Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. Langlais

Solutions fortes pour des problèmes aux limites du second ordre dégénérés

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. n^o 7, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A8_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 7 - 1 9 7 8

SOLUTIONS FORTES POUR DES PROBLEMES AUX LIMITES DU SECOND ORDRE DEGENERES

par M. LANGLAIS

Exposé n° VII

17 Janvier 1978

Dans un ouvert Q de $\mathbb{R}^{n+m}$, on considère un opérateur différentiel du type suivant :

$$E = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} + \sum_{j=n+1}^{n+m} b_j \frac{\partial}{\partial z_j} + b_o ;$$

à cet opérateur sont associées de façon canonique (voir Fichera [4] et aussi Oleinik-Radkevic [7]) des conditions aux limites sur la partie ∂Q_e de la fontière de Q (notée ∂Q) qui est non caractéristique et sur la partie ∂Q_- de $\partial Q \backslash \partial Q_e$ où le champ de vecteurs définissant l'opérateur du premier ordre est rentrant.

Pour résoudre l'équation $Eu = f$, f étant donné dans $L^2(Q)$ (avec des conditions aux limites nulles) on utilise usuellement la méthode suivante (voir [4], [7] et sa bibliographie) : on introduit la notion de solution faible, c'est-à-dire trouver $u \in L^2(Q)$ et vérifiant $\int_Q u\, E^* \varphi dz = \int_Q f \varphi dz$, pour toute fonction φ, régulière nulle sur ∂Q_e et ∂Q_-, E^* étant l'adjoint formel de E. On montre l'existence de solutions faibles ; pour l'unicité, on fait une hypothèse du type (A_2) ci-après. En général, ces solutions faibles ne sont pas régulières, à moins de supposer que les adhérences de ∂Q_e, ∂Q_- et $\partial Q \backslash \partial Q_e \cup \partial Q_-$ ne soient disjointes (voir [7]), ou bien que les adhérences de $\partial Q_e \cup \partial Q_-$ et $\partial Q \backslash \partial Q_e \cup \partial Q_-$ soient aussi disjointes ([5],[7]).

On peut aussi associer à la partie principale de E un espace de Hilbert V (noté $\mathcal{H}$ dans [4]) et chercher des solutions faibles dans cet espace (voir [4], [7] et [8]).

La motivation de ce qui suit est de pouvoir résoudre des problèmes non linéaires associés à l'opérateur E, en particulier des inéquations variationnelles. On est alors naturellement amener à considérer l'opérateur du premier ordre contenu dans E comme un opérateur non borné, de l'espace V ci-dessus dans son dual, dont on aimerait connaître les propriétés ainsi que celles de son adjoint. On montre (théorème 2) qu'il est maximal-monotone, et grâce à (A_2), on améliore les résultats de [6].

Ces propriétés sont bien connues lorsque, d'une part, l'opérateur E est l'opérateur de la chaleur, et d'autre part, lorsque E est un opérateur du premier ordre (voir [3]). Si les coefficients b_j sont indépendants des n premières variables on peut en fait déduire des résultats de [3] les propriétés cherchées. Le cas particulier où $E = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial t}$ est aussi étudié dans [2].

En fait le cadre fonctionnel "naturel" est d'une étude directe malaisée, à cause des conditions aux limites de type mixte et du fait que les frontières de ∂Q_e, ∂Q_- et $\partial Q \backslash \partial Q_e \cup \partial Q_-$ peuvent se toucher. On ne sait pas montrer, à priori, la densité des fonctions régulières dans les bons espaces, contrairement à ce qui se passe dans [2] (voir les commentaires suivants la définition de $W(\Lambda)$ à la fin du deuxième paragraphe). En utilisant globalement les méthodes de [1] par exemple, on obtiendrait des espaces trop gros ; on les utilise seulement une fois que l'on a su contrôler ce qui se passe au voisinage de ∂Q_e et ∂Q_- .

Le plan est le suivant :

. on commence par préciser les notations et les hypothèses ;

. au paragraphe suivant, on montre que l'équation $Eu = f$ possède des solutions ayant de bonnes propriétés;

. au dernier paragraphe, on déduit du résultat préliminaire précédent les propriétés de l'opérateur du premier ordre ; on donne ensuite des exemples d'applications.

§ 1. HYPOTHESES. NOTATIONS

Toutes les fonctions considérées dans la suite sont à valeurs réelles. Soit Q un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^{n+m}$, $n \geq 0$ et $m \geq 1$, de frontière ∂Q et d'élément générique $z = (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

On désigne par $V(Q)$ le complété de $\mathcal{D}(Q)$ par la norme :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(Q), \ \|\varphi\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} \Big|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big|^2 + |\varphi|^2\Big)^{1/2},$$

où $|\cdot|$ est la norme de l'espace $L^2(Q)$.

Identifiant $L^2(Q)$ à son dual, et notant $V'(Q)$ le dual de $V(Q)$ une fois cette identification faite, on obtient la double injection continue avec image dense : $V(Q) \hookrightarrow L^2(Q) \hookrightarrow V'(Q)$. On note par $((\ ,\ ))$ la dualité entre $V'(Q)$ et $V(Q)$ et par $\|\ \|_*$ la norme de $V'(Q)$.

