S. Alinhac
M. S. Baouendi

Unicité pour le problème de Cauchy à partir d'une surface partout caractéristique ; applications

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 16, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A17_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 7 - 1 9 7 8

UNICITE POUR LE PROBLEME DE CAUCHY A PARTIR D'UNE SURFACE PARTOUT CARACTERISTIQUE; APPLICATIONS

par S. ALINHAC et M. S. BAOUENDI

Exposé n° XVI

23 Mai 1978

Soit $\tilde{P}(x,D_x)$ un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients C^∞ dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On s'intéresse au problème du "prolongement unique" à partir de l'origine ; c'est-à-dire on veut savoir si on a : $u \in C^\infty$, u plate en 0 (i.e. $D_x^\alpha u(0) = 0$) et $\tilde{P}u = 0$, impliquent u = 0 au voisinage de 0. Pour taiter ce problème on introduit les coordonnées polaires

$$x = t\theta \qquad \text{avec } t = |x| \quad \text{et } \theta \in S^{n-1} .$$

Après une multiplication par une puissance convenable de t, l'opérateur $\tilde{P}$ devient

$$(1) \qquad P(t,\theta,t\partial_t,D_\theta) = \sum_{j=o}^{m} P_j(t,\theta,D_\theta)(t\partial_t)^j$$

où les P_j sont des opérateurs différentiels d'ordre m-j sur la sphère. L'étude du prolongement unique pour $\tilde{P}$, revient à celle de l'unicité pour le problème de Cauchy pour P à partir de la surface t = 0 (dans les variables t, θ) . On présentera ici, pour P donné par (1), des résultats nouveaux apparentés au théorème classique de Calderon. Ensuite, on donnera des applications au "prolongement unique". D'autres applications, les démonstrations complètes et les références bibliographiques paraîtront dans [1].

LE RESULTAT PRINCIPAL

Soient M une variété C^∞ compacte sans bord et $T_o > 0$. On se donne P sous la forme (1) où P_j est un pseudodifférentiel classique d'ordre m-j sur M ($P_j \in \mathcal{L}^{m-j}(M)$) dépendant d'une manière C^∞ en $t \in [0,T_o]$. On suppose $P_m = I$. On fait maintenant les hypothèses suivantes :

a) Le symbole principal

$$(2) \qquad p(t,\theta,\rho,\eta) = \sum_{j=o}^{m} p_j(t,\theta,\eta)\rho^j$$

(où p_j est le symbole principal de P_j) se factorise globalement sur $[0,T_o] \times \mathbb{R} \times (T^*M\backslash 0)$ sous la forme

(3) $$p(t,\theta,\rho,\theta) = \prod_{i=1}^{m} (\rho - \ell_i(t,\theta,\eta))$$

où les ℓ_i sont C^∞ sur $[0,T_o] \times (T^*M\backslash 0)$, positivement homogènes de degré 1 en η, et satisfaisant

$$\begin{cases} \ell_{2j-1}(0,\theta,\eta) = \ell_{2j}(0,\theta,\eta) \text{ pour } j=1,\dots,p \ (2p \le m) \\ \ell_1, \ell_3, \dots, \ell_{2p-1}, \ell_{2p+1}, \ell_{2p+2}, \dots, \ell_m \text{ sont distincts} \\ \text{pour } t=0 \text{ et } (\theta,\eta) \in T^*M\backslash 0. \end{cases}$$

Chaque ℓ_i, $1 \le i \le m$, est dans l'une des trois classes suivantes :

i) ℓ_i est purement imaginaire sur $[0,T_o] \times (T^*M\backslash 0)$.

ii) $\mathrm{Re}\,\ell_i(0,\theta,\eta) < 0$ sur $T^*M\backslash 0$,

iii) $\mathrm{Re}\,\ell_i(0,\theta,\eta) > 0$ sur $T^*M\backslash 0$.

