Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

A. UNTERBERGER

Encore des classes de symboles

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. nº 6, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A7_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 7 - 1 9 7 8

ENCORE DES CLASSES DE SYMBOLES

par A. UNTERBERGER

Exposé n° VI

13 Décembre 1977

Comme on sait, les opérateurs s'appellent pseudo-différentiels quand on a choisi de les représenter par leurs symboles ; à mesure qu'on élargit les classes de symboles considérés (une activité qui n'a guère connu la récession depuis une douzaine d'années), les opérateurs sont de plus en plus pseudo et de moins en moins différentiels. Les fonctions sur lesquelles ils opèrent vivent sur un espace de points x, les symboles sur l'espace de phase des points (x,ξ) ; la plupart des traitements privilégient ξ par rapport à x, ce qui est naturel vu que la majorité des problèmes étudiés (mais non, par exemple, les propriétés spectrales) sont locaux en x, et jamais en ξ ; néanmoins, dans l'étude des propriétés de base des opérateurs pseudo-différentiels (calcul symbolique et continuité sur L^2), on gagne en clarté aussi bien qu'en généralité en oubliant la structure de produit de l'espace de phase, et en ne retenant que sa structure linéaire symplectique. L'objet du présent exposé est de définir des classes de symboles se transformant en classes du même genre sous l'effet des transformations linéaires symplectiques de l'espace de phase.

§ 1. GENERALITES SUR LES OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS

Soient Y un espace vectoriel réel de dimension n, et $X = Y \times Y^*$; il y a sur X une mesure de Lebesgue canonique notée $dx\, d\xi$.

A tout symbole $a \in \mathcal{S}'(X)$ on associe l'opérateur $\mathrm{Op}(a) : \mathcal{S}(Y) \to \mathcal{S}'(Y)$ défini par

1.1 $$\mathrm{Op}(a)u(x) = \iint a(x,\xi)e^{2i\pi\langle x-y,\xi\rangle}u(y)\,dy\, d\xi .$$

Soit $t \in \mathbb{R}$; un autre choix possible de la correspondance entre symboles et opérateurs aurait été $a \mapsto \mathrm{Op}_t(a)$, avec

1.2 $$\mathrm{Op}_t(a)u(x) = \iint a((1-t)x+ty,\xi)\, e^{2i\pi\langle x-y,\xi\rangle}u(y)\,dy\, d\xi .$$

Le choix de la correspondance $a \mapsto \mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(a)$ remonte à H. Weyl, ainsi qu'il est rappelé dans le célèbre article de Kohn-Nirenberg sur les opérateurs pseudo-différentiels.

Pour tout $a \in \mathcal{S}'(X)$, on a (cf.(4), exercices 1.2 à 1.5).

1.3 $$\mathrm{Op}_t(a) = \mathrm{Op}(\mathcal{J}^t a), \quad \text{avec} \quad \text{pour } t \neq 0,$$

1.4 $$\mathcal{J}^t a(x,\xi) = |t|^{-n} \iint a(y,\eta) e^{-\frac{2i\pi}{t}\langle y-x,\eta-\xi\rangle} dy\, d\eta ,$$

et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{J}^t$ opère dans $\mathcal{S}(X)$, dans $\mathcal{S}'(X)$, et unitairement sur $L^2(X)$.

De plus, $\mathcal{J}^{s+t} = \mathcal{J}^s \mathcal{J}^t$, et $\mathcal{J}^t$ est le groupe de transformations unitaires dont le générateur infinitésimal est

$$\frac{1}{2i\pi} \Sigma \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_j} ,$$

si l'on a choisi sur Y et Y^* deux systèmes duaux de coordonnées. L'opération $a \mapsto \mathcal{J}a = \mathcal{J}^1 a$ correspond, dans la représentation $a \mapsto Op(a)$, à l'échange de l'ordre des opérateurs de multiplication et de convolution, pour les symboles décomposables sous la forme $a_1(x)a_2(\xi)$. Le calcul symbolique usuel des opérateurs se doit d'étudier $\mathcal{J}$, compte tenu des formules

$$Op(a)' = Op(\mathcal{J}\check{a}) \quad \text{et} \quad Op(a)^* = Op(\mathcal{J}\bar{a})$$

qui lient le symbole d'un opérateur à ceux de son transposé et de son adjoint. En revanche, on a simplement

1.5 $$Op_{\frac{1}{2}}(a)' = Op_{\frac{1}{2}}(\check{a}) \quad \text{et} \quad Op_{\frac{1}{2}}(a)^* = Op_{\frac{1}{2}}(\bar{a})$$

ce qui est l'un des avantages (mais c'est loin d'être le seul) d'utiliser $Op_{1/2}$ pour représenter des opérateurs par des symboles : nous adopterons ce choix, qui est également celui fait par Leray (3). Nous sommes donc dispensés en principe d'étudier l'opération $\mathcal{J}^t$ (à ceci près que, pour les applications, il conviendra tout d'abord de transformer par $\mathcal{J}^{-1/2}$ les ingrédients du problème, mais ceci ne doit pas créer de difficulté, puisqu'il s'agit en général d'opérateurs différentiels ou pseudo-différentiels classiques) ; nous ferons néanmoins cette étude, mais en notant dès maintenant que les classes de symboles introduites dans ce but ne sont pas les mêmes que celles qui feront marcher le calcul symbolique (dans la représentation $Op_{1/2}$) et l'étude de la continuité sur L^2 ; il en sera cependant ainsi dans le cas de classes liées, ainsi qu'on le verra plus loin, à la structure de produit de $X = Y \times Y^*$.

