SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L. TARTAR

Équations hyperboliques non linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 18, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A19_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 7 - 1 9 7 8

EQUATIONS HYPERBOLIQUES NON LINEAIRES

par L. TARTAR

Exposé n° XVIII

23 Mai 1978

O. INTRODUCTION

De nombreux problèmes de la mécanique des milieux continus et de la physique sont modélisés par des systèmes hyperboliques non linéaires. Une première étape a été de considérer des problèmes linéarisés ce qui a fourni quelques modèles classiques : équation des ondes, de l'élasticité, de Maxwell ; la seconde étape de l'étude des équations complètes s'est heurtée à de nombreuses difficultés qui sont loin d'être surmontées à l'heure actuelle.

La première difficulté provient de l'apparition de singularités (chocs) même si les données initiales sont très régulières ; comme l'existence d'un phénomène physique modélisé par ces équations conduit à ne s'intéresser qu'à l'existence globale en temps (le seul phénomène intéressant de ces équations réside dans la propagation et l'interaction des chocs, la théorie linéarisée expliquant bien ce qui se passe là où la solution est régulière) on est donc conduit à accepter les solutions discontinues.

La deuxième difficulté provient de la non unicité du problème de Cauchy dans la classe des solutions discontinues ; dans certains cas la physique (la thermodynamique en général) rajoute des conditions, dites conditions d'entropie, que doivent satisfaire les solutions "physiques" ; dans le cas général, la situation n'est pas très claire et on ne peut considérer qu'on a résolu le problème que si on a réussi à montrer l'existence globale et l'unicité ainsi qu'une certaine continuité (on cherche un semi-groupe $u_o \to S(t)u_o$ qui à la donnée initiale associe la solution au temps $t > 0$ et on demande, pour certaines topologies la continuité en t et u_o et la propriété de semi-groupe : $S(t)S(s) = S(t+s)$ et $S(0) = I$).

La troisième difficulté provient du fait que, même après avoir introduit les conditions d'entropie, on ne sait pas (ou très difficilement dans certains cas) obtenir d'estimations a priori sur la solution.

Après un bref survol des méthodes classiques, on esquisse une nouvelle approche qui demande moins d'estimations a priori.

1. LE MODELE DE LA DYNAMIQUE DES GAZ

On note ρ la masse volumique, p la pression, e l'énergie interne par unité de masse et u la vitesse d'un gaz non visqueux. Les équations qui décrivent le comportement du gaz sont alors les suivantes (équations d'Euler)

(1) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0$ conservation de la masse

(2)$_i$ $\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} p = 0$ conservation de la quantité de mouvement.

(3) $\frac{\partial}{\partial t}(\rho e + \frac{1}{2}\rho |u|^2) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}((\rho e + \frac{1}{2}\rho |u|^2)u_j) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(p u_j) = 0$

conservation de l'énergie.

[Chaque gaz possède une loi d'état qui relie ρ, p et e]

Si on linéarise au voisinage de ρ_o, e_o et $u_o = 0$ on obtient le système

(4)
$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_o \operatorname{div} u = 0 \\ \rho_o \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \rho}\Big|_o \operatorname{grad} \rho + \frac{\partial p}{\partial e}\Big|_o \operatorname{grad} e = 0 \\ \rho_o \frac{\partial e}{\partial t} + p_o \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

d'où on peut éliminer u pour obtenir un système en ρ, e :

(5)
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial \rho}\Big|_o \Delta\rho - \frac{\partial p}{\partial e}\Big|_o \Delta e = 0 \\ \frac{\partial e}{\partial t} - \frac{p_o}{\rho_o^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Les vitesses caractéristiques sont 0 et $c = (\frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial p}{\partial e})^{1/2}$

(c est la vitesse du son). La thermodynamique pose

(6) $$de = -p\, d\left(\frac{1}{\rho}\right) + T\,dS$$

où T est la température (> 0) et S l'entropie par unité de masse ; on voit alors que la seconde équation de (5) se réécrit

(7) $$\frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Comme on postule que ρ et S peuvent être prises comme variables indépendantes on a alors la formule

(8) $$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}\Big|_{S \text{ fixé}} \quad .$$

Dans le cas où S reste constant $= S_o$ l'équation (5) donne alors $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c^2 \Delta\rho = 0$ et on voit après quelles manipulations on a pu extraire l'équation des ondes du système (1)(2)$_i$ (3).