De plus, si $1 \le i \le 2p$, ℓ_i doit être du type ii) ou iii).

b) L'opérateur $P(0,\rho,\theta,D_\theta) = \sum_{j=o}^{m} P_j(0,\theta,D_\theta)\rho^j$ se factorise sous la forme

(4) $$P(0,\theta,\rho,D_\theta) = \prod_{i=1}^{m} (\rho - \Lambda_i(\theta,D_\theta))$$

où $\Lambda_i \in \mathcal{L}^1(M)$, de symbole principal $\ell_i(0,\theta,\eta)$. De plus, si ℓ_i est du type iii), Λ_i doit satisfaire

(5) $$[\Lambda_i, \Lambda_i^*] = 0 .$$

Finalement, si tous les ℓ_i sont du type i), alors il n'est pas nécessaire de faire l'hypothèse b).

<u>Théorème 1</u> : Sous les hypothèses a) et b), il existe $T \in]0,T_o]$ tel que si $u \in C^\infty([0,T_o] \times M)$, u plate en $t=0$ (i.e. pour tout k $\partial_t^k u(0,\theta)=0$), et $Pu=0$ dans $[0,T_o] \times M$, alors $u=0$ dans $[0,T] \times M$.

<u>Remarques</u> : 1) Par le changement de variable $t = e^{-x}$, $t\partial_t$ devient $-\partial_x$, le Théorème 1 peut alors être considéré comme un résultat d'unicité pour des solutions d'équations différentielles satisfaisant des conditions de décroissance exponentielle à l'infini. En prenant $M = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, on peut aussi obtenir des résultats d'unicité pour des solutions périodiques.

2) La compacité de M, dans le théorème 1, est essentielle. Il est facile de voir, par exemple, que pour les opérateurs

$$\frac{t\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\theta} \qquad \text{ou} \qquad \frac{t\partial}{\partial t} + \frac{i\partial}{\partial\theta}$$

il n'y a pas d'unicité locale en $\theta \in \mathbb{R}$, pour les fonctions plates en $t = 0$.

3) Quand P donné par (1) est différentiel, $P_m = 1$, l'analyticité des coefficients ne suffit pas pour garantir l'uncité. On donne ici un exemple. Soit

$$L = \frac{t\partial}{\partial t} + e^{i\theta} D_\theta \qquad \left(D_\theta = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta},\ \theta \in S^1\right) .$$

On définit

$$u(t,\theta) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(t\partial_t)^n f(t)}{n!} e^{-in\theta}$$

avec $f(t) = e^{-1/t}$. Il existe $C > 0$ et $a \in]0,1[$ vérifiant, pour tout n, $|(t\partial_t)^n f(t)| \leq e^{-\frac{c}{t}} a^n n!$ On en déduit que $u \in C^\infty([0,\infty[\times S^1)$, u est plate en 0 et $Lu = 0$, cependant u ne s'annule dans aucun voisinage de $t = 0$.

<u>APPLICATIONS</u>

On se limite ici à donner deux applications du théorème 1 au problème du prolongement unique. (On prend $M = S^{n-1}$) .

<u>Corollaire 1</u> : Soit $\tilde{P}(x,D_x) = \sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(x)\, D^\alpha$ un opérateur elliptique du second ordre, défini dans un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que $a_\alpha \in C^\infty(V)$ et que $a_\alpha(0)$ est réel pour $|\alpha| = 2$. Si $u \in C^\infty(V)$, u plate en 0 et satisfait dans V

$$(6) \qquad |\tilde{P}(x,D_x)u(x)| \leq C\left(\frac{|u(x)|}{|x|^{2-\varepsilon}} + \frac{|\operatorname{grad} u(x)|}{|x|^{1-\varepsilon}}\right)$$

avec $C \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, alors u s'annule au voisinage de 0.

Le corollaire 2, quand les coeffifients a_α sont réels, est essentiellement le théorème d'Aronszajn-Cordes [2].