Si $\eta = (\eta_j)_{1 \leq j \leq n+m}$ est la normale extérieure à ∂Q et ∂Q_e l'ensemble :

$$\partial Q_e = \{z \in \partial Q, \ \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 > 0\} ,$$

alors les élements de $V(Q)$ possèdent une trace dans ∂Q_e qui est nulle.

Soit $B = (B_j)_{1 \leq j \leq n+m}$ un champ de vecteur réels sur Q vérifiant :

$$(A_1)\quad \begin{cases} B_i = 0 & 1 \leq i \leq n \\ B_{p+n} = b_p \in \mathcal{C}^\infty(\bar{Q}), & 1 \leq p \leq m. \end{cases}$$

Si ℓ désigne le produit scalaire sur ∂Q entre le champ B et la normale η, on introduit les ensembles suivants (voir [4], [7] et [3]) :

$$\partial Q_- = \{z \in \partial Q \backslash \partial Q_e,\ \ell(z) < 0\}$$

$$\partial Q_o = \{z \in \partial Q \backslash \partial Q_e,\ \ell(z) = 0\}$$

$$\partial Q_+ = \{z \in \partial Q \backslash \partial Q_e,\ \ell(z) > 0\}$$

qui représentent respectivement les parties de $\partial Q \backslash \partial Q_e$ où le champ B est rentrant, tangent ou sortant .

On note par Λ l'opérateur différentiel associé au champ B :

$$\Lambda = \sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial}{\partial y_p} .$$

Si un élément u de $V(Q)$ est tel que $\Lambda u \in V'(Q)$, il possède localement une trace dans $\overset{\circ}{\partial Q_-}$ et $\overset{\circ}{\partial Q_+}$. Cela résulte du fait que tout point de $\partial Q \backslash \overline{\partial Q_e}$ possède un voisinage dans lequel ∂Q admet une représentation paramétrique ne dépendant que de la variable y.

On introduit les espaces :

$$W_-(\Lambda) = \{u \in V(Q), \Lambda u \in V'(Q), u|_{\overset{\circ}{\partial Q_-}} = 0\},$$

$$W_+(\Lambda) = \{u \in V(Q), \Lambda u \in V'(Q), u|_{\overset{\circ}{\partial Q_+}} = 0\},$$

qui sont chacun des espaces de Hilbert pour la norme du graphe.

Soit Γ la réunion des frontières, dans ∂Q, des ensembles ∂Q_e, ∂Q_-, ∂Q_o et ∂Q_+. On suppose que Γ vérifie :

(A_2) $\left\{\begin{array}{l}\text{il existe } (S_j)_{1\le j\le N}\text{, un nombre fini d'hypersurfaces régulières}\\ \text{de } \mathbb{R}^{n+m}\text{, non tangentes à } \partial Q\text{, telles que } \Gamma\subset \bigcup_{j=1}^{N}(\partial Q\cap S_j)\text{. De}\\ \text{plus, soit } \eta^j \text{ la normale extérieure à } S_j\text{ , } 1\le j\le N\text{, et :}\\ \qquad S_j^+ = \{z\in\partial Q\cap S_j\cap\Gamma,\ \sum_{i=1}^{n}(\eta_i^j)^2>0\},\ 1\le j\le N,\\ \qquad S_j^o = \{z\in\partial Q\cap S_j\cap\Gamma,\ \sum_{i=1}^{n}(\eta_i^j)^2=0\},\ 1\le j\le N.\\ \text{On suppose que pour tout } j,\ 1\le j\le N\text{, la frontière, notée } \Gamma_j\text{,}\\ \text{de } S_j^+ \text{ et } S_j^o \text{ dans } \partial Q\cap S_j \text{ est contenue dans une réunion finie}\\ \text{de sous variétés régulières de dimension } n+m-3.\end{array}\right.$

Cette condition sur Γ est usuelle pour les problèmes dégénérés (voir [7] ou [8] par exemple) ; mais on permet ici à S_j^+ et S_j^o de se toucher. Elle est en fait utilisée pour tronquer certains éléments de $W_-(\Lambda)$ et $W_+(\Lambda)$ (et de $V(Q)$) au voisinage de Γ (voir lemmes 2, 3 et 4). Lorsque $m=1$, on a toujours $\partial Q\cap S_j = S_j^+$.

§ 2. UN RESULTAT PREMIMINAIRE

Le but de ce paragrpahe est de montrer que l'équation $Eu=f$ possède au moins une solution dans $W_-(\Lambda)$ et que cette solution peut être approchée par des fonctions régulières. Ce résultat partiel est ensuite utilisé pour démontrer le théorème 2 du paragraphe suivant.

