Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

B. Helffer

F. Nourrigat

# Opérateurs hypoelliptiques sur des groupes nilpotents

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1977-1978), exp. nº 4, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A5_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 7 - 1 9 7 8

# OPERATEURS HYPOELLIPTIQUES SUR DES GROUPES NILPOTENTS

par B. HELFFER et F. NOURRIGAT

Exposé n° IV

13 Décembre 1977

Dans [6], Rockland a conjecturé une condition nécessaire et suffisante d'hypoellipticité pour des opérateurs homogènes, invariants à gauche, sur des groupes nilpotents connexes, simplement connexes, gradués. Il a démontré que cette conjecture était vraie dans le cas du groupe de Heisenberg : $G = \mathbb{N}_{2n+1}$ . Dans [1], à ce séminaire, R. Beals a montré que la condition de Rockland était effectivement nécessaire dans le cas général, et qu'elle était suffisante dans le cas du groupe $G = \mathbb{N}_{2n+1} \times \mathbb{R}^k$. B. Helffer [3] a démontré que cette condition était suffisante pour un groupe de Lie G de rang de nilpotence 2. Une autre démonstration de ce résultat est donnée dans [2]. Nous nous proposons de démontrer ici que cette condition est suffisante pour un groupe G nilpotent de rang 3.

## § 1. ENONCE DE LA CONDITION

On considère un groupe de Lie G connexe, simplement connexe, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ admet une décomposition de la forme :

$$(1) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2 \oplus \mathfrak{G}_3$$

où les $\mathfrak{G}_i$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{G}$, tels que $[\mathfrak{G}_i,\mathfrak{G}_j] \subset \mathfrak{G}_{i+j}$ $(i,j = 1,2,3)$, avec la convention que : $\mathfrak{G}_{i+j} = 0$, si $i+j > 3$. On munit $\mathfrak{G}$ d'un groupe de dilatations $\delta_t$ définies pour tout t strictement positif par :

$$(2) \qquad \delta_t(x_1 + x_2 + x_3) = tx_1 + t^2x_2 + t^3x_3$$

pour tout $x_i$ dans $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1,2,3)$.

Le groupe d'isomorphismes $\delta_t$ se prolonge à l'algèbre enveloppante universelle (complexifiée) $\mathcal{U}(\mathfrak{G})$. On désignera, pour tout entier m strictement positif, par $\mathcal{U}_m(\mathfrak{G})$ l'espace des éléments de A de $\mathcal{U}(\mathfrak{G})$ homogènes de degré m, c'est-à-dire tels que : $\delta_t(A) = t^m(A)$ pour tout t strictement positif. $\mathcal{U}_o(\mathfrak{G})$ est égal à $\mathbb{C}$ . On posera :

$$\mathcal{U}^m(\mathfrak{G}) = \sum_{j=o}^{m} \mathcal{U}_j(\mathfrak{G}) .$$

Sous les hypothèses ci-dessus, l'application exponentielle exp : $\mathfrak{G} \to G$ définit un difféomorphisme. Pour tous a et b dans $\mathfrak{G}$, on désigne par c(a,b) l'unique élément de $\mathcal{G}$, tel que : $e^a e^b = e^{c(a,b)}$. Désignons par $\pi_{(o)}$ la représentation régulière à droite de G dans $L^2(\mathcal{G})$ (où $\mathcal{G}$ est munie de la mesure de Lebesgue). Pour tous a dans $\mathcal{G}$, et f dans $L^2(\mathcal{G})$, on définit $\pi_o(e^a)f$ par :

(3) $$\pi_{(o)}(e^a)f(x) = f(c(x,a))$$

pour tout x dans $\mathcal{G}$.

Pour tout a dans $\mathcal{G}$, on désignera par $\pi_{(o)}(a)$ le champ de vecteurs défini sur $\mathcal{G}$ , pour f dans $\mathcal{S}(\mathcal{G})$, par :

(4) $$\pi_o(a)f(x) = \frac{d}{dt}(\pi_{(o)}(e^{ta})f(x))/_{t=o}$$

Le prolongement de $\pi_{(o)}$ à $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ est un isomorphisme entre $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ et l'espace des opérateurs différentiels sur $\mathcal{G}$ invariants à gauche (si l'on munit $\mathcal{G}$ de la loi de groupe $(a,b) \to c(a,b)$).