Pour les opérateurs d'ordre 4, on a le résultat suivant :

<u>Théorème 2</u> : Soit $\tilde{P}(x,D)$ un opérateur différentiel d'ordre 4, à coefficients C^∞ dans V, voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que l'on a

$$\tilde{P}(x,D_x) = P_1(x,D_x)P_2(x,D_x) + R(x,D_x)$$

où R est un opérateur différentiel d'ordre 3 et P_1, P_2 des opérateurs différentiels du second ordre à coefficients dans $C^\infty(V)$. De plus

$$P_1(0,D_x) = P_2(0,D_x) = Q(D_x)$$

où Q est homogène d'ordre 2, elliptique et à coefficients réels.

Si $u \in C^\infty(V)$, u plate à l'origine et satisfait

$$(7) \qquad |\tilde{P}(x,D_x)u| \leq C|x|^\varepsilon\left(\frac{|u(x)|}{|x^4|} + \frac{|\operatorname{grad} u(x)|}{|x|^3} + \sum_{|\alpha|=2} \frac{|D^\alpha u(x)|}{|x|^2}\right)$$

alors u s'annule dans un voisinage de l'origine.

En fait, le corollaire 1 et le théorème 2 résultent, non pas directement du théorème 1, mais des inégalités du type Carleman établies pour la démonstration de ce théorème. Si $C = 0$ dans (6) et (7), alors on peut utiliser directement la conclusion du théorème 1. En effet, on peut toujours supposer que la partie principale de $P(0,D_x)$ (dans Corollaire 1) et $Q(D_x)$ (dans Théorème 2) sont le laplacien. On observe alors qu'en coordonnées polaires $t^2\Delta$ s'écrit ($t\partial_t = \partial$, Δ_θ est le laplacien positif sur la sphère),

$$\partial^2 + (n-2)\partial - \Delta_\theta = (\partial + \frac{n-2}{2})^2 - (\Delta_\theta + (\frac{n-2}{2})^2) .$$

$$= (\partial - \Lambda_1)(\partial - \Lambda_2)$$

avec $\Lambda_1 = \Lambda - \frac{n-2}{2}$, $\Lambda_2 = -\Lambda - \frac{n-2}{2}$, $\Lambda = (\Delta_\theta + (\frac{n-2}{2})^2)^{1/2}$.

Un calcul simple montre alors que les hypothèses a) et b) du théorème 1 sont satisfaites.

IDEES DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME 1

1. On commence d'abord par établir des inégalités de Carleman dans un cadre abstrait. Soient $V \subset H \subset V^*$ le triplet "classique" d'espaces de Hilbert (V dense dans H, V^* l'antidual de V) et $T_0 > 0$. On se donne $J, K \in C^\infty[0,T_0]$, $\mathcal{L}(V,V^*)$) et on suppose que l'on a pour tout $t \in [0,T_0]$

$$J^*(t) = J(t) \quad , \quad K^*(t) = -K(t) .$$

Enfin on suppose qu'il existe un espace de Hilbert $D \subset V$, tel que $J, K \in C^\infty([0,T_0], \mathcal{L}(D,V))$.

On s'intéresse à l'opérateur

$$L = t\,\frac{d}{dt} + J(t) + K(t) .$$

On montre alors :

Lemme 1 : 1) On suppose qu'il existe $C \geq 0$, $C_1 \geq 0$ tel que pour tout $v \in D$ et tout $t \in [0,T_0]$

(8) $$(J(t)v,v)_H \geq -C\|v\|_H^2 + C_1\|v\|_V^2 \quad ,$$

alors pour T et $1/\gamma_0$ assez petits, on a pour tout $u \in C^\infty([0,T],D)$ u plate en $t=0$, et tout $\gamma \geq \gamma_o$

(9) $$\gamma/2 \| t^{-\gamma} |\log t|^{-\gamma} u\|_{L^2(0,T;H)} + C_1 \| t^{-\gamma} |\log t|^{-\gamma} u\|_{L^2(0,T;V)} \leq$$

$$\| t^{-\gamma} |\log t|^{-\gamma} Lu \|_{L^2(0,T,H)} .$$

2) On suppose qu'il existe $\lambda \geq 0$, $C \geq 0$, tel que pour tout $v \in D$ et tout $t \in [0,T_o]$,

(10) $$((2\lambda J(t) + J_t'(t) + t^{-1}[K,J])v,v) \leq C \|v\|_H^2 - C_1 \|v\|_V^2 ,$$

alors pour T et $1/\gamma_o$ assez petits, on a pour tout $u \in C^\infty([0,T],D)$, u plate en $t=0$ et $t=T$, et tout $\gamma \geq \gamma_o$

(11) $$\frac{\gamma}{2} \| t^{-\gamma - \frac{1}{2}} |\log t|^{-\gamma - 1} u\|^2_{L^2(0,T,H)} + C_1 \| t^{-\gamma} |\log t|^{-\gamma} u\|^2_{L^2(0,T;V)} \leq$$

$$e^{2\lambda T} \| t^{-\gamma - \frac{1}{2}} |\log t|^{-\gamma} Lu \|^2_{L^2(0,T;H)}$$

On utilisera ce lemme avec

$$H = L^2(M) \ , \quad V = H^{1/2}(M) \ , \quad D = H^2(M), \ J(t) + K(t) \in \mathcal{L}^1(M)$$

(avec symbole principal du type i) ii) ou iii) des hypothèses du théorème 1).

2. La deuxième étape essentielle de la démonstration du Théorème 1 est une factorisation de P (donné par (1)). On montre que, sous les hypothèses du théorème, on peut écrire, pour tout N et tout r ($t\partial_t = \partial$) :

$$(12)\qquad P(t,\theta,t\partial_t,D_\theta) = \prod_{i=1}^{p} Q_i \prod_{i=2p+1}^{m} (\partial - L_i) + \sum_{j=o}^{m-1} t^r R_j(t,\theta,D_\theta)\,\partial^j$$

avec

$$Q_i = (\partial - L_{2i-1})(\partial - L_{2i}) + t^r A_i \partial + t^r B_i$$

où les $L_i \in \mathcal{L}^1(M)$,

$$L_i(0,\theta,D_\theta) = \Lambda_i \quad , \qquad 1 \leq i \leq m$$

$A_i \in \mathcal{L}^o(M)$, $B_i \in \mathcal{L}^1(M)$, $R_i \in \mathcal{L}^{m-j-N}(M)$.

Pour $t = 0$, la factorisation (12) coincide avec (4).

3. La troisième étape consiste à utiliser les inégalités (9) et (11) en cascade pour les termes $(\partial - L_i)$ et Q_i de la factorisation (12). Pour les termes correspondant à ℓ_i du type i) ou ii) on a (8) (inégalité de Gårding "sharp"). Si ℓ_i est du type (iii) on a alors (10) (à noter de $[K,J](0) = 0$ grâce à (5)).

Le traitement des Q_i (correspondant à la multiplicité double) est plus délicat (on renvoie à [1]).

On choisissant $N = m$, on exprime le reste $\Sigma\, t^r R_j \partial^j$ de (12), à l'aide de

$$u_o = u,\ u_1 = (\partial - L_m)u_o, \dots, u_{m-2p} = (\partial - L_{2p+1})u_{m-2p-1}, \dots,$$

$$w_{p-1} = Q_2\, w_{p-2} \quad .$$

Finalement, on obtient de la cascade d'inégalités :

Pour T et $1/\gamma_o$ assez petits, pour tout

$u \in C^\infty([0,T] \times M)$, u plate en $t = 0$ et $t = T$, et tout $\gamma \geq \gamma_o$

$$(13)\qquad \sqrt{\gamma}\,\|(t|\log t|)^{-\gamma} u\|_{L^2([0,T]\times M)} \leq \|(t|\log t|)^{-\gamma-M}\|_{L^2([0,T]\times M)} \quad .$$

$(M > 0)$.

On déduit l'unicité de (13) par des arguments habituels.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Alinhac, M. S. Baouendi : Uniqueness for the characteristic Cauchy problem and strong unique continuation for higher order partial differential inequalities (à paraître).

[2] N. Aronszajn : A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order.
J. Math. Pure Appl. (9) 36 (1957) p.235-249.