Théorème 1 : On suppose les conditions A_1 et A_2 vérifiées. Soit $b\in\mathcal{C}^\infty(\bar{Q})$ et assez grand. Alors, pour tout f donné dans $V'(Q)$, l'équation :

$$(E) : -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\sum_{p=1}^{m} b_p\frac{\partial u}{\partial y_p}+bu=f$$

possède au moins une solution dans $W_-(\Lambda)$. De plus, elle possède une solution $u(f)$ ayant la propriété suivante : il existe une $(\psi_\nu)_\nu$ d'éléments de $\mathcal{D}(\bar{Q})\cap W_-(\Lambda)$ convergeant vers $u(f)$ dans $W_-(\Lambda)$ et vérifiant :

1 $\left\{\begin{array}{l}\forall\nu,\ \psi_\nu \text{ est nulle dans un voisinage (dans } \mathbb{R}^{n+m}\text{) de l'adhérence}\\ \text{(dans } \partial Q\text{) de } \partial Q_e \text{ et } \partial Q_-\cup\partial Q_o\text{, et de la frontière (dans } \partial Q\text{) de}\\ \partial Q_+\ .\end{array}\right.$

<u>Remarque</u> : La difficulté réside dans la deuxième partie, car même si f est régulière, la solution ne l'est pas et il résultera de la suite que (E) possède une seule solution dans $W_-(\Lambda)$.

La démonstration se fait en quatre étapes : on commence par se ramener au cas où f est dans $\mathcal{D}(Q)$; puis on construit une solution ; on élimine ensuite l'ensemble Γ ; finalement, il reste à étudier ce qui se passe dans $\widehat{\partial Q}_+$.

1. <u>Réduction du problème</u> : Pour démontrer le théorème 1, il suffit de le démontrer lorsque $f \in \mathcal{D}(Q)$ et que l'on a l'estimation suivante : il existe une constante $\mathcal{C}$ indépendante de $f \in \mathcal{D}(Q)$ telle que $\|u(f)\| \leq \mathcal{C}\|f\|_*$

En effet, si f est dans $V'(Q)$, il existe une suite $(f_\mu)_\mu$ d'éléments de $\mathcal{D}(Q)$ et convergeant vers f dans $V'(Q)$. Pour tout μ, il existe donc une solution $u(f_\mu) = u_\mu$ de l'équation (E) dans $W_-(\Lambda)$. L'estimation précédente entraîne que les u_μ sont dans un borné de $V(Q)$, et on déduit de l'équation (E) qu'ils sont en fait dans un borné de $W_-(\Lambda)$

Il suffit donc de faire un passage à la limite.

2. <u>Existence d'une solution de (E) pour f dans $\mathcal{D}(Q)$</u>.

On utilise la méthode classique, pour les opérateurs dégénérées (voir [7] par exemple) de la régularisation elliptique.

Pour $\varepsilon > 0$, on note L_ε l'opérateur $-\varepsilon\Delta - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, où Δ est le laplacien dans $\mathbb{R}^{n+m}$. Si b est assez grand, on obtient que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un unique u_ε dans $H_0^1(Q)$ solution de :

$$L_\varepsilon u_\varepsilon + \Lambda\, u_\varepsilon + bu_\varepsilon = f \quad \text{dans } Q.$$

De plus, il existe une constante $\mathcal{C}$, indépendante de f et ε, pour ε petit, telle que :

$$\|u_\varepsilon\| + \sqrt{\varepsilon}\,\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(Q)} \leq \mathcal{C}\,\|f\|_*$$

$$|u_\varepsilon|_{L^\infty(Q)} \leq \mathcal{C}\,|f|_{L^\infty(Q)} \quad H_0^1(Q)$$

On peut donc extraire de la famille $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$, une suite notée encore $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ et convergeant vers un élément $u(f)$ dans $V(Q)$. On déduit de l'équation satisfaite par u_ε que le terme $-\varepsilon \Delta u_\varepsilon + \Lambda u_\varepsilon$ est borné dans $V'(Q)$; comme il converge vers $\Lambda u(f)$ dans $H^{-1}(Q)$, il s'ensuit que l'élément $u(f)$ est solution de l'équation (E), et qu'il est aussi dans $L^\infty(Q)$.

Il reste à vérifier que $u(f) \in W_-(\Lambda)$, c'est-à-dire la condition de trace sur ∂Q_-. Or en général, la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ne converge pas vers $u(f)$ dans $W_-(\Lambda)$. On est donc amener à vérifier que $\forall\, \chi \in \mathcal{D}(Q)$, $\operatorname{supp} \chi \cap \overset{\circ}{\partial Q_-}$, alors la suite $(\chi u_\varepsilon)_\varepsilon$ est borné dans $W_-(\Lambda)$; d'après ce qui précède, il suffit de vérifier que $(\varepsilon \Delta \chi u_\varepsilon)_\varepsilon$ est borné dans $L^2(Q)$, ce qui résulte du lemme suivant plus général et qui sera utilisé dans la suite :

<u>Lemme 1</u> : Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+m}$ tel que $\bar{\omega}$ soit inclus dans Q, ou tel que $\bar{\omega} \cap \partial Q$ soit contenu dans ∂Q_e ou $\overset{\circ}{\overbrace{\partial Q_- \cup \partial Q_o}}$. Alors, pour ε petit, la famille $(\varepsilon u_\varepsilon|_{\omega \cap Q})_\varepsilon$ est dans un borné de $H^2(\omega \cap Q)$.