[Pour ce qui est de l'acoustique, ces approximations sont justifiées, la vitesse du son dans l'air (à température et pression dites ordinaires) étant de l'ordre de 300m/s ; les phénomènes non linéaires deviennent importants quand on s'intéresse à des vitesses de l'ordre de celle du son ce qui est le cas dans l'aviation. Même pour une vitesse de croisière subsonique des ondes de chocs apparaissent (mais restent attachées à l'avion) du fait que dans la dépression située au-dessus de l'aile la vitesse du son est plus faible et peut être inférieure à la vitesse de l'avion. Le calcul de ces ondes de chocs, si on savait le faire avec précision, fournirait des éléments appréciables sur la forme à donner à l'avion pour augmenter la portance, diminuer la trainée, réduire la consommation de carburant, diminuer le bruit, réduire la turbulence dans le sillage etc... On n'en est pas là ; l'expérimentation en soufflerie alliée à l'intuition des aérodynamiciens est encore la méthode la plus efficace].

Revenons au système non linéaire. <u>Si la solution est régulière</u> alors de (6) on déduit

(9) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho S u_j) = 0 \qquad \text{(cas régulier)}$$

c'est-à-dire la conservation de l'entropie. Mais la solution ne sera pas toujours régulière et les discontinuités font apparaître des phénomènes irréversibles qui font augmenter l'entropie (c'est la thermodynamique qui le dit) et on doit avoir

$$(10) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\, S u_j) \geq 0 \;.$$

Evidemment à partir du moment où on accepte des fonctions discontinues il est important de prendre toutes les équations (1) $(2)_i$ (3) (10) au sens des distributions et de supposer que toutes les fonctions qui interviennent sont localement intégrables pour pouvoir définir des produits (qu'on suppose aussi localement intégrables). Notons enfin que la physique impose $\rho \geq 0$, mais que le cas $\rho = 0$ est possible (phénomène de cavitation).

[En fait le caractère non visqueux du gaz est une approximation (peut être excessive), les équations de la mécanique des milieux continus étant

$$(1) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0$$

$$(2)'_i \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}$$

$$(3)' \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho e + \frac{1}{2}\rho |u|^2) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}((\rho e + \frac{1}{2}\rho |u|^2) u_j) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\sum_i \sigma_{ij} u_i) .$$

Les équations de Navier-Stokes correspondent à $\sigma_{ij} = \nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - p\delta_{ij}$

où ν est un paramètre de viscosité > 0 (qui donne un caractère parabolique partiel aux équations) ; les équations d'Euler correspondent alors à $\nu = 0$. Le fait de faire tendre ν vers 0 fait apparaître un comportement "turbulent" des solutions et rien ne prouve que les équations d'Euler soient un bon modèle à petite viscosité ; cela pourrait expliquer les difficultés énormes qu'on rencontre dans l'étude de (1) $(2)_i$ (3) quand on applique la méthode de viscosité] .

2. CADRE GENERAL

On ne s'intéresse qu'aux équations sous forme conservative , c'est-à-dire de la forme

(11) $$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(U) \qquad \text{où } U = (u_1, \ldots, u_p) \text{ et } F_j : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$$

(pour arriver à définir des solutions faibles discontinues il faut éviter des termes du type $\sigma(U) \frac{\partial U}{\partial x_j}$).

Définition 1 : Le système (11) est hyperbolique si $\forall \lambda\ |\lambda| = 1$ la matrice $\sum_j \lambda_j F'_j(U)$ a ses valeurs propres réelles et est diagonisable, hyperbolique strict si les valeurs propres sont réelles distinctes. ■

Avec cette définition le système (1) $(2)_i$ (3) est hyperbolique si $\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s \geq 0$, les valeurs propres étant u (multiplicité 3) et $u \pm c$

Définition 2 : Une entropie du système (11) est une fonction réelle φ définie sur $\mathbb{R}^p$ telle qu'il existe des fonctions ψ_j (flux d'entropie) vérifiant

(12) $$\varphi'(U) F'_j(U) = \psi'_j(U) \qquad \forall U, j \qquad ■$$

Alors si U est une solution régulière de (11) elle vérifie

(13) $$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(U) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_j(U) = 0$$

On voit que pour le système (1) $(2)_i$ (3) S (qui ne dépend pas de u) est une entropie. En général (12) contient trop d'équations et il n'y a pas de solution non triviale pour φ (c'est-à-dire non affine). Il faut toutefois noter que tous les exemples connus de la physique possèdent une entropie, qui de plus est strictement convexe (ce n'est donc pas une restriction grave pour les applications de se restreindre aux systèmes possédant une entropie strictement convexe).

Il n'y a pas en général unicité pour le problème de Cauchy dans la classe des solutions faibles ; même avec U_o constant on peut quelquefois exhiber une infinité de solutions faibles. Pour éliminer ces solutions parasites on est amené à proposer certaines restrictions sur la solution : ces règles sont obtenues par analogie avec les exemples physiques que l'on connaît et portent le nom général de conditions d'entropie.(En fait rien ne prouve que ces règles soient bonnes).

