Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

M. Derridj

**Conditions suffisantes de sous-ellipticité pour $\bar{\partial}$ (d'après J. J. Kohn)**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1977-1978), exp. n° 13, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A14_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 7 - 1 9 7 8

# CONDITIONS SUFFISANTES DE SOUS-ELLIPTICITE POUR $\bar{\partial}$

(d'après J. J. KOHN)

par M. DERRIDJ

Exposé n° XIII

14 Mars 1978

## INTRODUCTION

Nous allons essayer ici de développer une note de J. J. Kohn parue aux Proceedings of National Academy of Sciences ([5]) sur l'existence d'une estimation sous-elliptique pour $\bar{\partial}$ dans des domaines pseudo-convexes à frontière analytique réelle vérifiant une condition géométrique qui paraît être la bonne condition liée à l'existence d'une telle estimation. En effet, dans certains cas, cette condition est aussi nécessaire. Il est conjecturé par J. J. Kohn que cette condition est nécessaire et suffisante.

Ce travail clot en quelque sorte dans le cas analytique réel une série d'articles sur le même sujet mais avec en plus des hypothèses plus ou moins techniques (voir [1] [4] [6] [7]).

Ici nous nous restreignons aux (0.1) formes, ce qui simplifie les notations.

## Notations et définitions :

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert défini par une fonction r, analytique réelle i.e. :

$$\Omega = \{ r < 0 \} \quad \text{avec } dr \neq 0 \quad \text{si} \quad r = 0 .$$

En fait, on travaillera localement, donc au voisinage d'un point $z_o \in \partial\Omega$, et on peut toujours supposer $\frac{\partial r}{\partial z_n}(z_o) \neq 0$.

On considère alors un système libre de n champs de vecteurs holomorphes, à coefficients analytiques réels $(L_1,\dots,L_n)$ tel que les champs $L_1,\dots,L_{n-1}$ soient tangents à $\partial\Omega$ au voisinage de $z_o$.

On peut prendre, par exemple

$$\begin{cases} L_i = \dfrac{\partial r}{\partial z_n}\dfrac{\partial}{\partial z_i} - \dfrac{\partial r}{\partial z_i}\dfrac{\partial}{\partial z_n} & i < n \\[2ex] L_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial r}{\partial z_j}\dfrac{\partial}{\partial z_j} & \end{cases}$$

Nous rappelons que la forme de Levi est défini comme la restriction à l'espace tangent complexe à $\partial\Omega$ de la forme

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial z_i \, \partial z_j}\right)_{i,j=1}^{n} .$$

En particulier dans la base $(L_1,\dots,L_{n-1})$ la matrice de Lévi est donnée par :

$$c_{ij} = \langle \partial\bar{\partial} r, L_i \wedge \bar{L}_j\rangle$$

Soit $(\omega_1,\dots,\omega_n)$ le système de $(1,0)$ formes dual du système $(L_1,\dots,L_n)$ i.e. $\langle L_i,\omega_j\rangle = \delta_{ij}$. Alors toute $(0,1)$ forme s'écrira

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{\omega}_i$$

Ici on supposera toujours qu'on a affaire à des formes dont les composantes sont au moins $C^\infty$. On définit de manière standard le produit scalaire de deux formes de même bi-degré (voir [3] pour d'amples détails pour tous ces préliminaires).

Remarquons alors que si $u = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{\omega}_i$, alors

$$\bar{\partial} u = \sum_{j<i} (\bar{L}_j u_i - \bar{L}_i u_j)\bar{\omega}_j \wedge \bar{\omega}_i + \sum R_{ij}\, \bar{\omega}_i \wedge \bar{\omega}_j$$

où $R_{ij}$ sont des combinaisons à coefficients $C^\infty$ des $u_i$.

Soit $\bar{\partial}^*$ l'adjoint de $\bar{\partial}$ au sens $L^2(\Omega)$. Alors, on montre par des intégrations par parties que si $u$ est une $(0,1)$ forme à coefficients $C^\infty$ alors $u \in \mathcal{D}(\bar{\partial}^*)$ si et seulement si $u_n = 0$ sur $\partial\Omega$ (ici $u = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{\omega}_i$).

On notera par $\mathcal{D}^{o,1}$ de telles formes i.e. :

$$\mathcal{D}^{o,1}(\bar{\Omega}) = \{u = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{\omega}_i \,|\, u_n = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\}.$$

Plus précisément, comme on travaille localement, on s'intéresse à

$$\mathcal{D}^{o,1}(V\cap\bar{\Omega}) = \{u = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{\omega}_i \,|\, u_i \in \mathcal{D}(V\cap\bar{\Omega}); u_n = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\}$$

On définit

$$Q(u,v) = (\bar{\partial}u,\bar{\partial}v) + (\bar{\partial}^* u,\bar{\partial}^* v) + (u,v), \quad u,v \in \mathcal{D}^{o,1}$$

Le problème est alors de trouver $\varepsilon > 0$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_\varepsilon^2 \leqslant Q(u,u) \quad \forall u \in \mathcal{D}^{0,1}(V \cap \bar{\Omega}) \tag{0.1}$$

En effet l'estimation (0.1) permet de montrer la régularité $C^\infty$ de la solution du problème de Neumann pour $\bar{\partial}$, et en conséquence celle de la solution canonique de $\bar{\partial}u = f$, si $\bar{\partial}f = 0$ et $f \in C^\infty(V \cap \bar{\Omega})$.

## Dimension holomorphe d'un sous-ensemble analytique du bord $\partial\Omega$

Soit V un sous-ensemble analytique de $\partial\Omega$. Si $x \in V$, on note $Z_x(V) = \{L \in T_x(V)$ ; L holomorphe $L(\varphi)(x) = 0 \ \forall \varphi$ nulle sur $V\}$ où $\varphi$ est un germe de fonction analytique réelle, en x nulle sur V. D'autre part $\eta_x = \{L$, vecteur holomorphe en x tel que

$$\mathcal{L}(L) = \langle \partial\bar{\partial}r, L \wedge \bar{L}\rangle(x) = 0\}$$

**Définition** : La dimension holomorphe de V est, par définition :

$$\inf_{x \in V} \dim_{\mathbb{C}} (Z_x(V) \cap \eta_x)$$

Remarquons qu'on s'intéresse aux germes de sous-ensembles analytiques réels.

On définit aussi l'ensemble I de germes de fonctions analytiques réelles en $z_0$ de la manière suivante :

I = {f, germe de fonction analytique réelle en $z_0$ telle que, il existe un voisinage V de $z_0$, $\varepsilon > 0$ et une constante $C > 0$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \|f\varphi_i\|_\varepsilon^2 \leq C\,Q(\varphi,\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{0,1}(V \cap \bar{\Omega})$$

De même, on définit F par

$F = \{(f_1,\ldots,f_n) |$ n-uples de germes de fonctions analytiques réelles en $z_0$ tels que, il existe un voisinage V de $z_0$, $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ vérifiant :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f_i \varphi_i \right\|_\varepsilon^2 \leq C\, Q(\varphi,\varphi) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}^{0,1}(V \cap \bar{\Omega})$$

on définit : $\sqrt[\mathbb{R}]{I} = \{ g \mid \exists f \in I,\ \exists m \in \mathbb{N}\ \text{t.q}\ |g|^m \leq |f| \}$

Remarquons alors que, pour montrer que l'on a en $z_o$ une estimation sous-elliptique, il suffit de montrer que $1 \in I$.

Enonçons d'abord le théorème suivant, qui se démontre essentiellement par intégration par parties, et dans le cas $C^\infty$.

<u>Les résultats</u> :

<u>Théorème 1</u> : 1) $I$ est un idéal

2) $\sqrt[\mathbb{R}]{I} = I$

3) $r \in I$

4) si $f \in I$, alors $(L_1 f, \ldots, L_n f) \in F$

5) Soit $V_1, \ldots, V_n$, $V_i \in F$ pour $\forall i$, alors $\det(v_j^i) \in I$ .

6) $(C_{1,j}, \ldots, C_{n-1,j}, 0) \in F$ pour $j = 1, \ldots, n-1$.

Donnons simplement comme indications que, pour montrer 4) 5) et 6) on utilise les deux estimations suivantes :

a) $$\sum_{i,j=1}^{n} \|\bar{L}_j \varphi_i\|^2 \leq C Q(\varphi,\varphi) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}^{0,1}(V \cap \bar{\Omega})$$

b) $$\sum_{i,j=1}^{n-1} \int_{\partial\Omega} C_{ij}\, \varphi_i\, \bar{\varphi}_j \leq C\, Q(\varphi,\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{0,1}(V \cap \bar{\Omega})$$

estimations qui sont satisfaites si le domaine est pseudo-convexe au voisnage de $z_o$, i.e. la matrice $(c_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ est positive sur un voisinage de $z_o$ dans $\partial\Omega$ (voir [1] et [6]).

Ce théorème conduit à définir une suite d'idéaux de germes de fonctions analytiques réelles en $z_o$ .

$$I_o = \sqrt[\mathbb{R}]{(r)} = (r) \ : \quad \text{soit } F_o = \left\{ \begin{pmatrix} C_{11} \\ \\ C_{1,n-1} \\ \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} C_{n-1,1} \\ \\ C_{n-1,n-1} \\ \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$F_o$ est constitué de n-uples de germes, qui sont au nombre de n. On définit par récurrence

$$F_k = F_{k-1} \cup \{L_1 g, \ldots, L_n g\}_{g \in I_k}$$

$$I_{k+1} = \sqrt[\mathbb{R}]{I_k \ , \ \det(F_k)}$$

$\det(F_k)$ étant l'ensemble des déterminants (n,n), formés par n-uples appartenant à $F_k$ .

La suite $(I_k)$ est une suite croissante d'idéaux telle que :

$$\sqrt[\mathbb{R}]{I_k} = I_k$$

Remarque : D'après 4), 5) et 6) on a $I_k \subset I \ \forall k$ . On va être amené, sous une hypothèse convenable, à montrer, qu'il existe k tel que $1 \in I_k$ (en fait, on montrera que $1 \in I_{2n}$), ce qui entraînera $1 \in I$, donc une estimation sous-elliptique en $z_o$ .

Définition : On note $Z_x(\mathcal{V}(I_k)) = \{L$, vecteur holomorphe en x tels que $L(\varphi)(x) = 0 \ \forall \varphi = 0$ sur $\mathcal{V}(I_k)\}$ , $Z_x(I_k) = \{L$, vecteur holomorphe en x, tels que $L(\varphi)(x) = 0 \quad \forall \varphi \in I_k\}$ . Remarquons que $Z_x(\mathcal{V}(I_k)) \subset Z_x(I_k)$ mais on n'a pas toujours l'égalité.

Proposition 2 : Soit $x \in \mathcal{V}(I_k)$. Alors $x \in \mathcal{V}(I_{k=1}) \Leftrightarrow Z_x(I_k) \cap \eta_x \neq \{0\}$ .

Idée de la démonstration : Soit $x \in \mathcal{V}(I_k)$. Alors $x \in \mathcal{V}(I_{k+1})$ équivaut au fait que le système d'équations

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij}(x)\,\xi_j = 0 & i = 1,\dots,n-1 \\ \\ \sum_{j=1}^{n} L_j(g)(x)\,\xi_j = 0 \end{cases}$$

admet une solution non triviale $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$. Alors si on prend $L = \sum_{i=1}^{n} \xi_i L_i$, on a bien $Z_x(I_k) \cap \eta_x \neq \{0\}$ . Réciproquement si

$L = \sum_{i=1}^{n} \xi_i L_{i,x} \in Z_x(I_k) \cap \eta_x$, $\xi \neq 0$ alors $x \in \mathcal{V}(I_{k+1})$.

<u>Proposition 3</u> : Soit S l'ensemble des points z (voisins de $z_o$) sur $\partial\Omega$ tels que il existe un sous-ensemble analytique de dimension holomorphe positive passant par z. Alors $\bar{S} \subset \mathcal{V}(I_k)$, $\forall k$ .

<u>Démonstration</u> : On a $\bar{S} \subset \mathcal{V}(I_o)$ puisque $I_o = \sqrt[\mathbb{R}]{(r)} = (r)$ . Donc il suffit de montrer que :

$$S \subset \mathcal{V}(I_k) \text{ entraîne } S \subset \mathcal{V}(I_{k+1}).$$

Soit donc $x \in S \subset \mathcal{V}(I_k)$. D'après la proposition 2 on a $x \in \mathcal{V}(I_{k+1}) \Leftrightarrow Z_x(I_k) \cap \eta_x \neq \{0\}$. Mais comme $x \in S$ il passe par x un sous-ensemble analytique réel de dimension holomorphe positive i.e. $Z_x(\mathcal{V}(I_k)) \cap \eta_x \neq \{0\}$ et donc {puisque $Z_x(\mathcal{V}(I_k)) \subset Z_x(I_k)$}, $Z_x(I_k) \cap \eta_x \neq \{0\}$. Donc $x \in \mathcal{V}(I_{k+1})$.

<u>Théorème 4</u> : Supposons que S est vide, c'est-à-dire <u>qu'il n'existe pas</u> au voisinage de $z_o$, de germe de sous-ensemble analytique réel de dimension holomorphe positive, alors on a :

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(I_{k+1}) < \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}(I_k)$$

<u>Idée de la démonstration</u>

Soit V une feuille régulière de $\mathcal{V}(I_k)$. Pour tout voisinage de $z_o$, il existe un ouvert non vide $\omega$ tel que

$$Z_x(V(I_k)) = Z_x(I_k) \qquad \forall x \in \omega \cap V .$$

Alors il existe nécessairement $x \in \omega \cap V$ tel que $x \notin \mathcal{V}(I_{k+1})$, d'après la proposition 2 .
Il en découle le théorème 4. L'affirmation que $Z_x(\mathcal{V}(I_k)) = Z_x(I_k)$ $\forall x \in \omega \cap V$ provient du fait que $I_k = \sqrt[\mathbb{R}]{I_k}$ et des inégalités de Łojasiewicz.

<u>Corollaire 5</u> : Sous l'hypothèse du théorème 4, on a $1 \in I_{2n}$ .

<u>Corollaire 6</u> : Si $\Omega$ est pseudo-convexe au voisinage de $z_o$, dans $\partial\Omega$ , à frontière analytique réelle, on a une estimation sous-elliptique en $z_o$.

<u>Remarque</u> : K. Diederich et J. E. Fornaess ont montre que l'hypothèse de J. J. Kohn sur la <u>non-existence au voisinage de</u> $z_o$ d'un sous-ensemble analytique réel de dimension holomorphe positive est équivalente à la <u>non-existence au voisinage de</u> $z_o$ d'une variété analytique complexe de dimension positive [2].

---

## BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Derridj : Régularité pour $\bar{\partial}$ dans quelques domaines faiblement pseudo-convexes. A paraître, J. of Diff. Geometry.

[2] K. Diederich, J. E. Fornaess : Pseudo-convex domains with real analytic boundary. A paraître.

[3] G. B. Folland, J. J. Kohn : The $\bar{\partial}$-Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex. Princeton Univ. Press.

[4] P. Greiner : Subelliptic estimates for $\bar{\partial}$ in $\mathbb{C}^2$. J. of Diff. Geom. (1972).

[5] J. J. Kohn : Sufficient conditions for subellipticity on weaky pseudo-convex domains. P. N.A.S. vol. 74 n° 6 .

[6] J. J. Kohn : Boundary behavior of $\bar{\partial}$ on weakly pseudo-convex manifolds of dimension two. J. of Diff. Geom. 6 (1972).

[7] J. J. Kohn : Subellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem on weakly pseudo-convex domains. Ren. Analyse compl. (U. Montreal Press, Montreal).

---