Pour démontrer ce lemme, on utilise les quotients différentiels :

- si $\bar{\omega} \subset Q$, on estime ainsi toutes les dérivées ;
- si $\bar{\omega} \cap \partial Q \subset \partial Q_e$, on estime ainsi les dérivées tangentielles ; l'estimation manquante s'obtient grâce à l'équation ;
- si $\bar{\omega} \cap \partial Q < \overset{\circ}{\overbrace{\partial Q_- \cup \partial Q_o}}$, les dérivées tangentielles s'obtiennent comme précédemment ; l'estimation sur le terme $\varepsilon \dfrac{\partial^2 u \varepsilon}{\partial y m^2}$ se prouve en multipliant l'équation satisfaite par u_ε par ce terme, et en intégrant par parties.

La démonstration détaillée se trouve dans [6]; on n'utilise pas de fonctions barrières comme dans [7] grâce à la forme particulière de l'opérateur.

3. <u>Quelques lemmes de troncature</u>

La solution $u(f)$, $f \in \mathcal{D}(Q)$ ainsi construite de (E) n'étant en général pas régulière il reste à prouver la deuxième partie. Le lemme 1 précédent nous indique que l'on a une bonne convergence des u_ε au voisinage de tout compact de ∂Q_e et $\overset{\circ}{\overbrace{\partial Q_- \cup \partial Q_o}}$. Il reste à voir que l'on peut tronquer $u(f)$ au voisinage de Γ. Il restera ensuite à s'occuper d'un compact de $\overset{\circ}{\partial Q_+}$.

Pour tronquer, on va exploiter l'hypothèse A_2 qui va nous permettre d'éliminer successivement chaque sous-variété $\partial Q \cap S_j$, $1 \le j \le N$. C'est une méthode usuelle dans ce genre de problèmes, bien que l'on suppose habituellement que S_j^+ et S_j^o ne se touchent pas. On adapte dans la suite des fonctions tronquantes utilisées dans [7]. On commence par éliminer $\partial Q \cap S_1$ et plus précisément Γ_1 :

<u>Lemme 2</u> : Il existe une suite $(u_\eta)_\eta$ d'éléments de $W_-(\Lambda)$, nuls au voisinage de Γ_1, et convergeant vers $u(f)$ dans $W_-(\Lambda)$.

Grâce à la condition (A_2), on peut construire une suite $(\varphi_\eta)_{\eta>0}$ d'éléments de $C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ tels que :

$$\begin{cases} 0 \le \varphi_n \le 1 \\ \varphi_\eta(z) = 0 \quad \text{si} \quad d(z,\Gamma_1) < \eta, \ \varphi_\eta(z) = 1 \quad \text{si} \quad d(z,\Gamma_1) > 2\eta, \\ \left|\dfrac{\partial\varphi_\eta}{\partial x_i}\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+m})} \le \dfrac{\alpha}{\sqrt{\eta}}, \ 1 \le i \le n \ ; \ \left|\dfrac{\partial^2\varphi_\eta}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+m})} \le \dfrac{\alpha}{\eta}, \ 1 \le i,j \le n \ ; \\ \left|\dfrac{\partial\varphi_\eta}{\partial y_p}\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+m})} \le \dfrac{\alpha}{\eta}, \ 1 \le p \le m ; \quad \text{mes Supp } |\text{grad}\,\varphi_\eta| \le \alpha\,\eta^2 \ ; \end{cases}$$

où α est une constante indépendante de y et $d(z,\Gamma_1)$ est la distance euclidienne de z à Γ_1.

Posant $u_\eta = \varphi_\eta\, u(f) \in W(\Lambda) \cap L^\infty(Q)$, on vérifie que $(u_\eta)_\eta$ tend vers $u(f)$ dans $V(Q)$. De plus comme :

$$\Lambda u_\eta = (f - bu)\varphi_\eta + u\Lambda\,\varphi_\eta - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u_\eta}{\partial x_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\frac{\partial\varphi_\eta}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi_\eta}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\ , \ \forall \eta > 0$$

il reste à vérifier que le dernier terme de cette égalité tend vers 0 dans $V'(Q)$. Or cela résulte du fait que :

$$\forall V \in V(Q),\ \int_Q \frac{\partial\varphi_\eta}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} V\,dt = -\int u\,\frac{\partial^2\varphi_\eta}{\partial x_i^2} V\,dt - \int u\,\frac{\partial\varphi_\eta}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}\,dt,\ \forall\ i = 1,\dots,u$$

On va maintenant tronquer u_η au voisinage de S_1^o :

<u>Lemme 3</u> : A η fixé, il existe une suite $(u_\delta)_{\delta>0}$ d'éléments de $W_-(\Lambda)$, nuls au voisinage de S_1^o, et convergeant vers u_η dans $W_-(\Lambda)$.