S'il existe une entropie strictement convexe, on est amené à imposer (Lax)

$$\text{(14)} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\varphi(U) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_j(U) \leq 0 \ .$$

La motivation la plus simple de (14) est liée à la méthode de viscosité : si on considère

$$\text{(15)}_\varepsilon \qquad \frac{\partial}{\partial t} U_\varepsilon + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(U_\varepsilon) - \varepsilon \Delta U_\varepsilon = 0$$

et si, grâce à des majorations a priori (qu'on ne sait pas obtenir) on pouvait déduire que $U_\varepsilon \to U$ presque partout alors U vérifierait (11) et (14) .

[Mais, on pourrait au lieu du terme $-\varepsilon \Delta U_\varepsilon$, proposer $-\varepsilon \Delta M U_\varepsilon$ avec M définie positive et alors la condition obtenue ne serait plus (14)]

Un autre critère (introduit aussi par Lax) peut être utilisé même s'il n'y a pas de fonction entropie. Quelques notations sont nécessaires :

On se place en une variable d'espace pour le système $\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) = 0$ qu'on suppose hyperbolique strict et on ordonne les valeurs propres de $F'(U)$ par $\lambda_1(U) < \ldots < \lambda_p(U)$ auxquelles on associe les vecteurs propres $r_k(U)$.

<u>Définition 3</u> : Le kème-champ caractéristique $\lambda = \lambda_k(U)$ est linéairement dégénéré si

$$r_k \cdot \operatorname{grad} \lambda_k \equiv 0 \qquad \forall U \qquad \blacksquare$$

<u>Définition 4</u> : Le kème-champ caractéristique est vraiment non linéaire (genuinely non linear) si

$$r_k \cdot \operatorname{grad} \lambda_k \neq 0 \qquad \forall U \qquad \blacksquare$$

Définition 5 : Une fonction $z(U)$ est un k-invariant de Riemann si $r_k \cdot \mathrm{grad}\, z \equiv 0$. ■

On considère une solution discontinue

(16)
$$U(x,t) = \begin{cases} a & \text{si } X < X_0 + st \\ b & \text{si } X > X_0 + st \end{cases}$$

C'est une solution faible si la condition suivante (Rankine Hugoniot) est satisfaite :

(17)
$$F(b) - F(a) = s(b-a)$$

Alors la règle est de n'accepter que les discontinuités du type suivant :

(18)
$$\begin{cases} \text{discontinuité de contact : le kème-champ est linéairement dégénéré} \\ \text{et on a} \\ \qquad \lambda_k(a) = s = \lambda_k(b) \end{cases}$$

(19)
$$\begin{cases} \text{k-choc : le kème-champ est vraiment non linéaire et on a} \\ \lambda_{k-1}(a) < s < \lambda_k(a) \\ \lambda_k(b) < s < \lambda_{k+1}(b) \end{cases}$$

Sur les exemples connus si a et b sont voisins les deux critères sont les mêmes.

3. LA METHODE DE GLIMM

Les seuls résultats qu'on possède pour les systèmes sont issus d'une méthode due à Glimm. On considère le cas d'une variable d'espace et on suppose que chaque champ caractéristique est ou bien linéairement dégénéré ou bien vraiment non linéaire .

Soit $c \in \mathbb{R}^p$ alors si $\|U_0 - c\|_{L^\infty}$ + Variation U_0 assez petit $\exists K$ et une solution faible définie pour $t \geq 0$ vérifiant :

$$(20)\quad \begin{cases} \|U(t) - c\|_{L^\infty} \leq K\|U_o - c\|_{L^\infty} \\ \text{Variation } U(t) \leq K \text{ Variation } U_o \\ \|U(t_1) - U(t_2)\|_{L^1} \leq K|t_1 - t_2| \text{ Variation de } U_o . \end{cases}$$

La solution U est obtenue comme limite de fonctions qui sont dans chaque bande $n\Delta t < t < (n+1)\Delta t$, solution de l'équation avec des discontinuités du type (18) , (19) .

La méthode consiste d'abord à étudier le problème de Riemann , c'est-à-dire le cas où

$$(21)\qquad U_o(X) = \begin{cases} a & \text{pour } X < 0 \\ b & \text{pour } X > 0 \end{cases}$$

Pour des raisons d'invariance on cherche la solution de la forme $U(\frac{X}{t})$ où les discontinuités de U doivent être du type (18) (19) . Si a et b sont assez voisins on montre l'existence et l'unicité d'une telle solution et on peut obtenir des estimations fines (nécessaires pour la suite) sur la variation de la solution (qu'on mesure en terme de saut des invariants de Riemann).

On approche la donnée initiale par une fonction en escalier ; on résout explicitement chacun des problèmes de Riemann locaux et on choisit Δt assez petit pour que les solutions n'interagissent pas (il y a propagation à vitesse finie).

A l'instant Δt la solution n'est plus constante par morceaux et on la remplace par une fonction en escalier en prenant la valeur en des points bien choisis, c'est-à-dire au hasard suivant une loi équi distribuée.

