesures déterminées par les équations de Navier-Stokes et la résolution du problème de Cauchy pour l'équation statistique de E. Kopf., Ann. Sc. Norm. Sup. Pise, S. IV, 4 (1977), 209-230.

[18] J. Leray : Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math., 63 (1934), 193-248.

[19] A. Monin, A. M. Yaglom : Statistical fluid mechanics; Mechanics of turbulence, M.I.T. Press Cambridge, vol. I (1971), vol. II (1975).

[20] O. Reynolds : On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. Phil. Trans. Royal Soc. London, 186 (1894), 123-161.

[21] H. A. Rose, P. L. Sulem : Fully developed turbulence and statistical mechanics, Le journal de Phys., 39 (1978), 441-484.

[22] R. Temam : Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes, Bull. Soc. Mat. France, 98 (1968), 115-152.

[23] R. Temam : Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis, Amsterdam, North-Holland (1977).

[24] M. I. Visik : The Cauchy problem for the Hopf equation of quasi linear parabolic equations, Soviet Math. Dokl., 16 (1975), 1126-1130.

[25] M. I. Visk, A. V. Fursikov : L'équation de Hopf, les solutions statistiques, les moments correspondants aux systèmes des équations paraboliques quasi linéaires, J. Math. P. Appl. 56 (1977) 85-122.

[26] M. I. Visik, A. V. Fursikov : Solutions statistiques homogènes des systèmes différentiels paraboliques et du système de Navier-Stokes, Annal Scuola Norm. Sup. Pisa, Série IV, 3 (1977), 531-576.