Comme η est fixé, u_η est nul à la frontière de S_1^o ; il reste à tronquer u_η autour d'un compact K_η intérieur à S_1^o. On construit maintenant une suite $(\varphi_\delta)_{\delta>0}$ d'éléments de $C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ vérifiant :

$$\begin{cases} 0 \le \varphi_\delta \le 1 \\ \varphi_\delta(z) = 0 \quad \text{si} \quad d(z,K_\eta) < \delta \ , \ \varphi_\delta(z) = 1 \quad \text{si } d(z,K_\eta) > 2\delta \\ \left|\dfrac{\partial\varphi_\delta}{\partial x_i}\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+m})} \le \mathcal{a}, \ 1 \le i \le r \ ; \ \left|\dfrac{\partial\varphi_\delta}{\partial y_p}\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+m})} \le \dfrac{\mathcal{a}}{\delta}, 1 \le p \le m \ ; \\ \text{mes supp } |\text{grad}\,\varphi_\delta| \le \mathcal{a}\,\delta^2 , \end{cases}$$

où $\mathcal{a}$ est encore une constante indépendante de δ.

La fin de la démonstration est immédiate : $u_\delta = \varphi_\delta u_\eta$.

Il reste à tronquer $u\delta$ autour d'un compact de S_1^+ :

<u>Lemme 4</u> : A δ fixé, il existe une suite $(u_\sigma)_{\sigma>0}$ d'éléments de $W_-(\Lambda)$, nuls au voisinage de S_1^+, qui converge vers u_δ dans $W_-(\Lambda)$.

δ étant fixé, on tronque maintenant u_δ autour d'un compact K_δ intérieur à S_1^+, en introduisant une suite $(\varphi_\sigma)_{\sigma>0}$ d'élements de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$ vérifiant :

$$\begin{cases} 0 \le \varphi < 1 \quad , \\ \varphi_\sigma(z) = 0 \quad \text{si} \quad d(z,K_\delta) < \sigma \ ; \ \varphi_\sigma(z) = 1 \quad \text{si} \quad d(z,K_\delta) > 2\sigma \\ \left|\dfrac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_i}\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+m})} \le \dfrac{\mathcal{a}}{\sqrt{\sigma}} \ , \ 1 \le i \le n \ ; \ \left|\dfrac{\partial^2\varphi_\sigma}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+m})} \le \dfrac{\mathcal{a}}{\sigma}, 1 \le i,j \le n \ ; \\ \left|\dfrac{\partial\varphi_\sigma}{\partial y_p}\right|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+m})} \le \dfrac{\mathcal{a}}{\sigma}, \ 1 \le p \le m; \ \text{mes supp } |\text{grad}\,\varphi_\sigma| \le \mathcal{a}\,\sigma^{3/2} \ ; \end{cases}$$

où $\mathcal{a}$ est une constante indépendante de σ

Comme l'un des champs $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ est transverse à S_1 au voisinage de K_δ, on en déduit que tout élément de $V(Q)$ possède une trace sur S_1, et on obtient alors le résultat suivant :

$$\forall\, v \in V(Q)\ ,\ \lim_{\sigma \to 0} \Big[\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \int_{Q \cap \operatorname{supp}|\operatorname{grad} \varphi_\sigma|} v^2 dz \Big] = 0$$

On vérifie ensuite que $u_\sigma = \varphi_\sigma u_\delta$ converge vers u_δ dans $W_-(\Lambda)$.

Procédant de même successivement pour les autres parties de Γ, on déduit donc qu'il existe une suite $(u_\mu)_{\mu > 0}$ d'éléments de $W_-(\Lambda)$, nuls sur un voisinage de Γ et convergeant vers $u(f)$ dans $W_-(\Lambda)$.

4. Fin de la démonstration

Pour terminer la démonstration, il suffit de vérifier que l'on peut approcher les éléments u_μ précédents par des fonctions régulières. Soit alors $\mathcal{O}_\Gamma$, $\mathcal{O}_e$, $\mathcal{O}_-$ et $\mathcal{O}_+$ un recouvrement ouvert de $\bar{Q}$ tel que :

$$\Gamma \subset \mathcal{O}_\Gamma : \partial Q \cap \bar{\mathcal{O}}_+ \subset \overset{\circ}{\widehat{\partial Q_+}} \quad ;$$

$$\partial Q \cap \bar{\mathcal{O}}_e \subset \partial Q_e \ ;\ \partial Q \cap \bar{\mathcal{O}}_- \subset \overset{\circ}{\widehat{\partial Q_- \cup \partial Q_0}}\ ,$$

et θ_Γ, θ_e, θ_- et θ_+ une partition de l'unité associée.

Il suffit de montrer que $\theta_\Gamma u_\mu$, $\theta_e u_\mu$, $\theta_- u_\mu$ et $\theta_+ u_\mu$ sont limites de fonctions régulières. Or, μ étant fixé quelconque, si $\mathcal{O}_\Gamma$ est assez petit, on aura $\theta_\Gamma u_\mu = 0$; les deux termes $\theta_e u_\mu$ et $\theta_- u_\mu$ se traitent en utilisant le lemme 1 précédent.