On génère ainsi une approximation, qui en fait va être définie pour tout $t \geq 0$ grâce aux majorations qu'on obtient.

Le point délicat est de majorer la variation totale de l'approximation. Cela équivaut à étudier l'interaction des chocs entre eux. Malheureusement la variation totale (telle qu'on la mesure, mais il y a peut être mieux à faire) ne décroit pas en fonction du temps. En effet certaines interactions se font avec un accroissement de la variation totale. L'astuce consiste à remarquer que ces mauvaises interactions se font entre chocs de familles différentes et que leur nombre peut être prévu à l'avance. La fonctionnelle de Glimm est alors obtenue en rajoutant à la somme des sauts la somme des produits des sauts de chocs devant donner une mauvaise interaction ; après des calculs très longs où les estimations fines sur le problème de Riemann sont nécessaires on montre que cette fonctionnelle décroit avec le temps ce qui donne une majoration de la variation totale.

4. LE CAS SCALAIRE

C'est le seul cas où on sache montrer que la méthode de viscosité converge. Les résultats initiaux de Oleinik ont été amélioré par Krushkov.

On veut étudier l'équation (en une seule variable d'espace pour alléger les notations)

$$(22) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \\ u(x,0) = v(x) \end{cases}$$

et on cherche à définir un semi-groupe solution dans un espace adéquat

$$(23) \qquad u(t) = S(t)v$$

Pour cela on régularise (22) en

$$(24)_\varepsilon \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} f(U_\varepsilon) - \varepsilon \dfrac{\partial^2 U_\varepsilon}{\partial x^2} = 0 \\ U_\varepsilon(x,0) = v(x) \end{cases}$$

et on sait que la solution est donnée par un semi-groupe

$$(25) \qquad U_\varepsilon(t) = S_\varepsilon(t)v \ .$$

(On peut considérer (24) comme une perturbation de l'équation de la chaleur ; on commence par v très régulier pour obtenir les majorations).

Existence : En utilisant le principe du maximum il est facile d'obtenir l'estimation

(26) $$\|U_\varepsilon(t)\|_{L^\infty} \leq \|v\|_{L^\infty}$$

ou plus précisément $\operatorname{Inf} v(x) \leq \operatorname{Inf} U_\varepsilon(x,t) \leq \operatorname{Sup} U_\varepsilon(x,t) \leq \operatorname{Sup} v(x)$.

De même on voit que $S_\varepsilon(t)$ est croissant :

(27) $$v \leq w \Rightarrow S_\varepsilon(t)v \leq S_\varepsilon(t)w .$$

A cause de la propriété $\int S_\varepsilon(t)v\,dx = \int v dx$ (27) équivaut à

(28) $$\|S_\varepsilon(t)v - S_\varepsilon(t)w\|_{L^1} \leq \|v - w\|_{L^1} .$$

((26) et (28) impliquent $\|S_\varepsilon(t)_v\|_{L^p} \leq \|v\|_{L^p}$ par interpolation).

De (28) on déduit immédiatement

(29) $$\left\|\frac{\partial}{\partial x} S_\varepsilon(t)v\right\|_{L^1} \leq \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^1}$$

Grâce à (29) et à l'équation $(24)_\varepsilon$ on peut obtenir une estimation sur $\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}$ et on peut alors extraire une sous-suite U_η vérifiant

(30) $$U_\eta \to U \text{ presque partout (et dans } L^\infty \text{ faible}*)$$

Alors $f(U_\eta) \to f(u)$ et on peut passer à la limite dans $(24)_\varepsilon$ donc u vérifie (22) . La propriété de semi-groupe proviendra de l'unicité.

Condition d'entropie .

Soit φ convexe et ψ définie par

(31) $$\psi'(\lambda) = f'(\lambda)\varphi'(\lambda)$$

Alors u vérifie les conditions d'entropie suivantes :

(32) $$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(u) + \frac{\partial}{\partial x}\psi(u) \leq 0$$

En effet en multipliant (24)$_\varepsilon$ par $\varphi'(U_\varepsilon)$ on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(U_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x}\psi(U_\varepsilon) - \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(U_\varepsilon) + \varepsilon\varphi''(U_\varepsilon)\left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}\right)^2 = 0$$

Les trois premiers termes convergent au sens des distributions vers $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(u)$, $\frac{\partial}{\partial x}\psi(u)$ et 0 ; le quatrième $\mu_\varepsilon = \varepsilon\varphi''(U_\varepsilon)\left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}\right)^2$ est ≥ 0 et donc converge vers $\mu \geq 0$. (En fait on a facilement l'estimation $\sqrt{\varepsilon}\,\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}$ borné dans $L^2(0,T)\times\mathbb{R})$ ce qui montre que μ_ε est borné dans $L^1((0,T)\times\mathbb{R}))$.

