J. M. Trépreau

Problème de Cauchy hyperbolique non strict dans des classes d'ultradistributions

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 3, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A4_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 7 - 1 9 7 8

PROBLEME DE CAUCHY HYPERBOLIQUE NON STRICT DANS DES CLASSES D'ULTRADISTRIBUTIONS

par J. M. TRÉPREAU

Exposé N° III

15 Novembre 1977

§ 1. INTRODUCTION

On désignera par $x = (x_1,\dots,x_n) = (x_1,x')$ le point courant de $\mathbb{R}^n$, par H l'hyperplan d'équation $x_1 = 0$, par $B(0,a)$ (resp. $B'(0,a)$) la boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ (resp. H) de centre 0, rayon $a > 0$. On notera N la direction $(1,0,\dots,0)$ et, pour $\delta > 0$, $K(a,\delta)$ l'enveloppe convexe de $B'(0,a) \cup \{\delta aN\}$.

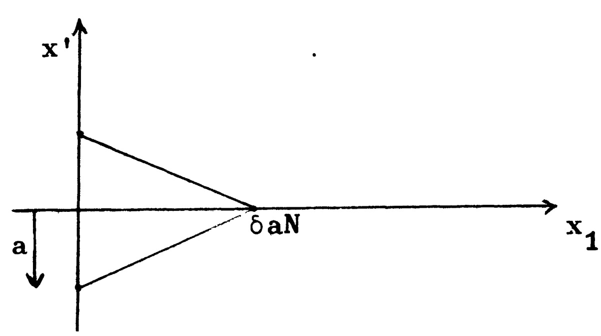
Soit $P(x,\partial_x)$ un opérateur différentiel d'ordre m, à coefficients analytiques, hyperbolique non strict dans la direction N en tout point d'un voisinage V de $\overline{B(0,r)}$ $(r > 0)$. On note :

$$P(x,\partial_x) = \sum_{j=o}^{m} P_j(x,\partial_x)$$

la décomposition de $P(x,\partial_x)$ en polynômes homogènes de degré j en ∂_x, $P_j(x,\partial_x)$. On suppose donc :

$$(1.1) \qquad P_m(x,\xi) = 0, \quad \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}, \; x \in V \Rightarrow \xi_1 \in \mathbb{R}$$

On supposera de plus que le coefficient de ξ_1^m dans $P(x,\xi)$ est identique à 1.



On considère le problème de Cauchy suivant : soit $\delta > 0$ assez petit et $a < r$:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \forall\, f, \text{ définie de "classe } \gamma\text{" au voisinage de } \overline{B'(0,a)} \cup K(a,\delta) \\ \forall\, v^o,\dots,v^{m-1} \text{ définies de "classe } \gamma\text{" au voisinage de } \overline{B'(0,a)} \\ \quad \text{dans H existe-t-il une et une seule} \\ u, \text{ définie de "classe } \gamma\text{" au voisinage de } \overline{B'(0,a)} \cup K(a,\delta) \end{cases}$$

telle que :

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} P(x,\partial_x)u = f \text{ au voisinage de } \overline{B'(0,a)} \cup K(a,\delta) \\ (u,\dots,\partial_{x_1}^{m-1}u)_{|H} = (v^o,\dots,v^{m-1}) \text{ au voisinage de } \overline{B'(0,a)} \text{ dans } H. \end{cases}$$

Si la réponse à ce problème est positive, on dit que le problème (I)-(II) est bien posé dans la classe γ.

On sait que le problème (I)-(II) est en général mal posé dans la classe $\mathcal{C}^\infty$; par contre, si l'on définit pour $1 < \sigma < +\infty$ l'espace des σ-ultrafonctions :

$$(1.2)\qquad \mathcal{G}^\sigma(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega),\ \forall K \subset\subset \Omega,\ \forall h > 0, \\ \exists C_{K,h},\ |\partial_x^\alpha f(x)| \leq C_{K,h}\, h^{|\alpha|}(|\alpha|!)^\sigma,\ x \in K,\ \forall \alpha\}$$

Hörmander (4) a prouvé que le problème (I) - (II) était bien posé dans la classe $\mathcal{G}^\sigma$, pour $1 < \sigma \leq \frac{m}{m-1}$, en supposant $P(x,\partial_x) = P(\partial_x)$ à coefficients constants. Ce résultat a été étendu au cas des coefficients variables assez réguliers par Leray-Ohya (7), Beals (1),..., mais sous des hypothèses très restrictives sur la géométrie des caractéristiques de l'opérateur $P(x,\partial_x)$. Le seul résultat général est dû à Ivrii (5), qui prouve que le problème (I)-(II) est bien posé dans la classe $\mathcal{G}^\sigma$ dès que $1 < \sigma \leq \frac{2M-2}{2M-3}$, où $M \geq 2$ majore la multiplicité maximale des caractéristiques de $P(z,\partial_z)$ dans la direction N, i.e. :

$$(1.3)\qquad P(x,\xi) = \frac{\partial P}{\partial \xi_1}(x,\xi) = \dots = \frac{\partial^M P}{\partial \xi_1^M}(x,\xi) = 0,\ x \in V,\ \xi \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \xi = 0\,.$$

D'autre part, J. M. Bony et P. Schapira (2) ont prouvé que le problème (I) - (II) était bien posé dans la classe $\mathcal{A}$ des fonctions analytiques et dans la classe $\mathcal{B}_N$ des hyperfonctions analytiques dans la direction $\pm N$, au sens du :

<u>Théorème 0</u> : (Bony-Schapira (2)). Si f est une hyperfonction analytique dans la direction $\pm N$, et $(v^o,\dots,v^{m-1})$ un m-uple d'hyperfonctions, le problème (I)-(II) admet une solution unique u, hyperfonction analytique dans la direction $\pm N$.