Considérons la structure symplectique $[\ ,\ ]$ définie sur $Y \times Y^*$ par

1.6 $$[(y,\eta),(y',\eta')] = -\langle y,\eta'\rangle + \langle y',\eta\rangle .$$

Soit # la composition des symboles correspondant, dans la représentation $Op_{\frac{1}{2}}$, à la composition des opérateurs : elle est donc définie, pour $a \in \mathcal{S}(X)$ et $b \in \mathcal{S}(X)$, par

1.7 $$Op_{\frac{1}{2}}(a)\ Op_{\frac{1}{2}}(b) = Op_{\frac{1}{2}}(a \# b) ,$$

et l'on obtient, après quelques calculs, la formule

1.8 $$(a \# b)(x) = 2^{2n} \iint a(y)b(z)\, e^{-4i\pi[y-x,z-x]}\, dy\, dz,$$

où l'on a, pour simplifier la notation, désigné le point courant de $Y \times Y^*$ par une seule lettre latine. Rappelons que la formule de composition des symboles dans la représentation usuelle ne fait intervenir que "la moitié" (i.e. un terme sur deux) de la forme symplectique, ce qui est bien gênant. La formule que nous venons d'écrire est analogue à une formule donnée par Leray (3).

Quelques considérations métaplectiques

En supposant $Y = \mathbb{R}^n$, considérons les polynômes de la forme

$$\ell = \langle Ax,x\rangle + 2\langle Bx,\xi\rangle + \langle C\xi,\xi\rangle + \lambda,$$

où A, B, C sont des matrices réelles, A et C sont symétriques, et λ est réel ; posons $L = Op_{\frac{1}{2}}(\ell)$, c'est un opérateur autoadjoint.

Le groupe métaplectique Mp(n) est celui engendré par les opérateurs $e^{i\pi L}$: ce sont des automorphismes linéaires de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, qui se prolongent en transformations unitaires de $L^2(\mathbb{R}^n)$. On obtient des générateurs explicites de Mp(n) en spécialisant ℓ :

a) si $\ell = \langle Ax,x\rangle + \lambda$, $e^{i\pi tL}$ est la multiplication par $\exp i\pi t(\langle Ax,x\rangle + \lambda)$

b) si $\ell = 2\langle Bx,\xi\rangle$, on a

$$i\pi L = \Sigma\, b_{jk}\, x_k \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} B , \text{ et } e^{i\pi tL}u = [\det e^{tB}]^{1/2}\, u \circ e^{tB}$$

c) si $n=1$, et $\ell = -(x^2+\xi^2)$, on obtient, pour $0 < t < \pi$,

$$e^{i\pi tL}u(x) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\sin t}} \int \exp \frac{i\pi}{\sin t}\left[(x^2+\xi^2)\cos t - 2x\xi\right] u(\xi)\, d\xi,$$

et en particulier $e^{i\frac{\pi^2}{2}L} = e^{-\frac{i\pi}{4}}\mathcal{F}$.

On peut montrer (cf.(3)) que Mp(n) est engendré par les transformations du genre a) et b),
et par les transformations de Fourier portant sur l'une des coordonnées.

Nous allons montrer, ce qui a déjà été fait dans (2) et (3), que pour toute transformation symplectique μ de l'espace de phase, il existe $M \in Mp(n)$ telle que, pour tout symbole $a \in \mathcal{S}'(X)$, on ait $M\, Op_{\frac{1}{2}}(a) M^{-1} = Op_{\frac{1}{2}}(a\circ\mu)$

Les calculs qui suivent doivent s'interpréter, pour $a \in L^2(X)$, au sens de la théorie des groupes unitaires fortement continus, la norme choisie sur les opérateurs étant celle de Hilbert-Schmidt.

On a, avec les notations précédentes,

$$e^{i\pi tL} Op_{\frac{1}{2}}(a) e^{-i\pi tL} = Op_{\frac{1}{2}}(e^{t\,\mathrm{ad}(i\pi\ell)}a), \quad \text{avec}$$

$$(\mathrm{ad}\, i\pi\ell)a = i\pi(\ell \# a - a \# \ell).$$

Un calcul justifié plus loin donne

$$i\pi(\ell \# a - a \# \ell) = \langle Bx + C\xi, \frac{\partial a}{\partial x}\rangle - \langle Ax + B'\xi, \frac{\partial a}{\partial \xi}\rangle,$$

où B' est la matrice transposée de B.

Il en résulte (voir b) plus haut) que $e^{t\,\mathrm{ad}(i\pi\ell)}a = a\circ e^{t\sigma}$, avec $\sigma = \begin{pmatrix} B & C \\ -A & -B' \end{pmatrix}$, ce qui prouve la formule annoncée vu que σ est l'élément générique de l'algèbre de Lie du groupe symplectique.

§ 2 ETUDE DU GROUPE $\mathcal{J}^t$

Soient X un espace vectoriel de dimension 2n sur $\mathbb{R}$, et q une forme quadratique non dégénérée sur X, de signature nulle ; q est associée à un isomorphisme symétrique A de X sur X^*, par $q(x) = \langle x, Ax\rangle$. Le produit $|\det A|^{1/2}dx$, où chacun des deux facteurs a été défini par référence à une base de X, et à sa base duale, est intrinsèque : notons-le simplement dx.

On définit la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(X)$ par

$$\hat{a}(\xi) = \int a(x)\, e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} dx.$$

L'opérateur différentiel à coefficients constants $L_A(D)$ est défini par

$$L_A(D)a(x) = \int_{X^*} \langle A^{-1}\xi,\xi\rangle e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle}\hat{a}(\xi)\,d\xi,$$

où $d\xi$ est la mesure duale de dx.

On définit $\mathcal{J}^t = \exp i\pi t\, L_A(D)$. On a, pour $a \in \mathcal{S}(X)$ et $t \neq 0$:

2.1 $$\mathcal{J}^t a(x) = |t|^{-n} \int a(y)\, e^{-\frac{i\pi}{t}\langle y-x, A(y-x)\rangle} dy ,$$

et $\mathcal{J}^t$ opère dans $\mathcal{S}(X)$, dans $\mathcal{S}'(X)$, et unitairement dans $L^2(X)$.

On se propose d'obtenir des estimations pour $\mathcal{J}^t a$ dans la topologie de la convergence uniforme. Le cas qui nous intéresse principalement est celui où $X = Y \times Y^*$, avec $q(x,\xi) = 2\langle x,\xi\rangle$, d'où, en coordonnées duales sur Y et Y^*, $i\pi L_A(D) = \frac{1}{2i\pi} \sum \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_j}$. On a préféré prendre une situation plus abstraite d'une part parce que la structure de produit de X ne joue aucun rôle dans ce qui suit, d'autre part pour économiser les notations.

<u>Définition 2.1</u> : Soit $V = (V_1,\ldots,V_{2n})$ un système de champs de vecteurs C^∞ sur X, partout indépendants ; pour tout $x \in X$, notons $z \mapsto \|z\|_x$ la norme euclidienne sur X pour laquelle les vecteurs $V_j(x)$ constituent une base orthonormale. Nous dirons que V est un champ de repères privilégié pour la forme quadratique $\langle x, Ax\rangle$ si les trois conditions suivantes sont vérifiées:

a) pour tout $x \in X$, on a $\langle V_j(x), AV_k(x)\rangle = \delta_{j,k\pm n}$, symbole de Kronecker, avec $k \pm n \in [1,2n]$.

b) il existe deux constantes positives C et M telles que, quels que soient x,y et $z \in X$, on ait $\|z\|_y \leq C\|z\|_x(1 + \|y-x\|_x)^M$.

c) quels que soient les entiers $k, j_1,\ldots,j_p \in [1,2n]$, il existe C telle que, quels que soient z et $x \in X$, on ait :

$$|V_{j_1}(x,D_x)\dots V_{j_p}(x,D_x)(\langle z, A\,V_k(x)\rangle| \leq C\|z\|_x$$

<u>Définition 2.2</u> : Soit g une fonction à valeurs réelles sur X : on suppose qu'il existe deux constantes positives C et M_1 telles que, quels que soient x et $y \in X$, on ait :

$$e^{g(y)-g(x)} \leq C(1+\|y-x\|_x)^{M_1}.$$

On appelle alors S_V^g l'espace des fonctions a de classe C^∞ sur X telles que, quels que soient $j_1,\dots,j_p$, la fonction $e^{-g(x)}V_{j_1}(x,D)\dots V_{j_p}(x,D)a(x)$ soit bornée.

<u>Quelques conséquences de la définition</u>

Soient $a_{jk}(x,y)$ les coefficients de la matrice qui fait passer de la base V(x) à la base V(y) : on a $a_{jk}(x,y) = \langle V_j(y), AV_{k\pm n}(x)\rangle$ et la condition c) signifie qu'on a les inégalités

2.2 $$|V_{j_1}(x,D_x)\dots V_{j_p}(x,D_x)a_{jk}(x,y)|_{y=x} \leq C,$$

et de même

$$|V_{j_1}(x,D_x)\dots V_{j_p}(x,D_x)a_{jk}(y,x)|_{y=x} \leq C.$$

Il en résulte pour commencer que, si l'on appelle V_j' le transposé de l'opérateur différentiel V_j, et si l'on pose $-\omega_j = V_j' + V_j$, on a $\omega_j \in S_V^o$. En effet, avec

$$V_j(x,D) = \sum_k a_{jk}(y,x)V_k(y,D), \quad \text{on a}$$

$$\omega_j(x) = \sum_k V_k(y,D_x)(a_{jk}(y,x))$$

$$= \sum_{k\ell} a_{k\ell}(x,y)V_\ell(x,D_x)(a_{jk}(y,x)), \quad \text{et}$$

$$V_{j_1}(x,D_x)\dots V_{j_p}(x,D_x)\omega_j(x) =$$
$$\sum_{k\ell} V_{j_1}(x,D_x)\dots V_{j_p}(x,D_x)\{a_{k\ell}(x,y)V_\ell(x,D_x)(a_{jk}(y,x))\} \qquad (y=x),$$

qui est une fonction bornée d'après 2.2.

On voit de même que si l'on pose

$$W_{j_1\dots j_p}(x,D_x)f(x) =$$

$$V_{j_1}(x^1,D_x)\dots V_{j_p}(x^p,D_x)f(x)\big|_{x^1=\dots=x^p=x} \quad ,$$

l'opérateur $V_{j_1}\dots V_{j_p} - W_{j_1\dots j_p}$ s'écrit comme combinaison des opérateurs $W_{k_1\dots k_r}$ $(0 \le r \le p-1)$ à coefficients dans S_V^o .

Pour examiner si une fonction a appartient à un espace S_V^g conformément à la définition 2.2, on peut donc négliger de faire opérer $V_{j_1}\dots V_{j_r}$ sur les coefficients des opérateurs $V_{j_{r+1}},\dots,V_{j_p}$ pris par rapport à une base fixe.

Notons également la formule

2.3 $$\|z\|_x^2 = \sum_j <z, AV_j(x)>^2,$$

et que

2.4 $$\rho(x,y) = (\sum_{jk} <V_j(x), AV_k(y)>^2)^{1/2} = (\sum_j \|V_j(x)\|_y^2)^{1/2} = (\sum_k \|V_k(y)\|_x^2)^{1/2}$$

reste dans un rapport borné avec $\sup_z \frac{\|z\|_y}{\|z\|_x}$. Enfin, on a l'inégalité

2.5 $$|V_{j_1}(x,D_x)\dots V_{j_p}(x,D_x)V_{k_1}(y,D_y)\dots V_{k_q}(y,D_y) < V_j(y), AV_k(x) >|$$

$$\le C\, \rho(x,y),$$

que l'on obtient à l'aide de 2.2 et de

$$a_{jk}(x,y) = \sum_{\ell} a_{\ell k}(x,z)a_{j\ell}(z,y) .$$

<u>Théorème 2.1</u> : Soient V et g vérifiant les hypothèses des définitions 2.1 et 2.2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{J}^t$ envoie S_V^g dans S_V^g.

Preuve : L'espace S_V^g est muni d'une notion évidente d'ensembles bornés. Si une suite (a_k) bornée dans S_V^g converge dans $\mathcal{S}'(X)$ vers a, alors d'une part elle converge dans $C^\infty(X)$ (théorème d'Ascoli), d'autre part $a \in S_V^g$.

Une conséquence de b) est l'inégalité

2.6 $$\|y - x\|_y \le C(1 + \|y-x\|_x)^{M+1}$$

Il en résulte que si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $f(0) = 1$, la suite (f_k) définie par $f_k(x) = f(k^{-1}\|x\|_x^2)$ est une suite dans $\mathcal{D}(X)$ convergeant vers 1 dans $C^\infty(X)$; en utilisant c) et 2.3 on vérifie que (f_k) est bornée dans S_V^o.

On se ramène grâce à cela au problème d'obtenir des bornes pour $\mathcal{J}^t a$ dans S_V^g à l'aide de bornes pour a dans S_V^g lorsque $a \in \mathcal{S}(X)$.

On part de 2.1 et de l'identité

2.7 $$e^{-\frac{i\pi}{t}\langle y - x, A(y - x)\rangle} = \{ 1 + \|y-x\|_y^2 - \frac{t}{2i\pi}\Sigma V_j(y,D_y) \langle y-x, AV_j(y)\rangle \}^{-1}$$
$$(1 - \frac{t^2}{4\pi^2}\Sigma V_j^2(y,D_y))e^{-\frac{i\pi}{t}\langle y-x,A(y-x)\rangle} .$$

Après avoir effectué N fois l'intégration par parties correspondant à cette identité, on majore l'integrand de 2.1 par

$$C\, e^{g(y)}(1 + \|y - x\|_y)^{-2N} \le C\, e^{g(x)}(1 + \|y - x\|_x)^{M_1 - \frac{2N}{M+1}}$$

Ceci permet de majorer $|\mathcal{J}^t a(x)|$ par $C\, e^{g(x)}$, compte tenu du fait que les changements de bases $(V(x))$ sont unimodulaires.

Pour estimer $V_{j_1}\ldots V_{j_p}(\mathcal{J}^t a)$, on utilise également 2.5 .

Théorème 2.2 : Soient V et g vérifiant les hypothèses des définitions 2.1 et 2.2, et soit $a \in \mathcal{S}'(X)$. Supposons que $(L_A(D))^k a \in S_V^g$ pour un certain entier $k \ge 0$. Alors

$$\mathcal{J}^t a - \sum_{j \le k-1} \frac{1}{j!}(i\pi\, tL_A(D))^j a \in S_V^g$$

Preuve : On peut en effet écrire

$$\mathcal{J}^t a - \sum_{j \leq k-1} \frac{1}{j!}(i\pi\, tL_A(D))^j\, a = \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}(i\pi\, L_A(D))^k\, \mathcal{J}^s a\, ds =$$

$$\int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}\, \mathcal{J}^s((i\pi\, L_A(D))^k a) ds ,$$

ce qui donne le théorème 2.2 comme conséquence du théorème 2.1.

Cet énoncé présente par rapport aux énoncés plus traditionnels l'avantage que l'on ne suppose pas que tous les termes de $(L_A(D))^k a$ relativement à une décomposition particulière de $(L_A(D))^k$ appartiennent à S_V^g .

§ 3. COMPOSITION DES SYMBOLES

On étudie dans ce paragraphe les extensions de l'opération de composition des symboles, définie (1.8) pour $a \in \mathcal{S}(X)$ et $b \in \mathcal{S}(X)$ par

$$3.1 \qquad (a \# b)(x) = 2^{2n} \iint a(y) b(z) e^{-4i\pi[y-x,\, z-x]}\, dy\, dz.$$

Cette fois c'est la structure symplectique de X qui seule intervient ; la mesure de Lebesgue dy dz sur $X \times X$ est liée à cette structure, selon ce qui a été indiqué au début du paragraphe 2, à condition de considérer sur $X \times X$ la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique

$$\langle (y,z), B(y',z') \rangle = [y,z'] + [y',z]$$

Avec les notations du paragraphe 2, on a d'ailleurs

$$3.2 \qquad a \# b = \exp \frac{i\pi}{2} L_B(D)(a \otimes b) \circ \delta \quad ,$$

où δ est l'application diagonale : $X \to X \times X$.

Définition 3.1 : Soit $V = (V_1, \ldots, V_{2n})$ un système de champ de vecteurs C^∞ sur X, partout indépendants ; pour tout $x \in X$, soit $z \mapsto \|z\|_x$ la norme euclidienne sur X pour laquelle les vecteurs $V_j(x)$ constituent une base orthonormale. Nous dirons que V est un champ de repères privilégié pour la forme symplectique si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

a) pour tout $x \in X$, on a $[V_j(x), V_k(x)] = \varepsilon_j \delta_{j,k\pm n}$ avec $\varepsilon_j = -1$ si $j \leq n$, $\varepsilon_j = 1$ si $j \geq n+1$

b) il existe $C > 0$ et $\delta \in [0,1[$ telles que, quels que soient x, y et $z \in X$, on ait

$$\|z\|_y \leq C\|z\|_x (1 + \|y-x\|_x + \|y-x\|_y)^\delta .$$

c) quels que soient les entiers $k, j_1, \ldots, j_p \in [1,2k]$, il existe C telle que, quels que soient z et $x \in X$, on ait :

$$|V_{j_1}(x,D_x) \ldots V_{j_p}(x,D_x)[z, V_k(x)]| \leq C\|z\|_x .$$

<u>Définition 3.2</u> : Elle est identique à la définition 2.2 mais V y a la signification donnée ci-dessus.

<u>Remarques</u> : L'hypothèse b) est plus forte que l'hypothèse correspondante dans la définition 2.1 et entraîne les inégalités

3.3 $$\|z\|_y \leq C\|z\|_x (1 + \|y-x\|_x)^{\delta/1-\delta}$$

et

3.4 $$\|y-x\|_y \leq C(1 + \|y-x\|_x)^{1/1-\delta}$$

On a $\|z\|_x^2 = \Sigma [z, V_j(x)]^2$ et les indications du paragraphe 2 groupées sous le titre "quelques conséquences de la définition" sont encore valables ici, mutatis mutandis, en posant cette fois-ci

3.5 $$\rho^2(y,z) = \sum_{jk} [V_j(y), V_k(z)]^2.$$

<u>Théorème 3.1</u> : Au sens des définitions 3.1 et 3.2 soient $a \in S_V^g$ et $b \in S_V^h$. Alors $a \# b \in S_V^{g+h}$.

<u>Preuve</u> : En intégrant par parties, on écrit :

3.6 $$(a \# b)(x) = 2^{2n} \int ({}^t\Lambda . G^{-1})^N (a(y)b(z)) e^{-4i\pi[y-x,z-x]} \, dy\, dz,$$

avec

$$\Lambda = 1 - (16\pi^2)^{-1} \sum V_j^2(y, D_y) + V_j^2(y, D_z) + V_j^2(z, D_y) + V_j^2(z, D_z)$$

et

$$G = 1 + \|z-x\|_y^2 + \|y-x\|_y^2 + \|z-x\|_z^2 + \|y-x\|_z^2 -$$

$$- (4i\pi)^{-1} \sum V_j(y, D_y)[V_j(y), z-x] + V_j(z, D_z)[y-x, V_j(z)]$$

on a

$$|({}^t\Lambda . G^{-1})^N (a(y)b(z))| \le C e^{g(y)+h(z)} \rho(y,z)^{2N}$$

$$(1 + \|z-x\|_y + \|y-x\|_y + \|z-x\|_z + \|y-x\|_z)^{-2N}$$

D'après b), ceci est inférieur à

$$C e^{g(y)+h(z)} (1 + \|z-x\|_z + \|y-x\|_y)^{-2N(1-\delta)}$$

$$\le C e^{g(x)+h(x)} (1 + \|z-x\|_x + \|y-x\|_x)^{2M_1 - 2N(1-\delta)^2}$$

ce qui permet de conclure, en utilisant encore le fait que les matrices de changement de bases $(V(x))$ ont pour déterminant 1.

Si l'on pose $c_k = (i\pi L_B(D))^k (a \otimes b)$, on a aussi, d'après 3.2 :

$$(a \# b)(x) - \sum_{j \le k-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{i\pi}{2} L_B(D)\right)^j (a \otimes b)(x,x) =$$

$$\int_0^{1/2} \frac{(\frac{1}{2} - s)^{k-1}}{(k-1)!} \, ds \iint c_k(x + s^{1/2} y,\ x + s^{1/2} z) e^{-2i\pi[y,z]} \, dy\, dz.$$

Il en résulte que si l'on a pour une certaine fonction f (vérifiant l'hypothèse de la définition 3.2 et pour un certain M' les estimations

$$|V_{j_1}(y,D_y)\dots V_{j_p}(y,D_y)V_{k_1}(z,D_z)\dots V_{k_q}(z,D_z)c_k(y,z)|$$
$$\leq C\, e^{f(y)}(1+\|y-z\|_y)^{M'} ,$$

alors le reste à l'ordre k du développement asymptotique que nous venons d'écrire appartient à S_V^f . Compte tenu de la formule

3.7 $$i\pi\, L_B(D_{y,z}) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j V_j(x,D_y)V_{j\pm n}(x,D_z),$$

elle-même conséquence de a), on en déduit ce qui suit :

<u>Théorème 3.2</u> : Avec les hypothèses du théorème 3.1, on suppose que, pour un certain entier $k \geq 1$, et quel que soit le choix de $(j_1,\dots,j_k)$, les fonctions (de y et z respectivement) :

$$V_{j_1}(x,D_y)\dots V_{j_k}(x,D_y)a(y)|_{x=y}$$

et

$$V_{j_1}(x,D_z)\dots V_{j_k}(x,D_z)b(z)|_{x=z}$$

appartiennent respectivement à $S_V^{g'}$ et $S_V^{h'}$. Alors, en revenant au cas où $X = Y\times Y^*$ et à la notation associée à ce produit :

$$a\# b(x,\xi) - \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq k-1} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!\beta!}\left(\frac{1}{4i\pi}\right)^{|\alpha|+|\beta|}\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi)\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha b(x,\xi)$$

appartient à $S_V^{g'+h'}$.

<u>Classes liées à la structure de produit de</u> $X = Y\times Y^*$

Si l'on pose, avec $S(x,\xi)\in GL(Y)$ pour tout $(x,\xi)\in X$,

$$V(x,\xi) = \begin{pmatrix} S(x,\xi) & 0 \\ 0 & {}^tS(x,\xi)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial\xi\end{pmatrix} ,$$

où $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial \xi}$ sont deux bases duales de Y et Y^*, les conditions a) des définitions 2.1 et 3.1 sont toutes deux vérifiées, ce qui, moyennant la vérification des conditions b) et c) de la définition 3.1, permet dans la classe considérée l'étude aussi bien de l'opération $\mathcal{J}^t$ que de l'opération $\div$,
donc aussi celle de la composition usuelle des symboles, mais on perd l'invariance à l'égard des transformations symplectiques, et la dimension de la variété des choix de $\| \ \|_{x,\xi}$ est passée de $n^2 + n$ à $\frac{n(n+1)}{2}$.

Si $Y = \mathbb{R}^n$ et si les matrices $S(x,\xi)$ sont diagonales, on retrouve la situation des "vecteurs-poids" de Beals (1), sous des hypothèses qui ne sont pas comparables. Enfin, les symboles associés à des "fonctions poids" Φ et φ de Beals sont décrits, en posant $R = \Phi_\varphi^{-1}$ par la possibilité d'appliquer autant de fois qu'on le veut les opérateurs $R^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x_j}$ ou $R^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi_j}$, en gagnant à chaque fois $(\Phi_\varphi)^{1/2} \geq c > 0$; on rentre dans la situation précédente en prenant $S(x,\xi) = R(x,\xi)^{-1/2} I$:
dans ce cas, $\|(z,\zeta)\|^2_{x,\xi} = R(x,\xi)|z|^2 + R^{-1}(x,\xi)|\zeta|^2$, et la condition b) de la définition 3.1 est un affaiblissement de l'hypothèse 1.5 de Beals ; la condition c) est une conséquence de la proposition 1.26 de Beals et de la condition $\Phi_\varphi \geq c > 0$. Enfin, la condition de la définition 3.2 relative à la fonction "ordre" g (appelée λ par Beals) est plus générale que la condition 3.2 de Beals dans le cas où $\Phi_\varphi = 1$, et ne lui est pas comparable dans le cas général, mais on retrouve quand même les résultats de Beals sur le calcul symbolique en poussant les développements asymptotiques assez loin (théorèmes 2.2 et 3.2).

§ 4. ACTION SUR $\mathcal{S}(Y)$ et $L^2(Y)$

Dans tout ce paragraphe, V est un champ de repères privilégié pour la forme symplectique, et g vérifie l'hypothèse de la définition 3.2.

Théorème 4.1 : Si $a \in S^0_V$, $Op_{\frac{1}{2}}(a)$ se prolonge en un opérateur continu de $L^2(Y)$ dans $L^2(Y)$.

Preuve : On se ramène, par l'argument usuel, à prouver que lorsque a varie dans $\mathcal{S}(X)$ en restant borné dans S^0_V, la norme de $Op_{\frac{1}{2}}(a)$ reste bornée.

La norme d'un opérateur A compact sur $L^2(Y)$ peut s'écrire

$$\|A\| = \sup \frac{|||AB|||}{|||B|||} ,$$

où B parcourt l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt muni de sa norme $|||\ \ |||$.

En effet, l'inégalité $|||AB||| \leq \|A\| \, |||B|||$ est classique. Par ailleurs, si $A \neq 0$, soit p l'opérateur (de Hilbert-Schmidt) de projection orthogonale sur le sous-espace propre de A^*A correspondant à sa plus grande valeur propre $\|A^*A\|$. On a $A^*A\,p = \|A^*A\|\,p$, d'où

$$\|A\|^2 = \|A^*A\| = \frac{|||A^*Ap|||}{|||p|||} \leq \|A^*\| \frac{|||Ap|||}{|||p|||} = \|A\| \frac{|||Ap|||}{|||p|||} .$$

Comme, ainsi qu'on le voit immédiatement, la norme de Hilbert-Schmidt d'un opérateur $B = Op_{\frac{1}{2}}(b)$ n'est autre que la norme de b dans $L^2(X)$, la formule précédente ramène le problème à celui d'obtenir une borne pour la norme de l'opérateur $\mathcal{A}$: $b \mapsto a \# b$ en tant qu'opérateur sur $L^2(X)$. On rappelle que

(4.1) $$\mathcal{A}b(x) = 2^{2n}\iint a(y)b(z)e^{-4i\pi[y-x,\, z-x]}\,dy\,dz .$$

Le fait que $\mathcal{A}$ est borné sur $L^2(X)$ peut se démontrer par la méthode de Calderon-Vaillancourt, basée sur le lemme de Cotlar : les détails se trouvent dans (5).

<u>Théorème 4.2</u> : Si $a \in S_V^g$, $Op_{\frac{1}{2}}(a)$ opère continûment de $\mathcal{S}(Y)$ dans $\mathcal{S}(Y)$ (et par suite, également, de $\mathcal{S}'(Y)$ dans $\mathcal{S}'(Y)$).

<u>Preuve</u> : On commence par montrer que l'opérateur $\mathcal{A}$ qu'on vient d'introduire opère de $\mathcal{S}(X)$ dans $\mathcal{S}(X)$.

En posant

$$\tilde{b}(y) = 2^n\int b(z)e^{-4i\pi[y,z]}\,dz,$$

l'opération $b \mapsto \tilde{b}$ est un automorphisme de $\mathcal{S}(X)$, et on a

4.2 $$\mathcal{A}b(x) = 2^n \int a(x+y)e^{-4i\pi[x,y]}\tilde{b}(y)\,dy$$

Grâce à (3.3), on a, quels que soient x,y,z, les inégalités

$$1+\|z\|_x+\|y\|_x \le C(1+\|z\|_{x+y+z}+\|y\|_{x+y+z})(1+\|y+z\|_{x+y+z})^{\delta/1-\delta}$$

$$\le C(1+\|z\|_{x+y+z}+\|y\|_{x+y+z})^{1/1-\delta}$$

$$\le C(1+\|z\|_{x+y}+\|y\|_{x+z})^{\delta/(1-\delta)^2}$$

et en particulier

$$1+\|x\|_x+\|y\|_x \le C(1+\|x\|_{x+y}+\|y\|_o)^{\delta/(1-\delta)^2}, \tag{4.3}$$

d'où

$$1+\|x\|_o+\|y\|_o \le C(1+\|x\|_{x+y}+\|y\|_o)^{\delta/(1-\delta)^3} \tag{4.4}$$

Compte tenu de l'inégalité

$$\rho(x,0) \le C(1+\|x\|_o)^{\delta/1-\delta}$$

les éléments $\tilde{b}$ de $\mathcal{S}(X)$ sont caractérisés par le fait que quels que soient $j_1,\ldots,j_p$ et N', on a

$$|V_{j_1}\ldots V_{j_p}\tilde{b}(x)| \le C(1+\|x\|_o)^{-N'}$$

On pose

$$L = 1-(16\pi^2)^{-1}\Sigma\, V_j^2(x+y,D_y) + V_j^2(y,D_y)$$

et

$$G = 1+\|x\|^2_{x+y}+\|x\|^2_y-(4i\pi)^{-1}\Sigma\, V_j(x+y,D_y)[x,V_j(x+y)]$$
$$+ V_j(y,D_y)[x,V_j(y)] .$$

En effectuant N fois l'intégration par parties correspondant à l'identité

$$e^{-4i\pi[x,y]} = G^{-1}L\, e^{-4i\pi[x,y]},$$

on obtient (partant de 4.2), l'inégalité

$$|\mathcal{A}b(x)| \leq C\int (1+\|x+y\|_o)^M \rho(y,x+y)^{2N}(1+\|x\|^2_{x+y} + \|x\|^2_y)^{-N} (1+\|y\|_o)^{-N'} dy$$

$$\leq C\int (1+\|x+y\|_o)^M (1+\|x\|_{x+y} + \|x\|_y)^{-2N(1-\delta)} (1+\|y\|_o)^{-N'} dy$$

qui permet de conclure, à l'aide de 4.4.

Il reste à examiner le lien entre $\mathcal{A}$ (opérant sur $\mathcal{S}(X) = \mathcal{S}(Y\times Y^*)$) et $Op_{\frac{1}{2}}(a)$ (opérant sur $\mathcal{S}(Y)$). Dans le calcul qui suit, on a changé d'avis sur les notations, et on désigne par X,Y,... les points de X (aucune confusion n'est à craindre), par Ξ,... les points de X^*, réservant les lettres minuscules aux points de Y et Y^*. (4.1) se réécrit

4.6 $$\mathcal{A}b(X) = 2^{2n}\iint a(Y)b(Z)\, e^{-4i\pi[Y-X,Z-X]}\, dY\, dZ$$

Soient $\sigma : X^* \to X$ et $A : X \to X^*$ les isomorphismes définis par les identités

4.7 $$\langle X,\Xi\rangle = -[X,\sigma\Xi]$$

et

4.8 $$\langle (x,\xi),A(y,\eta)\rangle = \langle x,\eta\rangle + \langle y,\xi\rangle \, .$$

En posant $(x,\xi)^\vee = (-x,\xi)$, on a l'identité $\sigma\Xi = (A^{-1}\Xi)^\vee$.
On réécrit 4.6 sous la forme

4.9 $$\mathcal{A}b(X) = \iint a(X+\frac{\sigma\Xi}{2})b(Z)\, e^{2i\pi\langle X-Z,\Xi\rangle}\, dZ\, d\Xi \ ,$$

ce qui montre (cf.1.1) que le symbole de $\mathcal{A}$, dans la représentation Op, est la fonction

$$(X,\Xi) \mapsto a(X+\frac{\sigma\Xi}{2}).$$

En utilisant 1.4, on vérifie que la même fonction est le symbole de $\mathcal{A}$ dans la représentation $Op_{\frac{1}{2}}$. Considérons la transformation de $X\times X^*$ définie par

$$(X,\Xi) \mapsto (\frac{1}{2}(X - A^{-1}\Xi), AX + \Xi).$$

Elle conserve la forme symplectique et transforme le symbole de $\mathcal{A}$ en la fonction

$$(X,\Xi) \to a(\frac{1}{2}(X + \check{X}) + \frac{1}{2}((A^{-1}\Xi)^{\vee} - A^{-1}\Xi))) .$$

L'opérateur $\widetilde{\mathcal{A}}$ associé dans la représentation $Op_{\frac{1}{2}}$ est défini par

$$\widetilde{\mathcal{A}}b(X) = \iint a(\frac{X + \check{X} + Y + \check{Y}}{4} + \frac{1}{2}((A^{-1}\Xi)^{\vee} - A^{-1}\Xi)))e^{2i\pi<X-Y,\Xi>}b(Y)dY\, d\Xi$$

et opère aussi de $\mathcal{S}(X)$ dans $\mathcal{S}(X)$, d'après les considérations du paragraphe 1.

En posant $X = (x,\xi)$, $Y = (y,\eta)$, et $A^{-1}\Xi = (z,\zeta)$, on obtient

$$\widetilde{\mathcal{A}}b(x,\xi) = \iiiint a\,(-z,\frac{\xi+\eta}{2})e^{2i\pi(<x-y,\zeta> + <z,\xi-\eta>)}b(y,\eta)dy\, d\eta\, dz\, d\zeta$$

$$= \iint a(-z,\frac{\xi+\eta}{2})e^{2i\pi<z,\xi - \eta>}b(x,\eta)d\eta\, dz ,$$

d'où $\widetilde{\mathcal{A}} = I \otimes \mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ est l'opérateur défini sur $\mathcal{S}(Y^*)$ par $\mathcal{B}\varphi(\xi) = \iint a\,(-z,\frac{\xi+\eta}{2})e^{2i\pi<z,\xi-\eta>}\varphi(\eta)d\eta\, dz$, et $\mathcal{B}$ opère de $\mathcal{S}(Y^*)$ dans $\mathcal{S}(Y^*)$. Enfin, $\mathcal{B} = Op_{\frac{1}{2}}(\beta)$, avec $\beta(\xi,x) = a(-x,\xi)$, et la transformation

$(x,\xi) \mapsto (-\xi,x)$ est symplectique, ce qui termine la preuve du théorème 4.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Beals : A general calculus of pseudo-differential operators, Duke Math. J. 42 (1975), 1-42.

[2] L. Boutet de Monvel, A. Grigis, B. Helffer : Parametrixes d'opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples (Astérisque 1976).

[3] J. Leray : Analyse lagrangienne et mécanique, Séminaire , Collège de France (1976-77).

[4] A. Unterberger : Pseudo-differential operators and applications, Lecture Notes, Aarhus Universitet (1976).

[5] A. Unterberger : Sur une généralisation du théorème de Calderon-Vaillancourt, C. R. Acad. Sc. (déc. 1977).