Unicité : Si u et $\bar{u}$ vérifient (32) pour toute fonction convexe φ (donc vérifient (22) en utilisant $\varphi(\lambda) = \pm\lambda$) alors on a

(33) $$\frac{\partial}{\partial t}|u-\bar{u}| + \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{sign}(u-\bar{u})(f(u)-f(\bar{u})) \leq 0$$

ce qui, si u, $\bar{u} \in L^\infty \cap L^1$ implique

(34) $$\frac{d}{dt}\|u(t)-\bar{u}(t)\|_{L^1} \leq 0$$

d'où l'unicité du problème de Cauchy parmi les solutions vérifiant les conditions d'entropie .

Pour obtenir (33) on utilise (32) avec $\varphi(\lambda) = |\lambda-k|$ et $\psi(\lambda) = \operatorname{sign}(\lambda-k)(f(\lambda)-f(k))$ alors si $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)$, $w \geq 0$ on a

(35) $$\iint\left(|u(x,t)-k|\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{sign}(u(x,t)-k)(f(u(x,t))-f(k))\frac{\partial w}{\partial x}\right)dxdt \geq 0$$

On prend alors $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{R}^2_+)$, $g \geq 0$ et on prend dans (35)

$$w(x,t) = g(x,t,y,\tau),\quad k = \bar{u}(y,\tau)$$

puis on intègre en (y,τ) ce qui donne

(36) $$\iiiint\Big(|u(x,t)-\bar{u}(y,\tau)|\frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{sign}(u(x,t)-\bar{u}(y,\tau))(f(u(x,t)) - f(\bar{u}(y,\tau)))\frac{\partial g}{\partial x}\Big)dx\,dy\,dt\,d\tau \geq 0$$

On écrit la même inégalité en permutant les rôles de u et $\bar{u}$, $\frac{\partial g}{\partial t}$ et $\frac{\partial g}{\partial \tau}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$; on ajoute puis on prend $g = h(\frac{x+y}{2},\frac{t+\tau}{2})\rho_\varepsilon(\frac{x-y}{2},\frac{t-\tau}{2})$ avec $\rho_\varepsilon \to \delta_o$ et $h \geq 0$ ce qui donne

$$\iint(|u-\bar{u}|\frac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{sign}(u-\bar{u})(f(u) - f(u))\frac{\partial h}{\partial x})\,dx\,dt \geq 0$$

d'où (33) .

La condition (32) permet de caractériser les bonnes solutions discontinues de la forme

(37) $$u(x,t) = \begin{cases} a & \text{si } x < st + x_o \\ b & \text{si } x > st + x_o \end{cases} \qquad \text{avec } f(b) - f(a) = s(b-a)$$

Après quelques calculs dans lesquels on utilise les fonctions $\varphi\,\psi$ de la forme

(38) $$\varphi(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < k \\ \lambda-k & \text{si } \lambda > k \end{cases} \qquad \psi(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < k \\ f(\lambda)-f(k) & \text{si } \lambda > k \end{cases}$$

on obtient la condition d'Oleinik :

(39) Si $a > b$ la corde joignant $(a,f(a))$ à $(b,f(b))$ se trouve au dessus du graphe de la fonction f ; si $a < b$ la corde est au-dessous du graphe

Comme on le voit, en plus de l'estimation (26) qui donne une borne dans L^∞ on utilise (29) qui permet de travailler dans l'espace des fonctions à variation bornée et donc d'utiliser des méthodes de compacité. La propriété (28) montre que S(t) est un semi-groupe de contraction dans $L^1(\mathbb{R})$. Pour un système on peut espérer trouver un semi-groupe lipschitzien dans L^1 : $\|S(t)v - S(t)w\|_{L^1} \leq K\|v - w\|_{L^1}$ mais on ne peut pas avoir $K = 1$ (sauf si le système est découplé) car la propriété de croissance (27) est fausse pour les systèmes. Pour les systèmes, même les estimations du type (26) sont difficiles.

5. LA METHODE DE COMPACITE PAR COMPENSATION

Comme les tentatives pour obtenir des estimations sur les dérivées se sont presque toutes soldées par un échec il était naturel d'essayer une autre approche : se passer d'estimation a priori ce qui amène à étudier les propriétés des équations par rapport à la convergence faible. Les difficultés sont différentes mais sérieuses : les applications non linéaires n'ont pas en général de bonnes propriétés par rapport à la convergence faible et on sait qu'une limite faible de semi-groupes (même linéaires) n'est pas toujours un semi-groupe.