Nous étudierons ici le problème (I) - (II) dans des classes de σ-ultradistributions ; plus précisément, le sous-espace $\mathcal{G}^\sigma_{comp}(\Omega)$ des σ-

ultrafonctions à support compact dans Ω étant muni d'une structure naturelle d'e.v.t.ℓ.c., on définit l'espace des σ-ultradistributions sur Ω par :

$$\mathcal{U}^{\sigma}(\Omega) = (\mathcal{G}^{\sigma}_{comp}(\Omega))' \qquad 1 < \sigma < +\infty \tag{1.4}$$

Nous notons (H_k), $k \geq 1$ l'hypothèse suivante :

$$(H_k) \ \exists C, \ |\eta|^{ks} \ |P_{m-s}(x,\xi + i\eta N)| \leq C \, |P_m(x,\xi + i\eta N)| \ \forall x \in V \ , \ \xi \in \mathbb{R}^n \ , \ \eta \in \mathbb{R}$$

Nous démontrons alors le :

<u>Théorème 1</u> : Le théorème 0 demeure vrai si l'on y remplace partout "hyperfonction" par "σ-ultradistribution" dès que $1 < \sigma \leq \inf(3/2 \, , \frac{k}{k-1})$.

<u>Remarque 1</u> : Si l'opérateur $P(x,\partial_x)$ vérifie (1.3), il est facile de montrer qu'il vérifie aussi (H_M) ; le problème (I) - (II) est donc bien posé dans la classe $\mathcal{U}^{\sigma}_N$ dès que $1 < \sigma \leq \inf(\frac{3}{2}, \frac{M}{M-1})$. Ce résultat est optimum pour $M \geq 3$. En fait, il est probable que sous l'hypothèse (H_k), le résultat optimum est que le problème (I)-(II) est bien posé dans la classe $\mathcal{U}^{\sigma}_N$, pour $\sigma \leq \inf(2, \frac{k}{k-1})$.

<u>Remarque 2</u> : Les conditions (H_k) (conditions de Lévi) sont des conditions suffisantes, mais évidemment pas nécessaires ; ainsi si $P(\partial_{x_1}, \partial_{x'})$ est un opérateur hyperbolique, l'opérateur hyperbolique non strict $P(\partial_{x_1}, x_1\partial_{x'}) + \partial^{m-1}_{x_2}$ vérifie (H_m) mais pas (H_{m-1}) ; on peut pourtant prouver, en adaptant la démonstration du théorème 1 que le problème (I)-(II) est bien posé dans $\mathcal{U}^{\sigma}_N$ pour $\sigma \leq \frac{(m-1)}{(m-1) - 1}$ (dans le cas de la classe $\mathcal{C}^{\infty}$, cf. Menikoff (8) pour des résultats voisins).

<u>Remarque 3</u> : En utilisant un argument de dualité que m'a communiqué P. Schapira après l'exposé (cf. Schapira (9) pour des considérations voisines) on peut sans doute déduire du théorème 1 un résultat analogue dans les classes $\mathcal{G}^{\sigma}$. Compte-tenu du résultat de Ivrii (5) pour $M = 2$, on obtiendrait alors une généralisation du résultat de Hörmander au cas des coefficients analytiques.

Les résultats exposés ici sont le fruit d'un travail fait sous la direction de / en collaboration avec J. M. Bony ; je le remercie de son soutien constant.

<u>Notations</u> : $\|u\|_K = \sup_{x \in K} |u(x)|$.

$\Gamma' \subset\subset \Gamma \pmod{\mathbb{R}_+}$ signifie que $\Gamma' \cap S^{N-1} \subset\subset \Gamma \cap S^{N-1}$, Γ, Γ' étant des cônes de $\mathbb{R}^N$ et S^{N-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^N$ pour la distance euclidienne. $\mathbb{C}^N$ sera librement identifié à $\mathbb{R}^{2N}$; si $z, \zeta \in \mathbb{C}^N$, on notera :

$$<z,\bar{\zeta}> = \sum_{j=1}^{N} z_i \bar{\zeta}_i \ , \ |z| = <z,\bar{z}>^{1/2} \ , \ <\partial,\bar{\zeta}> = \sum_{j=1}^{N} \bar{\zeta}_i \partial_{z_i}$$

Enfin, la (n-1)-boule de centre z_o, rayon ζ_o, rayon R est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}^N$ tels que $<z,\bar{\zeta}_o> = 0$ et $|z - z_o| < R$.

§ 2. <u>INEGALITES HYPERBOLIQUES</u>

En utilisant une version locale du théorème des tubes de Bochner due à Kashiwara, il est facile de prouver l'existence de $C_h > 0$, $r_o > 0$, telle que $P(x,\xi)$ s'étende holomorphiquement à l'ensemble $\{z, x \in V,\ |y| < r\} \times \mathbb{C}^n$ avec (cf. Bony-Schapira (2)) :

$$\text{(2.1)} \quad \begin{matrix} P_m(z,\zeta) = 0, \ x \in \overline{B(0,r)}, \ y \le r_o \\ \\ \zeta = (\xi_1 + i\eta_1, \xi' + i\eta') \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} |\xi_1| \le C_h(|\mathrm{Im}\, z|\,|\eta'| + |\xi'|) \\ |\zeta_1| \le C_h\, |\zeta'| \\ |\eta_1| \le C_h\ (|\mathrm{Im}\, z|\,|\xi'| + |\eta'| \end{cases}$$

Le résultat essentiel de cette section est alors le suivant :

<u>Théorème 2</u> : On fait l'hypothèse (H_k), $k \ge 1$; pour tout $C'_h > C_h$, il existe C et r'_o telles que :

(2.2) $\forall\ (z,\zeta)$, $x \in \overline{B(0,r)}$, $|y| \le r'_o$, $|\mathrm{Im}\,\zeta_1| > C'_h(|\mathrm{Im}\, z|\,|\mathrm{Re}\,\zeta'| + |\mathrm{Im}\,\zeta'|)$, $|\zeta| = 1$.

(2.3) $|\mathrm{Im}\,\zeta_1|^{ks+|\alpha|}\,|P^{(\alpha)}_{m-s}(z,\zeta)| \le C|P_m(z,\zeta)|$, $s = 0,\dots,m$, $|\alpha| = 0,1,\dots$

Pour démontrer le théorème 2, nous utiliserons le théorème suivant sur la croissance au bord des fonctions holomorphes dans des tubes :

<u>Théorème</u> (Komatsu (6) Th. 11.6) : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un voisinage de Stein de Ω dans $\mathbb{C}^n$, $\Omega = \mathbb{R}^n \cap V$ et Γ un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$; si μ est une fonction positive croissante sur $]0,+\infty[$, ζ un vecteur unitaire de Γ et $F \in \mathcal{O}((\mathbb{R}^n + i\Gamma) \cap V)$ telle que :

$$\forall K \subset\subset \Omega,\ \exists L, C \quad \sup_{x \in K} |F(x+it\zeta)| \leq C\mu\left(\frac{L}{t}\right) \quad \forall\ t > 0 \text{ assez petit}$$

alors, pour tout sous-cône $\Gamma' \subset\subset \Gamma(\text{mod}\ \mathbb{R}_+)$,

$$\forall K \subset\subset \Omega,\ \exists L, C \quad \sup_{x \in K} |F(x+iy)| \leq C\mu\left(\frac{L}{|y|}\right) \ \forall y \in \Gamma',\ |y| \text{ assez petit.}$$

<u>Démonstration du théorème 2</u> : Remarquons d'abord que si F est une fonction holomorphe dans les tubes (2.2), majorée par $C(C_h')|\mathrm{Im}\,\zeta_1|^{-k}$, alors $\frac{\partial F}{\partial \zeta_j}$, $j = 1,\dots,n$ est majorée par $C'(C_h')|\mathrm{Im}\,\zeta_1|^{-k-1}$ (il suffit d'écrire la formule de Cauchy, cf. Hörmander (4) lemme 5.1.3). Or on a :

$$\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_j} P^{(\alpha)}_{m-s}(z,\zeta)\right)P_m(z,\zeta)^{-1} = \frac{\partial}{\partial\zeta_j}\left(\frac{P^{(\alpha)}_{m-s}(z,\zeta)}{P_m(z,\zeta)}\right) + \frac{P^{(\alpha)}_{m-s}(z,\zeta)}{P_m(z,\zeta)^2}\frac{\partial}{\partial\zeta_j}P_m(z,\zeta)$$

Il suffit donc de prouver l'estimation (2.3) pour $|\alpha| = 0$, $s = 1,\dots,m$ et pour $|\alpha| = 1$, $s = 0$. Comme la démonstration de (2.3) pour $|\alpha| = 0$ à partir de l'hypothèse (H_k) est identique à la démonstration de (2.3) pour $s = 0$ et $|\alpha| = 1$, nous nous limiterons à cette dernière.

<u>Lemme 1</u> : $\exists C,\ \forall x \in \overline{B(0,r)},\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \eta \in \mathbb{R},\ j = 1,\dots,n,$

(2.4) $$|\eta|\left|\frac{\partial P_m}{\partial\xi_j}(x,\xi+i\eta N)\right| \leq C|P_m(x,\xi+i\eta N)|$$

<u>Démonstration du lemme 1</u> : On a : $P_m(x,\xi+i\eta N) = \prod_{j=1}^{m}(\xi_1 + i\eta - \lambda_j(x,\xi'))$, où les λ_j sont des fonctions réelles de $(x,\xi') \in \overline{B(0,r)} \times \mathbb{R}^{n-1}$; on en déduit :

$$|\eta|\left|\frac{\partial P_m}{\partial\xi_1}(x,\xi+i\eta N)\right| \leq \sum_{j=1}^{m} |\eta| \prod_{\substack{k=1,\dots,m \\ k\neq j}} |\xi_1 + i\eta - \lambda_k(x,\xi')| \leq m|P_m(x,\xi+i\eta N)|$$

D'autre part, si $j \in \{2,\dots,n\}$, le polynôme $\xi_1' \mapsto P_m(x,\xi_1+\xi_1',\xi_2,\dots\xi_j+\xi_j',\dots,\xi_n)$ admet, pour $\xi_1,\dots,\xi_n$ fixés, m racines $\mu_{(j,\xi),k}(\xi_j')$, $k = 1,\dots,m$, holomorphes au voisinage de 0 (cf. Chaillou (3)); de plus, d'après (2.1), on a :

$$|\mu'_{(j,\xi),k}(0)| = \lim_{y\to 0}\left|\frac{\mu_{(j,\xi),k}(iy) - \mu_{(j,\xi),k}(0)}{iy}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{|\operatorname{Im}\mu_{(j,\xi),k}(iy)|}{|y|} \le C_h$$

On en déduit :

$$|\eta|\left|\frac{\partial P_m}{\partial \xi_j}(x,\xi + i\eta N)\right| \le m\, C_h |P_m(x,\xi+ i\eta N)|,\quad j = 2,\dots,n.$$

<u>Lemme 2</u> : Pour tout $C'_h > C_h$, il existe C et r'_o telles que :

(2.5) $\quad \forall(z,\zeta),\ x\in \overline{B(0,r)},\ |y| \le r'_o,\ |\operatorname{Im}\zeta_1| > C'_h(\operatorname{Im} z|\,|\operatorname{Re}\zeta'| + |\operatorname{Im}\zeta'|),|\zeta|=1$

(2.6) $\quad |\operatorname{Im}\zeta_1|\left|\frac{\partial P_m}{\partial \zeta_j}(z,\zeta)\right| \le C|P_m(z,\zeta)| \quad j = 1,\dots,n.$

<u>Démonstration du lemme 2</u> : On applique le théorème sur la croissance au bord à la fonction $\frac{\partial P_m}{\partial \zeta_j}.P_m^{-1}$, holomorphe dans les tubes définis par (2.1). On obtient l'inégalité (2.6) dans le domaine (2.5) sous l'hypothèse supplémentaire :

$$|\operatorname{Re}\zeta_1| \le M|\operatorname{Re}\zeta'| \ ,\quad |\operatorname{Im}\zeta_1| \le \alpha|\operatorname{Re}\zeta'|,\quad \alpha > 0$$

où M est arbitrairement grand. Mais si $|\operatorname{Re}\zeta_1| > C'_h|\operatorname{Re}\zeta'|$, $P_m(z,\zeta)^{-1}$ est borné dans le domaine (2.5) (N est non caractéristique ; voir aussi (2.1)) car alors $|\zeta_1| > C'_h|\zeta'|$. Enfin, si $|\operatorname{Re}\zeta_1| \le C'_h|\operatorname{Re}\zeta'|$ et $|\operatorname{Im}\zeta_1| > \alpha|\operatorname{Re}\zeta'|$, $|\operatorname{Im}\zeta_1| \ge \alpha'|\zeta|$ $(\alpha' > 0)$ et $P_m(z,\zeta)^{-1}$ est encore borné. D'où le lemme .

§ 3. <u>THEOREME DE CAUCHY-COVALEWSKY PRECISE</u>

Dans cette section, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $P(z,\partial_z)$ un opérateur différentiel d'ordre m, à coefficients holomorphes et bornés sur Ω,

$$(3.1) \qquad P(z,\zeta) = \sum_{j=o}^{m} P_j(z,\zeta)$$

la décomposition de P en polynômes P_j, homogènes de degré j en ζ. Si $\zeta \in S^{2n-1}$, nous noterons :

(3.2) $$\frac{1}{P_m}(\zeta) = \sup_{z\in\Omega} |P_m(z,\zeta)|^{-1} \leq +\infty$$

(3.3) $$\frac{P_s^{(r)}}{P_m}(\zeta) = \sup_{z\in\Omega} \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} |P_s^{(\alpha)}(z,\zeta)||P_m(z,\zeta)|^{-1} \leq +\infty, \; s=0,\dots,m;$$

$r=0,\dots,s.$

<u>Théorème 3</u> : Il existe une constante C_o, ne dépendant que de m et n, telle que, pour toute (n-1)-boule ω de centre z_o, normale ζ_o, rayon $R \leq 1$ et tout ouvert I de $\mathbb{C}$, étoilé par rapport à 0, tels que $\omega_I \subset \Omega$ (où $\omega_I = \{z\in\mathbb{C}^n, \; z = z' + \lambda\zeta_o, \; z'\in\omega, \; \lambda\in I\}$), pour tout m-uple $(u_k)_{k=o,\dots,m-1}$ de fonctions holomorphes et bornées dans ω et toute fonction f holomorphe et bornée dans Ω, il existe une fonction u, holomorphe dans :

(3.4) $$\mathcal{D}(\Omega,P,z_o,\zeta_o,R) = \{z\in\omega_I, \; C_o\left(\frac{P_m^{(r)}}{P_m}(\zeta_o)\right)^{1/r} |z^{(1)}| < R - |z^{(')}|, \; r=1,\dots,m\}$$

solution du problème de Cauchy

(3.5) $$P(z,\partial_z)u = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}(\Omega,P,z_o,\zeta_o,R)$$

(3.6) $$\langle\partial,\bar{\zeta}_o\rangle^j u_{|\omega} = u_j \quad \text{dans } \omega, \; j=0,\dots,m-1$$

de plus, u vérifie l'estimation :

(3.7) $$|u(z)| \leq$$
$$C_o \prod_{r=1}^{m} \left(1 - C_o\left(\frac{P_m^{(r)}}{P_m}(\zeta_o)\right)^{1/r} \frac{|z^{(1)}|}{R-|z^{(')}|}\right)^{-1}.$$
$$\cdot\left(\exp C_o|z^{(1)}| \sum_{\substack{s=1,\dots,m\\ r\leq m-s}} \left(\frac{P_{m-s}^{(r)}}{P_m}(\zeta_o)\left(\frac{|z^{(1)}|}{(R-|z^{(')}|)}\right)^r\right)^{1/s}\right).$$
$$\cdot\left(\sum_{\mu=o}^{m} \frac{|z^{(1)}|\|u_\mu\|_\omega}{\mu!} + \frac{1}{P_m}(\zeta_o)|z^{(1)}|^m\|f\|_\Omega\right)$$

où $z^{(1)} = \langle z-z_o,\bar{\zeta}\rangle\zeta$ et $z^{(')} = z - z_o - z^{(1)}\zeta$.

On en déduit un théorème de prolongement avec croissance d'une solution au travers d'une surface non caractéristique (cf. Zerner (10)).

Théorème 4 : Il existe une constante C_o, ne dépendant que de m et n, telle que, pour toute n-boule Ω_R de rayon $R \leq 1$, et tout ouvert I de $\mathbb{C}$, étoilé par rapport à 0, tels que $\Omega_{R,I} \subset \Omega$ (où $\Omega_{R,I} = \{z + \lambda\zeta,\ z \in \Omega_R,\ \lambda \in I,\ \zeta \in S^{2n-1}\}$), pour toute fonction u (resp. f) holomorphe et bornée dans Ω_R (resp. Ω), pour tout $z_o \in \partial\Omega_R$, u se prolonge holomorphiquement au voisinage de $[z_o, z_o + \tau_o\zeta_o[$, ζ_o étant la normale unitaire sortante en z_o à $\partial\Omega_R$, dès que

$$(3.8) \qquad z_o + \tau_o\zeta_o \in \Omega_{R,I} \quad \text{et} \quad C_o\left(\frac{P_m^{(r)}}{P_m}(\zeta_o)\right)^{1/r} \tau_o^{1/2} \leq R^{1/2}, \quad r = 0, \dots, m$$

de plus, u vérifie l'estimation :

$$(3.9) \qquad \sup_{z \in [z_o, z_o + \tau_o\zeta_o[} |u(z)| \leq$$

$$C_o\left[\exp C_o\,\tau_o \sum_{\substack{s=1,\dots,m \\ r \leq m-s}} \left(\frac{P_{m-s}^{(r)}}{P_m}(\zeta_o)\left(\frac{\tau_o}{R}\right)^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{s}}\right]\left(\|u\|_{\Omega_R} + \frac{1}{P_m}(\zeta_o)\tau_o^m\|f\|_\Omega\right)$$

Démonstration du théorème 4 : On peut supposer $\frac{1}{P_m}(\zeta_o) < +\infty$, sinon le théorème est vide. Soit alors τ_o vérifiant (3.8) avec C_o plus grand que deux fois la constante du théorème 3.

Soit H_{τ_o} l'hyperplan d'équation $\langle z - z_o, \bar{\zeta}_o\rangle = -\tau_o$ et ω_{τ_o} la (n-1)-boule de centre $z_o - \tau_o\zeta_o$, de normale ζ_o, rayon $\frac{R^{1/2}\tau_o^{1/2}}{2}$; tout point de ω_{τ_o} est à une distance supérieure à $\frac{\tau_o}{2}$ de $\complement\Omega_R$, et donc (cf. Hörmander (4), Lemme 5.1.3)

$$(3.10) \qquad \|\langle\partial, \zeta_o\rangle^k u\|_{\omega_{\tau_o}} \leq k!\,(2e)^k \|u\|_{\Omega_R}\, \tau_o^{-k}$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème 3, pour obtenir le théorème 4, avec C_o assez grand.

§ 4. DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Si Γ est un cône de $\mathbb{R}^n$, nous noterons $\Gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ l'ensemble des $y\in\Gamma$, $\varepsilon_1 \le |y| \le \varepsilon_2$; nous utiliserons la caractérisation suivante des σ-ultradistributions : si $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega + i\Gamma_{o,\alpha})(\alpha > 0)$ vérifie l'estimation :

$$(4.1) \qquad \forall\, K \subset\subset \Omega,\ \Gamma' \subset\subset \Gamma \text{ mod. } \mathbb{R}_+,\ \exists L, \alpha_1 > 0,\ \sup_{\substack{x\in K \\ y \in \Gamma_{\varepsilon,\alpha_1}}} |\tilde{f}(x+iy)| \le \exp \frac{L}{\varepsilon^{\frac{1}{\sigma-1}}}$$

$$\forall\, 0 < \varepsilon \le \alpha_1$$

alors sa valeur au bord $b(\tilde{f})$ est une σ-ultradistribution sur Ω (Komatsu (6)) ; réciproquement, on peut montrer que si $f = \sum_{j=o}^{N} b(\tilde{f}_j)$, où $\tilde{f}_j \in \mathcal{O}(\Omega + i\Gamma^j_{o,\alpha})$ est une σ-ultradistribution, il existe une décomposition $f = \sum_{j=o}^{N} b(\tilde{g}_j)$, où $\tilde{g}_j \in \mathcal{O}(\Omega + i\Gamma^j_{o,\alpha_1})$ vérifie l'estimation (4.1).

Compte-tenu de l'analyticité de f dans les directions $\pm N$, et par linéarité, le théorème 1 résulte facilement du lemme suivant :

__Lemme 1__ : Soit $a_1 < a < r$ et $\delta' < \delta < C_h^{-1}(1+3r)^{-1}$; soit Γ (resp. Γ') un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$, de révolution d'axe $\gamma \in S^{n-2}$, de demi-angle $\frac{\pi}{4}$), avec $\Gamma' = \Gamma \cap \{x_1 = 0\}$, V (resp V') un voisinage de $\overline{B'(0,a)} \cup K(a,\delta)$ (resp. de $\overline{B'(0,a)}$ dans H) ; soit

$$(4.2) \qquad \tilde{f} \in \mathcal{O}(V + i\Gamma_{o,\alpha}),\ \|\tilde{f}\|_{V+i\Gamma_{\varepsilon,\alpha}} \le \exp L/\varepsilon^{\frac{1}{\sigma-1}} \quad \forall\, 0 < \varepsilon \le \alpha$$

$$(4.3) \qquad \tilde{v}_j \in \mathcal{O}(V' + i\Gamma'_{o,\alpha}),\ \|\tilde{v}_j\|_{V'+i\Gamma_{\varepsilon,\alpha}} \le \exp L/\varepsilon^{\frac{1}{\sigma-1}} \quad \forall\, 0 < \varepsilon \le \alpha$$

Il existe une fonction $\tilde{u} \in \mathcal{O}(V(\delta') + i\Gamma_{o,\alpha^1}(\delta'))$, où $V(\delta')$ est un voisinage de $\overline{B'(0,a_1)} \cup K(a_1,\delta')$, $\Gamma(\delta')$ un sous-cône ouvert convexe non vide de Γ, $\alpha^1 > 0$, solution du problème :

(*) $\qquad P(z,\partial_z)\tilde{u} = \tilde{f} \qquad (\tilde{u},\partial_{z_1}\tilde{u},\ldots,\partial_{z_1}^{m-1}\tilde{u})_{|H} = (\tilde{v}_o,\ldots,\tilde{v}_{m-1})$

et vérifiant l'estimation

(4.4) $$\|\tilde{u}\|_{V(\delta')+i\Gamma_{\varepsilon,\alpha^1}(\delta')} \leq \exp L(\delta')/\frac{1}{\varepsilon^{\sigma-1}} \qquad \forall\ 0 < \varepsilon \leq \alpha^1$$

dès que $\sigma \leq \inf(\frac{3}{2}, \frac{k}{k-1})$.

Dans la suite, nous faisons toutes les hypothèses du lemme 1, sauf celle sur σ. Soit $\rho \leq 2$ assez grand ($\rho = 2$ par exemple !), η et k des réels positifs fixés à choisir ; pour $a > 0$ et $0 < \varepsilon < \alpha$, on définit :

(4.5) $$B'_a(\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}^n,\ \frac{x_1^2}{k^2\varepsilon^2} + \frac{y_1^2}{\eta^2\varepsilon^2} + \frac{x'^2}{a^2} + \frac{(y'-\rho\varepsilon\gamma)^2}{\varepsilon^2} < 1\}$$

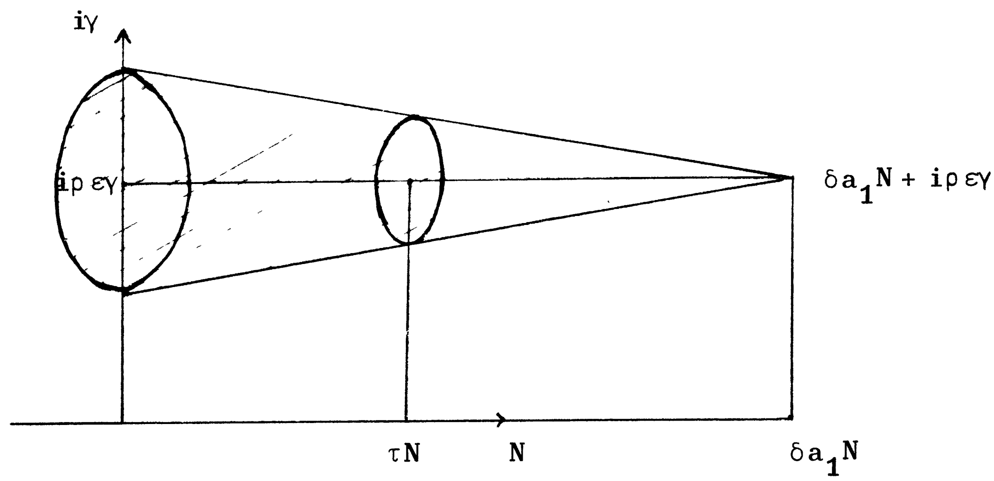
(4.6) $$G(\varepsilon) = V + i\Gamma_{\varepsilon,\alpha}$$

si l'on choisit ρ assez grand, k et η assez petit, il est facile de prouver que $B'_a(2\varepsilon)$ est contenu dans $G(\varepsilon)$, $\forall\ 0 < \varepsilon \leq \alpha'$ ($\alpha' > 0$) et, en utilisant le théorème de Cauchy-Covalewsky précisé ; le

<u>Lemme 2</u> : Le problème (*) admet une solution $\tilde{u}$, holomorphe dans $\bigcup_{o<\varepsilon<\alpha''} B'_{a_1}(\varepsilon)$, et vérifiant l'estimation :

(4.7) $$\|\tilde{u}\|_{B'_{a_1}(\varepsilon)} \leq \exp L'/\frac{1}{\varepsilon^{\sigma-1}} \qquad \forall\ 0<\varepsilon\leq\alpha''\ .$$

On note $\Omega_{\delta a_1}(\varepsilon,\delta a_1)$ l'enveloppe convexe de $B'_{a_1}(\varepsilon) \cup \{\delta a_1 N + i\rho\varepsilon\gamma\}$, et pour $0 \leq \tau \leq \delta a_1$, $\Omega_{\delta a_1}(\varepsilon,\tau)$ l'enveloppe convexe de $B'_{a_1}(\varepsilon) \cup \mathcal{H}_\tau^\varepsilon(B'_{a_1}(\varepsilon))$, $\mathcal{H}_\tau^\varepsilon$ étant l'homothétie de centre $\delta a_1 N + i\rho\varepsilon\gamma$ qui amène $i\rho\varepsilon\gamma$ sur $\tau N + i\rho\varepsilon\gamma$.



<u>Lemme 3</u> : $\tilde u$ se prolonge holomorphiquement à $\bigcup_{0<\varepsilon\le\alpha''} \Omega_{\delta a_1}(\varepsilon,\delta a_1)$ et vérifie l'estimation

(4.8) $$\|\tilde u\|_{\Omega_{\delta a_1}(\varepsilon,\delta' a_1)} \le \exp\left(L(\delta')\left(\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon^{k-1}}\right)\right)\left(\|\tilde u\|_{B'_{a_1}(\varepsilon)} + \|\tilde f\|_{G(\varepsilon)}\right), 0<\varepsilon\le\alpha''$$

<u>Démonstration du lemme 1</u> : La seule chose à vérifier est (4.4), qui résulte de (4.8), (4.7) et (4.2) dès que $\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \le \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\sigma-1}}}$, donc

$\sigma \le \inf(3/2, \frac{k}{k-1})$.

Le lemme 3 résulte immédiatement du

<u>Lemme 4</u> : Si $\tilde u$ est définie et holomorphe dans $\Omega_{\delta a_1}(\varepsilon,\tau)$, $\tau + d\tau \le \delta' a_1$ et $d\tau \le \gamma(\delta')\varepsilon^2$, $\tilde u$ se prolonge holomorphiquement à $\Omega_{\delta a_1}(\varepsilon,\tau+d\tau)$, et l'on a :

(4.9) $$\|\tilde u\|_{\Omega_{\delta a_1}(\varepsilon,\tau+d\tau)} \le C_o \exp\left(L^1(\delta')\frac{d\tau}{\varepsilon^{k-1}}\right)\left(\|\tilde u\|_{\Omega_{\delta a_1}(\varepsilon,\tau)} + \|\tilde f\|_{G(\varepsilon)}\right), 0<\varepsilon\leqslant\alpha''$$

<u>Démonstration du lemme 4</u> : On note $\Gamma(\varepsilon,\tau)$ la frontière de $\Omega_{\delta a_1}(\varepsilon,\tau)$ dans $\Omega_{\delta a_1}(\varepsilon,\delta a_1)$, et si $z \in \Gamma(\varepsilon,\tau)$, $\zeta_z = \xi^1_z,\xi'_z) + i(\eta'_z,\eta'_z)$ la normale en z à $\Gamma(\varepsilon,\tau)$. Si $\tau + d\tau \le \delta' a_1$, il est facile de prouver les résultats suivants :

soit $z \in \Gamma(\varepsilon,\tau)$; alors

i) z est point-frontière d'une boule de rayon $\rho(\delta')\varepsilon$, contenue dans $\Omega_{\delta a_1}(\varepsilon,\tau)$.

ii) si $\delta < C_h^{-1}(1+3r)^{-1}$, $|\xi_z^1| \geq C_h'(|\operatorname{Im} z||\eta_z'| + |\xi_z'|)$, $C_h' > C_h$; en particulier, la direction ζ_z est non caractéristique pour l'opérateur $P(z,\partial z)$.

iii) $|\xi_z^1| \geq \rho(\delta')\varepsilon$

iv) si $d\tau \leq \rho(\delta')\varepsilon^2$, alors $z + d\tau\,|\xi_z^1|\zeta_z \in \complement\Omega_{\delta a_1}(\varepsilon,\tau+d\tau)$

Dans i,...,iv, $\rho(\delta')$ est indépendant de ε, $0 < \varepsilon \leq \alpha''$. Soit u une solution holomorphe du problème (*) dans $\Omega_{\delta a_1}(\varepsilon,\tau)$ et $z \in \Gamma(\varepsilon,\tau)$; compte-tenu du théorème 4, on a :

(4.10) $$\text{si } C_o\left(\frac{P_m^{(r)}}{P_m}(\zeta_z)\right)^{1/r} d\tau^{1/2}\,|\xi_z^1|^{1/2} \leq \rho(\delta')^{1/2}\varepsilon^{1/2},\quad r=0,\dots,m$$

alors $\tilde{u}$ se prolonge holomorphiquement au voisinage de $[z, z+d\tau\,|\xi_z^1|\zeta_z|]$ et vérifie l'estimation :

(4.11) $$\|\tilde{u}\|_{[z,z+d\tau|\xi_z^1|\zeta_z]} \leq C_o(\|\tilde{u}\|_{\Omega_{\delta a_1}(\varepsilon,\tau)} +$$
$$+ \frac{1}{P_m}(\zeta_z)(d\tau|\xi_z^1|)^m\|\tilde{f}\|_{G(\varepsilon)} \exp C_o\, d\tau|\xi_z^1| \sum_{\substack{s=1\\ r\leq m-s}}^{m}\left[\frac{P_{m-s}^{(r)}}{P_m}(\zeta_z)\left(\frac{d\tau|\xi_z^1|}{\varepsilon\rho(\delta)}\right)^{r/2}\right]^{1/s}.$$

D'après le théorème 2, compte tenu de ii, on a :

$$\forall z \in \Gamma(\varepsilon,\tau),\ \left(\frac{P_m^{(r)}}{P_m}(\zeta_z)\right)^{1/r} \leq C|\xi_z^1|^{-1},\quad \frac{P_{m-s}^{(r)}}{P_m}(\zeta_z) \leq C|\xi_z^1|^{-ks-r}$$

On a donc le même résultat que ci-dessus en remplaçant (4.10) et (4.11) respectivement par

(4.10)' $$\text{si } C_o C\, d\tau^{1/2} \leq \rho(\delta')^{1/2}\varepsilon^{1/2}\,|\xi_z^1|^{1/2}$$

$$(4.11)' \quad \|\tilde u\|_{[z,z+d\tau|\xi_z^1|\zeta_z]} \leq C_o(\|\tilde u\|_{\Omega_{\delta a_1}}(\varepsilon,\tau) + Cd\tau\|\tilde f\|_{G(\varepsilon)} \cdot$$

$$\cdot \exp C_o \frac{d\tau}{|\xi_z^1|^{k-1}} \sum_{\substack{s=1\\ r\leq m-1}}^{m} C^{1/s} \left(\frac{d\tau}{\varepsilon\rho(\delta')|\xi_z^1|}\right)^{r/2s}$$

$$\leq C_o(\exp C'(\delta')\frac{d\tau}{|\xi_z^1|^{k-1}})(\|\tilde u\|_{\Omega_{\delta a_1}}(\varepsilon,\tau) + Cd\tau\|\tilde f\|_{G(\varepsilon)})$$

Compte-tenu de iii, si $d\tau \leq \gamma(\delta')\varepsilon^2$, (4.10)' est vérifiée pour tout point z de $\Gamma(\varepsilon,\tau)$, et donc, compte tenu de iv et (4.11)', $\tilde u$ se prolonge holomorphique à $\Omega_{\delta a_1}(\varepsilon,\tau+d\tau)$ avec l'estimation :

$$(4.11)'' \quad \|\tilde u\|_{\Omega_{\delta a_1}}(\varepsilon,\tau+d\tau) \leq C_o \exp (L^1(\delta')\frac{d\tau}{\varepsilon^{k-1}})(\|\tilde u\|_{\Omega_{\delta a_1}}(\varepsilon,\tau) + \|\tilde f\|_{G(\varepsilon)} \cdot$$

cqfd.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Beals : Hyperbolic equations and systems with multiple characteristics. Arch. Rational. Mech. Anal. 48 (1972) 123-152.

[2] J. M. Bony, P. Schapira : Problème de Cauchy, existence et prolongement pour les hyperfonctions solutions d'équations hyperboliques non strictes, C. R. Acad. Sc. Paris 274 (1972), 188-191.

[3] J. Chaillou : Les polynômes différentiels hyperboliques et leurs perturbation singulières , Gauthier-Villars.

[4] L. Hörmander : Linear partial differential operators, Springer, 1963.

[5] J.U. Ivrii : Correctness of the Cauchy problem in Gevrey classes for non strictly hyperbolic operators, Math. USSR Sbornik Vol.25 (1975) n° 3.

[6] Y . Komatsu : Ultradistributions I : Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I. A, 20 (1973) 25-105.

[7] J. Leray, M. Ohya : Systèmes linéaires hyperboliques non stricts. Colloque sur l'analyse fonctionnelle, Liège 1964, CBRM pp.105-144.

[8] A. Menikoff : The Cauchy problem for weakly hyperbolic equations Amer. Jour. of Maths (1973).

[9] P. Schapira : Theorème d'unicité de Holmgren et operateurs hyperboliques dans l'espace des hyperfonctions, Ann. Acad. Brasil, Ciênc (1971), 43 (1).

[10] M. Zerner : Domaine d'holomorphie des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles, C. R. Acad. Sc. Paris, 272 (1971) 1646-1648.