Si $\pi$ est une représentation unitaire (fortement continue) de G dans un espace de Hilbert H, on désigne par $\mathcal{S}_\pi$, l'espace des vecteurs f de H, tels que l'application : $g \to \pi(g)f$ soit $C^\infty$ de G dans H. Pour tout P dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, on peut définir $\pi(P)$ de $\mathcal{S}_\pi$ dans $\mathcal{S}_\pi$.

On peut alors énoncer le :

<u>Théorème 1</u> : Avec les notations ci-dessus, pour tout P dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ (homogène de degré m), les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) L'opérateur différentiel $\pi_{(o)}(P)$ est hypoelliptique dans $\mathcal{G}$

ii) Pour toute représentation unitaire irréductible non-triviale $\pi$ de G, l'opérateur $\pi(P)$ est injectif dans $\mathcal{S}_\pi$.

Si P dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ vérifie ii), et si Q est dans $\mathcal{U}^{m-1}(\mathcal{G})$, l'opérateur différentiel $\pi_{(o)}(P+Q)$ est hypoelliptique dans $\mathcal{G}$.

## § 2. <u>ESTIMATIONS A PRIORI</u>

Introduisons d'abord les espaces de distributions sur $\mathcal{G}$ que nous utiliserons :

<u>Définition 2.1</u> : Pour tout entier m positif, on désigne par $H^m(\mathcal{G})$ l'espace des fonctions f dans $L^2(\mathcal{G})$ telles que, pour tout A dans $\mathcal{U}^m(\mathcal{G})$, on ait $\pi_{(o)}(A)f$ dans $L^2(\mathcal{G})$. Désignons par $(A_j)$ une base de $\mathcal{U}^m(\mathcal{G})$. On

munit $H^m(\mathcal{G})$ de la norme définie par :

(5) $$\|f\|^2_{H^m(\mathcal{G})} = \sum_j \|\pi_{(o)}(A_j)f\|^2_{L^2(\mathcal{G})}$$

Une étape essentielle de la démonstration du théorème 1 est la démonstration de la proposition suivante :

<u>Proposition 2.2</u> : Si P dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ vérifie les hypothèses du théorème 1, alors il existe une constante C strictement positive, telle que, pour tout u dans $C^\infty_o(\mathcal{G})$, on ait :

(6) $$\|u\|^2_{H^m(\mathcal{G})} \leq C(\|\pi_{(o)}(P)u\|^2_{L^2(\mathcal{G})} + \|u\|^2_{L^2(\mathcal{G})})$$

L'hypoellipticité de $\pi_o(P)$ se déduit de la proposition (2.2) en appliquant un critère de Trèves [8].

## § 3. REPRESENTATIONS INDUITES

Soient V un idéal de $\mathcal{G}$ et S un supplémentaire de V dans $\mathcal{G}$. On suppose que V et S sont stables par les dilatations $\delta_t$. Alors tout élément g de G s'écrit de manière unique :

$$g = e^v e^\sigma$$

avec v dans V et $\sigma$ dans S.

En particulier, pour tous x et y dans $\mathcal{G}$, il existe v(x,y) dans V et $\sigma(x,y)$ dans S uniques, tels que :

(7) $$e^x e^y = e^{v(x,y)} e^{\sigma(x,y)}$$

Soit $\xi$ un homomorphisme de V dans $\mathbb{R}$. On va définir une représentation unitaire $\pi_{(\xi,V)}$ de G dans $L^2(S)$ (où S est muni de la mesure de Lebesgue). Pour tous a dans $\mathcal{G}$ et f dans $L^2(S)$, $\pi_{(\xi,V)}(e^a)f$ est défini par :

(8) $$\pi_{(\xi,V)}(e^a)f(x) = e^{i\langle\xi, v(x,a)\rangle} f(\sigma(x,a))$$

pour tout x dans S.