Pour surmonter ces difficultés il vallait mieux posséder un outil nouveau. En partant de travaux en commun avec F. Murat (relatifs à l'homogénéisation) et d'idées de J. Ball (relatives à l'élasticité non linéaire) j'avais mis au point une méthode nouvelle, baptisée compacité par compensation, pour étudier la convergence faible de solutions d'équations non linéaires; pour surmonter la difficulté des conditions d'entropie quelques améliorations furent nécessaires. Les résultats de la méthode sont prometteurs : dans le cas scalaire on obtient quelques résultats nouveaux ; dans le cas des systèmes il reste des obstacles de nature calculatrice. Selon toute vraisemblance on verra d'ici peu comment affiner la méthode pour avoir sans mal des théorèmes nouveaux d'existence.

Comme on veut pouvoir passer à la limite dans le terme $f(u)$ avec une seule majoration a priori dans L^∞ la question naturelle est la suivante.

<u>Question 1</u> : Si U_n est une suite de solutions faibles de $\frac{\partial U_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(U_n) = 0$ dans un ouvert ω (du plan x,t) convergeant dans $L^\infty(\omega)$ faible $*$ vers u, a-t-on convergence (dans L^∞ faible $*$) de $f(u_n)$ vers $f(u)$?

On a sans difficulté la réponse .

<u>Réponse 1</u> : Non, sauf si f est affine.

Pour le voir on fabrique un contre exemple de la manière suivante :

On choisit $a \neq b$ et $\theta \in \,]0,1[$ tels que $f((1-\theta)a+\theta b) \neq (1-\theta)f(a)+\theta f(b)$.

Soit $s = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Soit ensuite v_n une suite de fonctions caractéristiques sur $\mathbb{R}$ convergeant faiblement vers θ (par exemple $v_n(x) = 1$ si $\frac{m}{n} < x < \frac{m+\theta}{n}$ pour un $m \in \mathbb{Z}$ et 0 sinon). Alors les fonctions $U_n(x,t) = a + (b-a)v_n(x-st)$ vérifient l'équation avec $U_n \rightharpoonup (1-\theta)a+\theta b$ et $f(U_n) \rightharpoonup (1-\theta)f(a)+\theta f(b)$.

Il y a de quoi être déçu, mais il faut persévérer : les fonctions utilisées pour le contre exemple ne satisfont pas les conditions d'entropie (les sauts de a à b et de b à a sont autorisés seulement si f est affine sur l'intervalle $[a,b]$) ; alors on reformule la question :

Question 2 : Mêmes hypothèses que pour la question 1 mais en supposant que les U_n satisfont les conditions d'entropie.
Alors (mais ce n'est pas tout à fait évident) on a la réponse

Réponse 2 : Oui, s'il n'y a qu'une variable d'espace ; non s'il y a plus d'une variable d'espace.
Plus précisément on a le résultat suivant :

Théorème : Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et U_n une suite de fonctions vérifiant

(40) $$U_n \rightharpoonup U \quad \text{dans } L^\infty(\omega) \text{ faible } * .$$

(41) $$\forall \varphi \text{ convexe } \frac{\partial}{\partial t}\varphi(U_n) + \frac{\partial}{\partial x}\psi(U_n) \in \text{compact de } H^{-1}(\omega) + \text{borné de } M(\omega)$$

(où $M(\omega)$ est l'espace des mesures sur ω et $\psi'(\lambda) = f'(\lambda)\varphi'(\lambda)$) alors on a (42) $f(U_n) \rightharpoonup f(u)$ dans $L^\infty(\omega)$ faible $*$.

Si les U_n satisfont la condition d'entropie alors u la satisfait.

Si de plus f n'est affine sur aucun intervalle alors $U_n \to u$ dans $L^p_{loc}(\omega)$ fort $\forall p < +\infty$.

Remarque : Si U_ε est la solution de (24)$_\varepsilon$ alors l'estimation $\sqrt{\varepsilon}\,\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}$ borné dans $L^2(0,T)\times\mathbb{R}$ suffit pour avoir l'estimation (41) pour U_{ε_n} avec ε_n tendant vers 0 .

Démonstration : On commence par remarquer quand dans ii)
$g_n = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(U_n) + \frac{\partial}{\partial x}\psi(U_n)$ reste dans un compact de $H^{-1}_{loc}(\omega)$ grâce au

Lemme 1 : Si $g_n \in$ borné de $W^{-1,p}(\omega)$ avec $p > 2$ et $g_n \in$ compact de $H^{-1}(\omega)$ + borné de $M(\omega)$ alors $g_n \in$ compact de $H^{-1}_{loc}(\omega)$.