Il reste donc le dernier terme ; si on note $\tilde{v}$ le prolongement de $\theta_+ u_\mu$ par 0 en dehors de Q, en utilisant que $\operatorname{supp} \tilde{v} \cap \partial Q \subset \overset{\circ}{\widehat{\partial Q_+}}$ et que $\theta_+ u_\mu \in W_-(\Lambda)$, par translation et régularisation on obtient le résultat cherché en adaptant les méthodes de [1] par exemple.

§ 3. PROPRIETES DE L'OPERATEUR Λ DANS V(Q) ET APPLICATIONS

1. Résultat principal

On désigne par Λ_- l'opérateur non borné de V(Q) dans V'(Q) de domaine $D(\Lambda_-)$ égal à l'adhérence dans $W_-(\Lambda)$ des fonctions de $\mathcal{D}(\bar{\mathcal{Q}}) \cap W_-(\Lambda)$ vérifiant (1) (voir théorème 1) et défini par :

$$\forall\, u \in D(\Lambda_-),\ \Lambda_- u = \sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial u}{\partial y_p}\ .$$

Soit Λ_-^* son adjoint en tant qu'opérateur non borné de V(Q) dans V'(Q). On remarque que :

$$\forall\, v \in D(\Lambda_-^*),\ \Lambda_-^* v = -\sum_{p-1}^{m} b_p \frac{\partial v}{\partial y_p} - \operatorname{div} B.\, v \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(Q),$$

et que Λ_-^* prolonge l'opérateur Λ_+ de domaine $D(\Lambda_+)$ égal à l'adhérence dans $W_+(\Lambda)$ des fonctions $\psi \in \mathcal{D}(\bar{Q}) \cap W_+(\Lambda)$ vérifiant :

(1^+) $\begin{cases} \psi \text{ est nulle dans un voisinage (dans } \mathbb{R}^{n+m}) \text{ de } \partial Q_e,\ \partial Q_+ \cup \partial Q_o \text{ et de} \\ \text{la frontière (dans } \partial Q) \text{ de } \partial Q_-, \end{cases}$

et défini par :

$$\forall\, v \in D(\Lambda_+),\ \Lambda_+ v = -\sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial v}{\partial y_p} - \operatorname{div} B.v.$$

<u>Proposition</u> : On suppose que les conditions A_1 et A_2 sont vérifiées. Les opérateurs Λ_- et Λ_+ sont alors adjoints l'un de l'autre.

Il suffit de vérifier que $D(\Lambda_-^*) \subset D(\Lambda_+)$. Soit $w \in D(\Lambda_-^*)$, et f l'élément de V'(Q) défini par $f = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} + \Lambda_-^* w + bw$, b comme au théorème 1

On déduit de ce même théorème que l'équation :

$$v \in D(\Lambda_-^*),\ -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \Lambda_-^* v + bv = f\ ,$$

possède au plus une solution dans $D(\Lambda_-^*)$. De plus, elle en possède au moins une dans $D(\Lambda_+)$ car elle s'écrit alors :

$$v \in D(\Lambda_+),\ -\sum_{i=1}^{u} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} - \sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial v}{\partial y_p} + (b - \operatorname{div} B).\, v = f\ ,$$

et cela résulte encore du théorème 1. Par suite, $w \in D(\Lambda_+)$.

On obtient finalement le résultat suivant qui caractérise les opérateurs Λ_-, et Λ_+ ainsi que leurs domaines et qui est le résultat fondamental de cette étude :

<u>Théorème 2</u> : On suppose que les conditions A_1, A_2 sont vérifiées. Dans ce cas $D(\Lambda_-) = W_-(\Lambda)$ et $D(\Lambda_+) = W_+(\Lambda)$. De plus, l'opérateur $\Lambda_- + \frac{1}{2}$ div. B et son adjoint sont positifs, et sont donc maximaux monotones.

Il suffit de montrer que $W_+(\Lambda) \subset D(\Lambda_-^*)$; il suffit donc de montrer que :

$$\forall\, v \in W_+(\Lambda),\ \forall\, \psi \in \mathcal{D}(\bar{Q}) \cap W_-(\Lambda) \text{ vérifiant } (1^-)$$

$$((\sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial\psi}{\partial y_p}, v)) = (\sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial v}{\partial y_p} - \mathrm{div} B\, v, \psi))$$

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\bar{Q})$ telle que $\mathrm{Supp}\,\chi \cap \partial Q \subset \overset{\circ}{\widehat{\partial Q}}_+$, $\chi|_{\mathrm{supp}\,\psi} = 1$. On obtient :

$$((\sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial\psi}{\partial y_p}, v)) = \int_Q (\sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial\psi}{\partial y_p})\, \chi\, v\, dz\,.$$

Comme $\chi v \in W_-(\Lambda)$ et vérifie (1^-), on peut (comme à la fin du théorème 1), trouver une suite $(\varphi_\nu)_\nu$, $\varphi_\nu \in \mathcal{D}(\bar{Q}) \cap W_-(\Lambda)$ et vérifiant (1^-), convergeant vers χv dans $W_-(\Lambda)$. On déduit alors de la formule d'Ostrogradskique :

$$\int_Q (\sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial\psi}{\partial y_p})\, \varphi_\nu\, dt = \int_Q (-\sum_{p=1}^{m} b_p \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_p} - \mathrm{div}\, B\, \varphi_\nu)\, \psi\, dz +$$

$$+ \int_{\overset{\circ}{\widehat{\partial Q}}_+} \ell(z)\, \psi\, \varphi_\nu\, d\sigma\,, \quad \forall\, \nu\,,$$

La convergence de la suite $(\varphi_\nu)_\nu$ vers χv jointe à la continuité locale des traces dans $\overset{\circ}{\widehat{\partial Q}}_+$ donne le résultat par passage à la limite.
Comme l'adjoint de $\Lambda_- + \frac{1}{2}\mathrm{div}\, B$ est évidemment $\Lambda_+ + \frac{1}{2}\mathrm{div}\, B$, la positivité de ces deux opérateurs résulte de leur positivité sur les fonctions régulières de $W_-(\Lambda)$ et $W_+(\Lambda)$.

On retrouve ainsi le résultat de [3], lorsque $n = 0$, c'est-à-dire lorsque l'espace $V(Q)$ est réduit à $L^2(Q)$. Si les coefficients b_p, $1 \leq p \leq m$ sont indépendants de la variable $x \in \mathbb{R}^n$, on peut déduire le théorème 2 des propriétés de l'opérateur Λ dans $L^2(Q)$ donnees par cet auteur.

2. Application aux problèmes homogènes

Soit $a(.,.)$ la forme bilinéaire définie et continue sur $V(Q)$ par

(2) $$\begin{cases} \forall u,v \in V(Q) \\ a(u,v) = \int_Q \Big[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \dfrac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} v + a_o uv \Big] dt \end{cases},$$

avec :

(3) $$a_{ij} \in L^{\infty}(Q), \; 1 \leq i,j \leq n \; ; \; a_i \in L^{\infty}(Q), \; 0 \leq i \leq n.$$

On désigne par L l'opérateur linéaire continu de $V(Q)$ dans $V'(Q)$ associé à la forme $a(.,.)$:

(4) $$\forall u \in V(Q), \; Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{u} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_o u .$$

On suppose que l'hypothèse de coercivité suivante est vérifiée : il existe $\alpha > 0$ tel que :

(5) $$\forall \; u \in V(Q) \quad a(u,u) - \frac{1}{2} \int_Q \operatorname{div} B . u^2 dz \geq \alpha \|u\|^2 .$$

<u>Théorème 3</u> : On suppose les conditions A_1 et A_2 vérifiées. Soit L l'opérateur défini par (4) associé à une forme $a(.,.)$ vérifiant (2) , (3) et (5) Alors, pour tout f dans $V'(Q)$, il existe un unique u appartenant à $W_-(\Lambda)$ et vérifiant :

$$Lu + \Lambda u = f.$$

Il suffit d'écrire que : $L + \Lambda = \left[L - \frac{1}{2} \operatorname{div} B\right] + \left[\Lambda + \frac{1}{2} \operatorname{div} B\right]$ et d'utiliser le théorème 2.

On peut remplacer ici l'opérateur L par un opérateur plus général, ce qui permet, par exemple, d'étudier les inéquations variationnelles associées à $L + \Lambda$.

3. Conditions inhomogènes sur ∂Q_-

On suit maintenant une démarche analogue à celle employée dans [3] pour le cas où $V(Q) = L^2(Q)$. On introduit les espaces :

$$L^2_e(\partial Q_-) = \{\varphi : \overset{\circ}{\widehat{\partial Q}}_- \to \bar{\mathbb{R}} \text{ mesurables}, \int_{\overset{\circ}{\widehat{\partial Q}}_-} |\ell(z)|\varphi^2 d\sigma < +\infty\},$$

$$L^2_e(\partial Q_+) = \{\varphi : \overset{\circ}{\widehat{\partial Q}}_+ \to \bar{\mathbb{R}} \text{ mesurables}, \int_{\overset{\circ}{\widehat{\partial Q}}_+} \ell(z)\,\varphi^2 d\sigma < +\infty\},$$

qui sont chacun des espaces de Hilbert pour leur norme canonique.

On peut vérifier que, par exemple, si $u \in W_-(\Lambda)$ alors $u|_{\partial Q_+} \in L^2_\rho(\partial Q_+)$.

Soit $W(\Lambda)$ l'espace défini par :

$$W(\Lambda) = \{u \in V(Q),\ \Lambda u \in V'(Q),\ u|_{\partial Q_-} \in L^2_\rho(\partial Q_-)\},$$

qui est aussi un espace de Hilbert pour la norme du graphe.

Les conditions $u \in V(Q)$ et $\Lambda u \in V'(Q)$ n'entraînent pas que $u|_{\partial Q_-} \in L^2_\rho(\partial Q_-)$; mais on a $W_-(\Lambda) \subset W(\Lambda)$ et $W_+(\Lambda) \subset W(\Lambda)$.

Les propriétés de l'espace $W(\Lambda)$ vont découler du résultat suivant sur le problème aux limites inhomogènes dans $\overset{\circ}{\widehat{\partial Q}}_-$:

<u>Théorème 4</u> : On suppose les conditions A_1 et A_2 vérifiées. Soit L défini comme au théorème 3 précédent.
Pour tout couple (f,u_-) donné dans $V'(Q) \times L^2_\ell(\partial Q_-)$, il existe un unique élément $u \in W(\Lambda)$ vérifiant :

$$\begin{cases} Lu + \Lambda u = f, \\ u|_{\overset{\circ}{\widehat{\partial Q}}_-} = u_- \ ; \end{cases}$$

de plus :

$$u|_{\partial Q_+} \in L^2_\ell(\partial Q_+)\ .$$

L'unicité découle du théorème 3 précédent. Pour l'existence, soit $(\psi_\nu)_\nu$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\bar{Q}) \cap W_+(\Lambda)$ tels que :

$$\psi_\nu|_{\overset{\circ}{\widehat{\partial Q}}_-} \to u_- \quad \text{dans } L^2_\rho(\partial Q_-),$$

et soit $v_\nu \in W_-(\Lambda)$ solution de :

$$Lv_\nu + \Lambda v_\nu = f - L\psi_\nu - \Lambda\psi_\nu , \quad \forall \nu .$$

On vérifie que $u_\nu = v_\nu + \psi_\nu$ converge dans $W(\Lambda)$ vers un élément u satisfaisant aux conditions du théorème 4. En effet, comme $u_\nu|_{\overset{\circ}{\widehat{\partial Q_-}}} = \psi_\nu|_{\overset{\circ}{\widehat{\partial Q_-}}}$,

multipliant l'équation $Lu_\nu + \Lambda u_\nu = f$ par u_ν et utilisant que v_ν est limite dans $W(\Lambda)$ de fonctions de $\mathcal{D}(\bar{Q}) \cap W_-(\Lambda)$, on obtient l'estimation :

$$\alpha\|u_\nu\|^2 + \frac{1}{2}\int_{\overset{\circ}{\widehat{\partial Q_+}}} \rho(z)\, u_\nu^2 \, d\sigma = -\frac{1}{2}\int_{\overset{\circ}{\widehat{\partial Q_-}}} \ell(z)\, \psi_\nu^2 \, d\sigma ,$$

ce qui permet de conclure.

<u>Corollaire</u> : On suppose les conditions A_1 et A_2 vérifiées. Tout élément de $W(\Lambda)$ possède une trace dans $\overset{\circ}{\widehat{\partial Q_+}}$ appartenant à $L^2_\rho(\partial Q_+)$. De plus, $\mathcal{D}(\bar{Q}) \cap W(\Lambda)$ est dense dans $W(\Lambda)$ et :

$$\forall u, v \in W(\Lambda)$$

$$((\Lambda u,v)) + ((\Lambda v,u)) + \int_Q \operatorname{div} B\, uv\, dz = \int_{\overset{\circ}{\widehat{\partial Q_-}}} \ell(z) uv\, d\sigma + \int_{\overset{\circ}{\widehat{\partial Q_+}}} \ell(z) uv\, d\sigma .$$

On déduit en effet du théorème précédent que tout élément de $W(\Lambda)$ est limite d'une suite $(v_\nu + \psi_\nu)_\nu$, où $v_\nu \in W_-(\Lambda)$ et $\psi_\nu \in W_+(\Lambda)$. Il suffit d'utiliser la densité des fonctions régulières dans ces deux derniers espaces.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Baiocchi : Définition d'opérateurs maximaux et applications. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e série, t.2, 1969, p.481 à 520.

[2] M. Baouendi et P. Grisvard : Sur une équation d'évolution changeant de type. J. Funct. Anal. vol.2, 1968, p.352 à 367.

[3] C. Bardos : Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre...
Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4 e série, t.3, 1970 p.185 à 233.

[4] G. Fichera : Sulle equazione differenziali lineari ellitico-paraboliche del second ordine.
Att. Acc. Nat. Lincei. Nem., Ser.8, vol.5, 1956 p.1 à 30

[5] J. J. Kohn, L. Nirenberg : Degenerate elliptic parabolique equations of second order.
Comm. Pure and Appl. Math. vol. XX, 1967, p.797 à 872.

[6] M. Langlais : Solutions fortes pour des problèmes aux limites du second ordre dégénérés, note à paraître aux C.R.A.S. et
Pub. A.A.I. n° 7703, U.E.R. Math. et Inf., Université de Bordeaux I.

[7] O. A. Oleinik, E. V. Radkevič : Second order equations with non negative characteristic form.
A M. S., Providence, Rhode Island, Plenum Press, 1973.

[8] R. S. Phillips, L. Sarason : Elliptic parabolic equations of second order, J. Math. Mech. 17, 1967-1968 p.891-917.