Lorsque V est un idéal de $\mathfrak{G}$, stable par les $\delta_t$, cette définition coïncide (à une équivalence unitaire près), avec la définition classique des représentations induites (cf. par exemple [4] et [5]). On désigne par H(V) l'espace des homomorphismes de V dans $\mathbb{R}$. Pour tout $\xi$ dans H(V), on appellera orbite de $\xi$ dans $V^*$ l'image de l'application :

$$\mathfrak{G} \ni h \to \exp(\mathrm{ad}\, h)^* \xi .$$

Rappelons que, si $\xi$ et $\xi'$ sont dans H(V), les représentations $\pi_{(\xi,V)}$ et $\pi_{(\xi',V')}$ sont équivalentes si, et seulement si, $\xi'$ est dans l'orbite de $\xi$. On désigne par $B_\xi$ la forme bilinéaire définie sur $V \times \mathfrak{G}$ par :

$$B_\xi(x,y) = \langle\xi,[x,y]\rangle, \text{ pour tout } x \text{ dans } V, \text{ et } y \text{ dans } \mathfrak{G}.$$

Dire que $\xi$ est dans H(V) équivaut à dire que V est isotrope pour $B_\xi$. On désigne par $V^\perp$ l'espace des y dans $\mathfrak{G}$ tel que, pour tout x dans V, on ait :

$$B_\xi(x,y) = 0.$$

On dira que V est isotrope maximal si : $V = V^\perp$. On rappelle qu'alors la représentation induite $\pi_{(\xi,V)}$ est irréductible (cf. [4] et [5]). S'il n'y a pas de confusion possible, on écrira $\pi_\xi$ au lieu de $\pi_{(\xi,V)}$. Dans le cas où $V = \{0\}$ et $(S = \mathfrak{G})$, on retrouve la représentation régulière $\pi_{(o)}$. On désignera par $H^m_\xi(S)$ l'espace des fonctions f dans $L^2(S)$ telles que, pour tout A dans $\mathcal{U}^m(\mathfrak{G})$, on ait $\pi_\xi(A)f$ dans $L^2(S)$. Soit $(A_j)$ une base de $\mathcal{U}^m(\mathfrak{G})$. On munit $H^m_\xi(S)$ de la norme définie par :

$$\|f\|^2_{H^m_\xi(S)} = \sum_j \|\pi_\xi(A_j)f\|^2_{L^2(S)} \tag{9}$$

Nous aurons à démontrer des inégalités analogues à (6), de la forme : il existe une constante C, telle que pour tout $\xi$ dans H(V), tout u dans $\mathcal{S}(S)$ on ait :

$$\|u\|^2_{H^m_\xi(S)} \leq C[\|\pi_\xi(P)u\|^2_{L^2(S)} + \|u\|^2_{L^2(S)}] \tag{10}$$

avec différents choix de (V,S).

Nous allons indiquer, quelques lemmes techniques utiles pour les démonstrations d'inégalités du type (10).

## § 4. REDUCTION DU NOMBRE DE VARIABLES

Soient V un idéal de $\mathcal{G}$ et $\xi$ dans H(V). Soit V' un idéal de $\mathcal{G}$, contenant V, tel que :

$$[V',V'] \subset V$$

et tel que $\xi$ s'annule sur $[V',V']$.

Soient S un supplémentaire de V dans $\mathcal{G}$, et S' un supplémentaire de V' dans $\mathcal{G}$. On suppose que V, V', S et S' sont stables par les dilatations $\delta_t$. On désigne par E($\xi$) l'espace de $\xi'$ dans $V'^*$ dont la restriction à V est égale à $\xi$.

Soient d'autre part A et P deux éléments de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$. On suppose qu'il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout $\xi'$ dans E($\xi$), pour tout u dans $\mathcal{S}$(S'), on ait :

$$\|\pi_{\xi'}(A)u\|_{L^2(S')} \leq C\|\pi_{\xi'}(P)u\|_{L^2(S')}$$

Alors, sous les hypothèses ci-dessus, on peut montrer, qu'il existe une constante C strictement positive, telle que, pour tout u dans $\mathcal{S}$(S), on ait :

(11) $$\|\pi_{\xi}(A)u\|_{L^2(S)} \leq C\|\pi_{\xi}(P)u\|_{L^2(S)}$$

## § 5. REPRESENTATIONS DEPENDANT D'UN PARAMETRE

On considère deux éléments A et P de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, un idéal V et un supplémentaire S, stables par les $\delta_t$. On suppose que l'inégalité (11) est vérifiée pour tout $\xi$ dans un certain sous-ensemble $\Omega$ de H(V). On peut, sans restreindre la généralité, supposer que $\Omega$ contient l'orbite de chacun de ses points. On va définir un ensemble $\Omega_\varepsilon$ contenant $\Omega$, tel qu'une inégalité "voisine" de (11) soit vérifiée pour tout $\xi$ dans $\Omega_\varepsilon$.

Pour tout $\varepsilon$ strictement positif, posons :

$$\Omega_\varepsilon = \{\xi \in H(V) / \forall h \in \mathcal{G} , \exists \xi' \in \Omega \text{ tel que } \| \xi' - \exp(\mathrm{ad}\, h)^* \xi \| \leqslant \varepsilon\}$$

où $\| \ \|$ désigne une <<norme homogène>> sur le dual $V^*$ de V, telle que, $\|\delta_t(\xi)\| = t\|\xi\|$, pour tout $\xi$ dans $V^*$.

On démontre que si l'inégalité (11) est vérifiée pour tout $\xi$ dans $\Omega$, alors il existe une constante $C_1$ strictement positive telle que, pour tout $\varepsilon$ dans $]0,1[$, tout $\xi$ dans $\Omega_\varepsilon$, tout u dans $\mathcal{S}(S)$, on ait :

$$\|\pi_\xi(A)u\|^2_{L^2(S)} \leq C_1(\|\pi_\xi(P)u\|^2_{L^2(S)} + \varepsilon\|u\|^2_{H^{m-1}_\xi(S)}) \tag{12}$$

On déduit de ce lemme une inégalité "de type compacité". Cette inégalité est valable, comme tous les lemmes précédents, pour un groupe nilpotent gradué de rang de nilpotence r. On démontre que, si m est un entier multiple commun à 2,...,r, alors pour tout $\varepsilon$ dans $]0,1[$, il existe $C(\varepsilon)$ strictement positif, tel que, pour tout u dans $\mathcal{S}(S)$ et tout $\xi$ dans H(V), on ait :

$$\|u\|^2_{H^{m-1}_\xi(S)} \leq \varepsilon \|u\|^2_{H^m_\xi(S)} + C(\varepsilon)\|u\|^2_{L^2(S)} \tag{13}$$

## § 6. <u>DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.2</u>

On va utiliser les résultats des paragraphes 4 et 5 , en utilisant la chaîne de sous-algèbres isotropes suivante :

$$V_4 = \{0\} \qquad S_4 = \mathcal{G}$$

$$V_3 = \mathcal{G}_3 \qquad S_3 = \mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_1$$

$$V_2 = \mathcal{G}_3 \oplus \mathcal{G}_2 \qquad S_2 = \mathcal{G}_1$$

La détermination de $V_1$ dépend d'un élément $(\xi_2,\xi_3)$ de $V_2^*$. On considère la restriction à $(V_2^\perp \cap \mathcal{G}_1)$ de la forme bilinéaire $B_{\xi_2}$. Soit $I_1$ un sous-espace isotrope maximal de $\mathcal{V}_2^\perp \cap \mathcal{G}_1$. On définit alors $V_1$ par :

$V_1 = I_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3$ , $S_1 = \{$un supplémentaire de $I_1$ dans $\mathcal{G}_1\}$

Toutes ces sous-algèbres possèdent les propriétés utilisées dans les paragraphes précédents : les $V_i$ sont des idéaux gradués, et $[V_i, V_j] \subset V_{i+j}$ .

Notre but est de démontrer la proposition (2.2), c'est à dire l'estimation (10) correspondant à l'idéal : $V_4 = \{0\}$.

<u>1ère étape</u> : On applique l'argument de réduction du paragraphe 4, avec $V = V_4$, $V' = V_3$. Il suffit de démontrer l'estimation (10) pour l'idéal $V_3$, avec une constante C indépendante de $\xi_3$ dans $\mathcal{G}_3^*$. En raison de l'homogénéité de P, il suffit de démontrer l'inégalité : $\exists C$, $\forall u \in \mathcal{S}(S_3)$, $\forall \xi_3$ , $|\xi_3| = 1$,

(14) $$\|u\|^2_{H^m_{\xi_3}(S_3)} \leq C \|\pi_{\xi_3}(P)u\|^2_{L^2(S_3)}$$

D'après (12), si (14) est vérifiée pour tout $\xi_3$, avec une constante $C(\xi_3)$ pouvant dépendre de $\xi_3$, alors la constante $C(\xi_3)$ est localement bornée, donc bornée sur $|\xi_3| = 1$.

<u>2ème étape</u> : On suppose donc $\xi_3$ fixé et on applique de nouveau l'argument de réduction du paragraphe 4, avec $V = V_3$, $V' = V_2$. Il suffit de démontrer pour l'idéal $V_2$, avec une constante C indépendante de $\xi_2$ dans $\mathcal{G}_2^*$, l'estimation suivante :

(15) $$\|u\|^2_{H^m_{\xi_2+\xi_3}(S_2)} \leq C[\|\pi_{\xi_2+\xi_3}(P)u\|^2_{L^2(S_2)}]$$

Soit E' le sous-espace de $\mathcal{G}_2^*$ image de $\mathcal{G}$ par l'application : $x \to (\mathrm{ad}\,x)^*\xi_3$ , et désignons par E" un supplémentaire de E' dans $\mathcal{G}_2^*$. Pour tout $\xi_2$ dans $\mathcal{G}_2^*$ , on notera $\xi_2'$ et $\xi_2''$ ses projections sur E' et E". On suppose que (15) est vérifié avec une constante $C(\xi_2)$ dépendant de $\xi_2$. Alors $\xi_2$ et $(0,\xi_2'')$ étant sur la même orbite, $C(\xi_2)$ peut être choisie ne dépendant que de $\xi_2''$. D'après (12), $C(\xi_2'')$ est localement bornée. Le contrôle de $C(\xi_2'')$

lorsque $|\xi_2''|$ tend vers l'infini, résulte des deux inégalités suivantes :

a) Si pour toute représentation unitaire irréductible non triviale $\pi$ de G, égale à l'identité sur $(\exp \mathcal{G}_3)$, $\pi(P)$ est injectif dans $\mathcal{H}_\pi$, alors il existe une constante C strictement positive, telle que, pour tout $\xi_2$ dans $\mathcal{G}_2^*$, tout u dans $\mathcal{S}(S_2)$, on ait :

$$(16) \qquad \|u\|^2_{H^m_{\xi_2+\xi_3}(S_2)} \leq C\left[\|\pi_{\xi_2+\xi_3}(P)u\|^2_{L^2(S_2)} + \|u\|^2_{L^2(S_2)}\right]$$

b) Il existe une constante C strictement positive, telle que, pour tout $\xi_2$ dans $\mathcal{G}_2^*$, tout u dans $\mathcal{S}(S_2)$, on ait :

$$(17) \qquad \|u\|^2_{H^2_{\xi_2+\xi_3}(S_2)} \geq C|\xi_2''|^2 \, \|u\|^2_{L^2(S_2)}$$

<u>3ème étape</u> : On suppose $(\xi_3,\xi_2)$ fixés et on applique l'argument de réduction du paragraphe 4, avec $V = V_2$, $V' = V_1$. Il suffit de démontrer, pour l'idéal $V_1$ avec une constante C indépendante de $\xi_1$ dans $I_1^*$, l'estimation :

$$(18) \qquad \|u\|^2_{H^m_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S_1)} \leq C\left[\|\pi_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(P)\, u\|^2_{L^2(S_1)}\right]$$

Désignons par E' le sous-espace de $I^*$ image de $\mathcal{V}_2^{\perp} \cap \mathcal{G}_1$ par l'application : $x \to (\mathrm{ad}\, x)^*\xi_2$ . Désignons par E" un supplémentaire de E' dans $I^*$. Pour tout $\xi_1$ dans $I^*$, on notera $\xi_1'$ et $\xi_1''$ ses projections sur E' et E". On suppose que (18) est vérifié avec une constante $C(\xi_1)$ dépendant de $\xi_1$. Alors $\xi_1$ et $(0,\xi_1'')$ étant sur la même orbite, on peut supposer que $C(\xi_1)$ ne dépend que de $\xi_1''$. D'après (12), $C(\xi_1'')$ est localement bornée. Le contrôle de $C(\xi_1'')$ lorsque $|\xi_1''|$ tend vers l'infini, résulte d'inégalités du même type que (16) et (17) :

$$(19) \qquad \|u\|^2_{H^m_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S_1)} \leq C\left[\|\pi_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(P)u\|^2_{L^2(S_1)} + \|u\|^2_{L^2(S_1)}\right]$$

où C est indépendant de $\xi_1$

$$(20) \qquad \|u\|^2_{H^4_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S_1)} \geq C\,|\xi_1''|^2\,\|u\|^2_{L^2(S_1)}$$

où C est indépendant de $\xi_1$.

<u>Dernière étape</u> : La proposition (2.2) résulte en fin de compte de la vérification suivante ; $\xi_1,\xi_2,\xi_3$ étant fixés ($|\xi_3|=1$), il existe une constante C telle que, pour tout u dans $\mathcal{S}(S_1)$, on ait :

$$(21) \qquad \|u\|^2_{H^m_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S_1)} \leq C\,\|\pi_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(P)u\|^2_{L^2(S_1)}$$

On part de l'estimation (19) vérifiée pour tout u dans $\mathcal{S}(S_1)$, et on fait les remarques suivantes :

i) $\mathcal{S}(S_1)$ est dense dans $H^m_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S_1)$. L'inégalité (19) est donc vraie pour u dans $H^m_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S_1)$.

ii) Si m est plus grand ou égal à 4, l'injection de $H^m_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S_1)$ dans $L^2(S_1)$ est compacte (cela résulte de l'irréductibilité).

Il résulte alors d'un lemme classique de Peetre et de (19) que $\pi_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(P)$ est d'image fermée dans $L^2$, et que son noyau dans $H^m_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S_1)$ est de dimension finie.

iii) $\mathrm{Ker}\ \pi_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(P) \cap \mathcal{S}(S_1) = \mathrm{Ker}\ \pi_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(P) \cap H^m_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(S_1)$.

Ce point résulte de la condition précédant (18).

Nous n'avons jusqu'à présent utilisé que les hypothèses du théorème, concernant des représentations dégénérées sur $(\exp \mathcal{G}_3)$. L'hypothèse générale du théorème est utilisée maintenant : $\mathrm{Ker}\ \pi_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(P) \cap \mathcal{S}(S_1) = 0$.

(21) se déduit alors du lemme de Peetre et de (iii).

## § 7. EXEMPLE : L'ALGEBRE DE LIE $\mathcal{G}^4$

$\mathcal{G}^4$ est définie par les lois suivantes :

$$[X_1^1, X_1^2] = X_2$$

$$[X_1^1, X_2] = X_3$$

Les autres crochets sont nuls. On a :

$$\left[\begin{array}{l}
\pi_{(o)}(X_1^1) = \dfrac{d}{dx_1^1} - \dfrac{x_1^2}{2}\,\dfrac{d}{dx_2} - \dfrac{1}{3}\,x_1^1 \cdot x_1^2\,\dfrac{d}{dx_3} \\[2ex]
\pi_{(o)}(X_1^2) = \dfrac{d}{dx_1^2} + \dfrac{x_1^1}{2}\,\dfrac{d}{dx_2} + \dfrac{1}{3}(x_1^1)^2\,\dfrac{d}{dx_3} \\[2ex]
\pi_{(o)}(X_2) = \dfrac{d}{dx_2} + x_1^1\,\dfrac{d}{dx_3} \\[2ex]
\pi_o(X_3) = \dfrac{d}{dx_3}
\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}
\pi_{\xi_3,\xi_2}(X_1^1) = \dfrac{d}{dx_1^1} \\[2ex]
\pi_{\xi_3,\xi_2}(X_1^2) = \dfrac{d}{dx_1^2} + i\,x_1^1\,\xi_2 + i\dfrac{(x_1^1)^2}{2}\,\xi_3 \\[2ex]
\pi_{\xi_3,\xi_2}(X_2) = i(\xi_2 + x_1^1 \cdot \xi_3) \\[2ex]
\pi_{\xi_3,\xi_2}(X_3) = i\,\xi_3
\end{array}\right.$$

$I_1$ est l'espace engendré par $X_1^2$ , $S_1$ l'espace engendré par $X_1^1$.

$$\left[\begin{array}{l}
\pi_{\xi_3,\xi_2,\xi_1}(X_1^1) = \dfrac{d}{dx_1^1} \\[2ex]
\pi_{\xi_3,\xi_2,\xi_1}(X_1^2) = i\left[\xi_1 + x_1^1 \cdot \xi_2 + \dfrac{(x_1^1)^2}{2} \cdot \xi_3\right]
\end{array}\right.$$

$$\pi_{\xi_3,\xi_2,\xi_1}(X_2) = i(\xi_2 + (x_1^1)\xi_3)$$

$$\pi_{\xi_3,\xi_2,\xi_1}(X_3) = i\ \xi_3$$

On vérifie aisément que $\pi_{\xi_3,\xi_2,\xi_1}$ est irréductible pour $\xi_3$ non nul, et que $\pi_{\xi_3,\xi_2,\xi_1}$ est unitairement équivalente à $\pi_{\xi_3,0,\xi_1}$. Pour $\xi_3 = 0$, $\xi_2 \neq 0$, $\pi_{0,\xi_2,\xi_1}$ est irréductible et unitairement équivalente à $\pi_{0,\xi_2,0}$.

Enfin, pour $\xi_3 = \xi_2 = 0$, $\pi_{0,0,\xi_1}$ n'est pas irréductible et se décompose en somme directe de représentations scalaires.

Application : Soit $P = \alpha(X_1^1)^2 + \beta(X_1^2)^2 + \gamma X_2$, avec $\alpha,\beta,\gamma$ dans $\mathbb{C}$. Alors P est hypoelliptique, si et seulement si :

i) $\alpha(\xi_1^1)^2 + \beta(\xi_1^2)^2 \neq 0$, pour tout $\xi_1$ non nul

ii)$^\pm$ $\mathrm{Ker}(\alpha D_x^2 + \beta x^2 \pm i\gamma) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = 0$

iii)$^\pm$ Pour tout $\xi$ dans $\mathbb{R}$,

$$\mathrm{Ker}(\alpha D_x^2 + \beta(\xi \pm \frac{x^2}{2})^2 \mp i\gamma x) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = 0$$

---

## BIBLIOGRAPHIE


[1] R. Beals : Opérateurs invariants hypoelliptiques sur un groupe nilpotent. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-77.

[2] R. Beals : Exposé au colloque de Saint-Jean-De-Monts (Juin 1977)

[3] B. Helffer : Hypoellipticité pour des opérateurs différentiels sur des groupes de Lie nilpotents. Publications du C.I.M.E. (1977).

[4] A. A. Kirillov : Unitary representations of Nilpotent Lie groups. Uspehi, Mat. Nauk 17 (1962), 57-110 (Russian Math. Surveys 17 (1962), 53-104).

[5] L.Pukanszky : Leçon sur les représentations des groupes. Dunod (1967).

[6] C. Rockland : Hypoellipticity on the Heisenberg group. Representation Theoretic Criteria (Preprint).

[7] L. P. Rotschild, E. M. Stein : Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. Acta Math. (1977).

[8] F. Trèves : An invariant criterion of hypoellipticity. Amer. Journ. of Math. 83 (1961), p.645-668.