Idée : On peut supposer ω borné ; on résout $-\Delta v_n = g_n$ avec $v_n \in H^1_0(\omega)$ alors on a $v_n \in$ borné de $W^{1,p}_0(\omega)$ avec $v_n \in$ compact de $H^1_0(\omega) + \omega_n$ avec

$\Delta w_n \in$ borné de $M(\omega)$ donc $\in$ compact de $W^{-1,q}(\omega)$ avec $q < \frac{N}{N-1}$ donc $\omega_n \in$ compact de $W_o^{1,q}$ ce qui donne $\operatorname{grad} v_n \in$ borné de $L^p \cap$ compact de L^q donc $\in$ compact de L^2 d'où $g_n \in$ compact de $H^{-1}(\omega)$. ■

On utilise ensuite un résultat de compacité par compensation :

<u>Lemme 2</u> : $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $v_n \rightharpoonup v$ dans $(L^2(\Omega))^N$ faible avec $\operatorname{div} v_n \in$ compact de $H^{-1}(\Omega)$, $w_n \rightharpoonup w$ dans $(L^2(\Omega))^N$ faible avec $\operatorname{rot} w_n \in$ compact de $(H^{-1}(\Omega))^m$; alors $v_n . w_n \rightharpoonup v.w$ dans $L^1(\Omega)$ muni de la topologie vague.

<u>Idée</u> : On localise puis on utilise Plancherel Parseval pour se ramener à un problème de convergence d'intégrale sur les transformées de Fourier ; ensuite on utilise les hypothèses sur les dérivées pour voir que $\hat{v}_n . \bar{\hat{w}}_n$ décroit bien à l'infini. (Si w_n est un gradient une simple intégration par parties suffit). [Le qualificatif compensation vient du fait que $(v_n)_i (w_n)_i$ ne converge pas en général vers $(v)_i (w)_i$; c'est seulement la somme sur i qui converge vers la somme].

On applique le lemme dans le plan (t,x) à $v_n = (u_n, f(u_n))$, $w_n = (\psi(u_n), -\varphi(u_n))$ ce qui donne le résultat

(43) $$\begin{cases} \text{Si } U_n \rightharpoonup u,\ f(U_n) \rightharpoonup \xi,\ \varphi(U_n) \rightharpoonup \eta,\ \psi(U_n) \rightharpoonup \zeta \text{ dans } L^\infty \text{ faible } * \\ \text{alors } U_n \psi(U_n) - f(U_n)\varphi(U_n) \rightharpoonup u\xi - \zeta\eta \quad \text{dans } L^\infty \text{ faible } * \end{cases}$$

(on peut toujours extraire une sous-suite telle que $f(u_n)$, $\varphi(u_n)$, $\psi(u_n)$ convergent).

Comme il n'y a en général que des inégalités reliant les limites faibles de fonctions non linéaires de U_n (43) représente une information importante. Pour utiliser cette information il faut connaître la caractérisation des limites faibles de toutes les fonctions de U_n :

<u>Lemme 3</u> : Il existe une sous-suite U_m et une famille de probabilités $\nu_{x,t}$ sur $\mathbb{R}$ (dépendant mesurablement de $(x,t) \in \omega$) tel que pour toute fonction continue F

(44) $$F(U_m) \rightharpoonup \bar{F}(x,t) \quad \text{avec} \quad \bar{F}(x,t) = \langle \nu_{x,t}, F(\lambda) \rangle$$

Alors 43 , 44 donne l'information suivante (pour presque tout x,t)

$$(45)\quad \langle\nu_{x,t},\lambda\psi(\lambda) - f(\lambda)\varphi(\lambda)\rangle = \langle\nu_{x,t},\lambda\rangle\langle\nu_{x,t},\psi(\lambda)\rangle - \langle\nu_{x,t},f(\lambda)\rangle\langle\nu_{x,t},\varphi(\lambda)\rangle$$

45 est vrai pour chaque fonction convexe φ en dehors d'un ensemble de mesure nulle ; en prenant une famille dénombrable de fonctions convexes, faisant des combinaisons et passant à la limite on voit que 45 est vrai pour toutes les fonctions φ. Posons $k = \langle\nu,\lambda\rangle$ on choisit $\varphi(\lambda) = |\lambda - k|$ ce qui donne après quelques calculs $(\langle\nu,f(\lambda)\rangle - f(k))\langle\nu,\varphi\rangle = 0$ ce qui donne $\langle\nu,f(\lambda)\rangle = f(k) = f(u)$. Ensuite (quitte à changer d'origine on peut supposer $\langle\nu,\lambda\rangle = \langle\nu,f(\lambda)\rangle = 0$) on choisit A à support compact tel que $A' = \lambda\nu$ et B à support compact tel que $B' = f(\lambda)\nu$; 45 donne $\langle A',\psi\rangle - \langle B',\varphi\rangle + 0$ soit $\langle Af' - B,\varphi'\rangle = 0$ ce qui donne $Af' - B = 0$; comme $f(\lambda)A' - \lambda B' = 0$ on déduit $f(\lambda)A - \lambda B = 0$; si le support de ν n'est pas réduit à 1 point (0 nécessairement) le plus petit intervalle qui le contient est de la forme $[a,b]$ avec $a < 0 < b$ et $A(\lambda) < 0$ sur $]a,b[$ cela implique alors $f(\lambda) = \lambda f'(\lambda)$ sur $]a,b[$ d'où $f(\lambda) = c\lambda$. Donc on a montré que le support de ν est dans un intervalle où f est affine (l'intervalle pouvant être réduit à un point). Si f n'est affine sur aucun intervalle alors $\nu_{x,t}$ est une mesure de Dirac (au point $u(x,t)$ pour presque tout (x,t) ce qui implique la convergence forte de U_m vers u. Si f est quelconque on n'a pas $\varphi(U_n \rightharpoonup \varphi(u)$ et $\psi(u_n) \rightharpoonup \psi(u)$ mais comme dans les zones où cela n'a pas lieu tout ressemble au cas linéaire on arrive à se débrouiller.

Commentaires : Le lemme 3 est essentiellement dû à L. C. Young : il permet de traiter à fond les problèmes de convergence faible quand aucune dérivée n'intervient ; s'il y a des dérivées on doit utiliser des résultats tels que le lemme 2 (compacité par compensation) : il y a des résultats plus généraux dans ce sens obtenus avec F. Murat qui permettent d'aborder le cas des systèmes :
Pour un système $\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(U) = 0$ on voit apparaître des probabilités ν sur $\mathbb{R}^p$ (U est un vecteur à p composantes) qui vérifient

$$\langle\nu,F_1G_2 - F_2G_1\rangle = \langle\nu,F_1\rangle\langle\nu,G_2\rangle - \langle\nu,F_2\rangle\langle\nu,G_1\rangle$$

pour tous les couples (entropie F, flux d'entropie G) (c'est-à-dire vérifiant $\frac{\partial}{\partial t}F(U + \frac{\partial}{\partial x}G(U) = 0$ pour les solutions régulières). Malheureusement on ne sait pas encore caractériser ces probabilités.

Le lemme 1 est crucial pour taiter le cas des solutions discontinues (il a été introduit par F. Murat pour des problèmes d'homogénéisation dans les inéquations variationnelles ; la démonstration donnée ici m'a été signalée par H. Brézis).

BIBLIOGRAPHIE

Pour le côté mécanique des fluides :

R. Courant, K. O. Friedrichs : Supersonic flow and shock waves. Interscience Publ. New York (1948).

Les contributions importantes de l'école américaine de 1957 à 1970 :

P. D. Lax : Hyperbolic systems of conservation laws. Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957) 537-566.

P. D. Lax : Development of singularities of solutions of non linear hyperbolic partial differential equations. J. Math. Phys. 5 (1964) 611-613.

J. Glimm : Solutions in the large for non linear hyperbolic systems of equations. Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965) 697-715.

J. Glimm, P. D. Lax : Decay of solutions of systems of non linear hyperbolic conservation laws. Memo. Amer. Math. Soc. 101 (1970).

Les contributions de l'école soviétique de 1957 à 1970 :

O. A. Oleinik : On the uniqueness of the generalized solution of the Cauchy problem for a non linear system of equations occurring in mechanics. Usp. Mat. Nauk 12 (78) (1957) 169-176.

S. K. Godunov : Bounds on the discrepancy of approximate solutions constructed for the equations of gas dynamics. Zhur Vychisl. Mat i Fiz 1 (1961) 623-637.

A. I. Volpert : The spaces BV and quasilinear equations. Mat. Sb 73 (1967) 255-302.

S. N. Kruzhkov : First order quasilinear equations in several independent variables. Mat. Sb. 81 (1970) 228-255.

Les contributions relatives aux notions d'entropie :

P. D. Lax : Shock waves and entropy dans Contribution to Nonlinear Functional Analysis, ed. par E. A. Zarantonello, Academic Press, New York (1971) 603-634.

C. C. Conley, J. A. Smoller : Shock waves as limits of progressive wave solutions of higher order equations. Comm. Pure Appl. Math. 24 (1971) 459-472.

C. M. Dafermos : The entropy rate admissibility criterion for solutions of hyperbolic conservation laws. J. Diff. Eq. 14 (1973) 202-212.

C. C. Conley, J. A. Smoller : On the structure of magnetohydrodynamic shock waves. Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974) 367-375.

Les autres contributions représentent des améliorations techniques de la methode de Glimm et sont essentiellement dus à R. J. Di Perna et T. P. Liu (beaucoup de résultats n'existent que sous forme de preprint).
On pourra trouver un exposé complet sur un exemple ainsi que d'autres questions intéressantes dans

T. Nishida : Non linear hyberbolic equations and related topics in fluid dynamics. Publications Mathématiques d'Orsay 1978.

La méthode de compacité par compensation a été partiellement exposée dans mon cours Peccot en 1977 (mais qui sait si les notes de ce cours verront le jour !). On en trouvera un exposé dans les proceedings du Colloque de Besançon (Juin 1977) à paraître chez Springer

L. Tartar : Une nouvelle méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires.