B. Lascar

Méthodes L^2 pour des équations aux dérivées partielles dépendant d'une infinité de variables

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 5, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A6_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU · 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

METHODES L^2 POUR DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES DEPENDANT D'UNE INFINITE DE VARIABLES

par B. LASCAR

Exposé n° V

2 Décembre 1975

§ 0. INTRODUCTION

Nous donnons ici une caractérisation de l'ellipticité pour une classe d'opérateurs différentiels sur un espace de Hilbert, en utilisant des classes de Sobolev adaptées. Pour ce faire, nous introduisons un formalisme utilisé en mécanique quantique [1], [2] et généralisé à la dimension infinie dans [3].

Décrivons la situation : nous avons trois espaces de Hilbert réels séparables : $E' \xhookrightarrow{i'} X \xhookrightarrow{i} E$ i et i' sont injectives et à image dense. E' dual de E, X identifié à son dual, et on suppose en outre que i (et donc i') sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt et ainsi l'image par i de la probabilité cylindrique gaussienne canonique de X est une probabilité de Radon ν sur E. On note : $\|x\|'$, $|x|$ et $\|x\|$ les normes respectives de E', X, E. Sous les hypothèses précédentes, il est clair que l'on a :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & E \\ X \arrow[ur, "\ell"'] & \end{tikzcd}$$

où j symétrique Hilbert-Schmidt positive, ℓ isométrique. On peut donc construire une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X avec $j(e_n) = \frac{1}{a_n} e_n$ $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{a_n^2} = 1$ et où

$\varepsilon_n = \ell(e_n)$ est une base hilbertienne de E. On note que l'on a $(e_n) \in E'$, on écrira $(x|y)$ la dualité $E' \times E$ ou encore le produit scalaire dans X.

$E \hat{\otimes} F$ désignera le complété pour la topologie de Hilbert-Schmidt du produit tensoriel de 2 hilberts E et F.

On note $E^{\mathbb{C}}$, $X^{\mathbb{C}}$, $E'^{\mathbb{C}}$ les complexifiés de ces espaces et $\|\zeta\|$, $|\zeta|$, $\|\zeta\|'$ leurs normes et $\nu_{\mathbb{C}}(\zeta)$ l'image dans $E^{\mathbb{C}}$ de la mesure gaussienne de variance 1/2 sur $X^{\mathbb{C}}$.

On introduira des classes de Sobolev $\mathcal{L}^S(X,E)$ et des operateurs différentiels de la forme $P(x,D) = \sum_{0\leq \ell+k\leq m} \operatorname{div}_k(a_{k\ell}(x).D^{\ell})$ où

$a_{k\ell}(x) \in C_b^{\infty}(E, \mathcal{L}(\hat{\bigodot}_{\ell} E, \hat{\bigodot}_k E'))$, C_b^{∞} : C^{∞} Fréchet différentiable sur E et bornés

On écrit : $P_m(x,\bar{\zeta},\zeta) = \sum_{\ell+k=m} (a_{k\ell}(x).(i\zeta)^{\ell}.(i\bar{\zeta})^k)$ où $\zeta^{\ell} = \zeta \otimes \ldots \otimes \zeta \in \widehat{\bigodot_{\ell}} E$

et on a :

<u>Théorème 1</u> : Soit $P(x,D)$ comme ci-dessus mais où les $a_{k\ell}$ sont constants alors les propositions sont équivalentes :

(i) $\forall\, s \in \mathbb{R} \quad \exists\, C > 0$; $\forall\, u \in \mathcal{L}^{s+m}$ on a $\|u\|^2_{s+m} \leq C(\|Pu\|^2_s + \|u\|^2_{s+m-1})$

(ii) $\exists\, C > 0$, $\forall\, \zeta \in E^{\mathbb{C}} \quad |P_m(\bar{\zeta},\zeta)| \geq C\|\zeta\|^m$

(iii) $\exists\, Q,R$ opérateurs linéaires continus $\quad Q : \mathcal{L}^s \to \mathcal{L}^{s+m}$, $\forall\, s$ et $R : \mathcal{L}^s \to \mathcal{L}^{s+N}$ $\forall s$, $\forall N$; tels que $Q \circ P = I + R$ (et d'ailleurs Q' et R' avec : $P \circ Q' = I + R'$).

(iv) $u \in \mathcal{L}^{-\infty}$, $Pu \in \mathcal{L}^s \Rightarrow u \in \mathcal{L}^{s+m}$.

<u>Théorème 2</u> : On suppose maintenant que les $a_{k\ell} \in C^{\infty}_b(E,\mathcal{L}(\widehat{\bigodot_{\ell}} E, \widehat{\bigodot_{k}} E'))$, il est équivalent de dire :

(i) $\quad \forall\, s \in \mathbb{R}$, $\forall\, K \subset\subset E$, $\quad \exists\, C > 0$ tel que supp $u \subset K$, $u \in \mathcal{L}^{s+m}$ implique:

$$\|u\|^2_{s+m} \leq C(\|Pu\|^2_s + \|u\|^2_{s+m-1})$$

(ii) $\forall\, K \subset\subset E \quad \exists\, C > 0$ tel que $\forall\, \xi \in E$, $\forall x \in K \quad |P_m(x,\xi,\xi)| \geq C\|\xi\|^m$

(iii) Si $u \in \mathcal{L}^{-\infty}$, $Pu \in \mathcal{L}^s_{loc} \Rightarrow u \in \mathcal{L}^{s+m}_{loc}$.

<u>Remarques</u> : 1) Notre premier résultat est, en dimension finie, le cas des opérateurs à coefficients polynomes "elliptiques" en (x,ξ) de [7], en effet notre espace $\mathcal{L}^s$ peut se décrire comme :

$$s \in \mathbb{N} \text{ , } e^{+\frac{x^2}{4}} . \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid x^{\alpha} D^{\beta}_x u \in L^2 \text{ pour } |\alpha| + |\beta) \leq s\}$$

et le symbole complet de $P(x,D)$ est de la forme :

$$\sigma_P = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq m} a_{\alpha\beta}\, H_{\alpha}(x+i\xi)(i\xi)^{\beta} \quad \text{où}$$

$$H_\alpha(x) = (-1)^\alpha e^{\frac{1}{2}|x|^2} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$$

et donc si on pose $P'(x,D) = e^{\frac{x^2}{4}} P(x,D)\, e^{-\frac{x^2}{4}}$ $P'(x,D)$ a une partie principale en (x,ξ) donnée par :

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|=m} a_{\alpha\beta} \left(i\xi - \frac{x}{2}\right)^\alpha \left(i\xi - \frac{x}{2}\right)^\beta \quad .$$

et si on pose $\zeta = \xi + i\,\frac{x}{2}$ le lien avec notre condition (ii) est clair.

2) K désigne un compact pour la topologie de E, la possibilité de définir un support et d'avoir suffisamment de fonctions à support compact, est décrite dans [5], le lien avec la dimension finie est ici évident car $P_m(x,\xi,\xi) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x,(i\xi)^{\alpha+\beta})$ est bien le symbole principal au sens ordinaire de $P(x,D)$ ou encore de $P'(x,D)$.

§ 1. CONSTRUCTION DES CLASSES $\mathcal{L}^s(X,E)$

Définition 1 : Soit $s \in \mathbb{N}$. On dit que $u \in \mathcal{L}^s(X,E)$ si $u \times \nu$ est une mesure cylindrique de $L^2(E)$ qui vérifie : $0 \le j \le s$ $D^j u$ (différentielle d'ordre j) $D^j u \in L^2_\nu(E, \overset{j}{\hat{\otimes}} E)$. Ceci est équivalent à la propriéte suivante :

si $(X_i)_{i\in I}$ sont les quotients de X de dimension finie, on a $u = (u_i)$ avec $u_i \in L^2_{\nu_i}(X_i)$, ν_i mesure gaussienne sur X_i. $(u_i\nu_i)$ forme un système cohérent de mesures et $0 \le j \le s$, on a : $\sup_i \int \|D^j u_i\|^2_{\hat{\otimes}_j E}\, d\nu_i(x) < +\infty$, voir [4].

On peut se représenter concrètement cet espace comme :

les u tels que : $\|u\|_s^2 = \sum_{0\le|\alpha|\le s} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}\, \frac{1}{a^{2\alpha}} \int \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u\right|^2 d\nu(x) < +\infty$ où

$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u$ représente les dérivées partielles de u dans les directions (e_n) construites plus haut .

Nous allons donner une autre caractérisation plus utilisable. il faut pour cela introduire l'espace de Fock : $F(X^{\mathbb{C}}) = \overset{\infty}{\underset{j=0}{\oplus}} \overset{\frown}{\underset{j}{\odot}} X^{\mathbb{C}}$

c'est-à-dire qu'un élément $\phi \in F$ est une fonction entière qui s'écrit

$$\phi(\zeta) = \sum_\gamma c_\gamma \frac{\zeta^\gamma}{\gamma!^{1/2}} \quad \text{avec } \sum_\gamma |c_\gamma|^2 < +\infty$$

ce qui est encore équivalent à $\phi \in L^2_\nu(E^{\mathbb{C}})$ et on a : $\int |\phi(\zeta)|^2 d\nu(\zeta) = \sum_\gamma |c_\gamma|^2$.

Si $u \in L^2_\nu(E)$ on pose $\phi(\xi) = e^{\frac{1}{2}\xi^2} \widehat{u\nu}(\xi)$ et dans ces conditions, l'application $u \to \phi$ est une isométrie de $L^2_\nu(E)$ sur $L^2_\nu(E^{\mathbb{C}}) \cap \mathcal{H}(X^{\mathbb{C}}) = F\,(X^{\mathbb{C}})$ [3] où $\mathcal{H}$ désigne les fonctions entières sur $X^{\mathbb{C}}$.

__P.1.1__ : Soit $s \in \mathbb{N}$, $u \in \mathcal{L}^s(X,E)$ si et seulement si $\phi(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \widehat{u\nu}(\xi)$ vérifie $\|\phi\|_s^2 = \int |\phi(\zeta)|^2 (1 + \|\zeta\|^2)^s \, d\nu(\zeta) < +\infty$ de plus $\|\phi\|_s$ est une norme équivalente à $\|u\|_s$. La proposition suivante va donc nous permettre de définir $\mathcal{L}^s$, $\forall s \in \mathbb{R}$:

__P.1.2__ : Si $\Lambda^s(X,E) = \{\phi \in \mathcal{H}(X^{\mathbb{C}}) \mid \exists\, r > 2 \text{ avec } \phi \in L^r_\nu$ et $\|\phi\|_s^2 = \int |\phi(\zeta)|^2 (1 + \|\zeta\|^2)^s d\nu(\zeta) < +\infty\}$, $s \in \mathbb{R}$ on a :

- $\Lambda^s(X,E)$ est un sous espace hilbertien fermé de $L^2_{\nu(1+\|\zeta\|^2)^s}$

- l'opérateur $\pi f(z) = \int f(\zeta)\, e^{z\bar{\zeta}}\, d\nu(\zeta)$ est continu de $L^2_{\nu(1+\|\zeta\|^2)^s}$ dans Λ^s, auto-adjoint dans L^2_ν et identique sur $\Lambda^s(X,E)$.

Ceci permet donc de définir $\mathcal{L}^s(X,E)$, $\forall s \in \mathbb{R}$ comme l'ensemble des distributions cylindriques $u\nu$ sur X dont les transformées de Fourier appartiennent à

$$e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \Lambda^s(X,E) .$$

Il est clair que pour $s \geq 0$, $K^s(X) \subset \mathcal{L}^s(X,E)$ $K^s(X)$ est introduit dans [4] et $s < 0$, $\mathcal{L}^s \subset K^s$, ceci permet de définir avec [5] la notion de support dans $\mathcal{L}^{-\infty}$. On voit également qu'on peut identifier le dual de $\mathcal{L}^s$ à $\mathcal{L}^{-s}$. Etudions brièvement les opérateurs différentiels, on a :

P.1.3 : L'opérateur $u \to D^j u$ opère de $\mathcal{L}^s(X.E) \to \mathcal{L}^{s-j}\,\hat{\otimes}\,(\hat{\bigodot_j})E$ et donc par transposition, on a l'opérateur :

$$(-1)^j \mathrm{div}_j : \mathcal{L}^s(X,E)\ \hat{\otimes}\ \hat{\bigodot_j} E' \to \mathcal{L}^{s-j}(X,E).$$

et donc par composition si $a_{k\ell}(x) \in C_b^\infty(E, \mathcal{L}(\hat{\bigodot_\ell} E, \hat{\bigodot_k} E'))$, l'opérateur $P(x,D) = \sum_{0 \le \ell + k \le m} \mathrm{div}_k(a_{k\ell}(x).D^\ell)$ opère de $\mathcal{L}^s \to \mathcal{L}^{s-m}$.

On se réfère à [5] pour la démonstration. Pour construire des paramétrix, on va étudier des opérateurs dans l'espace de Fock.

Remarque : Les injections $\mathcal{L}^s \to \mathcal{L}^t$, $t < s$ ne sont compactes qu'en dimension finie. [5].

§ 2. OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS DANS L'ESPACE DE FOCK

Définition 2.1 : On appelle $\mathring{S}(X)$ la classe des opérateurs de la forme $A\,\phi(z) = \int \mathring{A}(\bar{\zeta},\zeta)\phi(\zeta)\, e^{z\bar{\zeta}}\, d\nu$ où $\mathring{A}(\bar{\zeta},\zeta) \in L^2_\nu(E^{\mathbb{C}})$. Ces opérateurs admettent au moins pour domaine l'espace $\mathrm{Exp}_{cyl}(X^{\mathbb{C}}) = \{\phi \in \mathcal{H}(X^{\mathbb{C}})$, cylindriques et qui vérifient $|\phi(\zeta)| < C \exp(B|p(\zeta)|)$ p semi-norme cylindrique$\}$. $\mathring{A}(\bar{\zeta},\zeta)$ s'appelle l'"Anti-Wick symbol" voir [2] et [3] pour l'extension en dimension infinie.

Pour de tels opérateurs, on définit le "Wick symbol" par : $A(z,\bar{\zeta}) = e^{-z\bar{\zeta}}(A.e^{\bar{\zeta}.w}, e^{\bar{z}.w})$, $A(z,\zeta)$ est une fonction entière en z et en $\bar{\zeta}$, on a : $A(z,\bar{\zeta}) = e^{-z.\bar{\zeta}} \int \mathring{A}(\bar{w},w)\, e^{z\bar{w} + \bar{\zeta}.w}\, d\nu(w)$, on a :

P.2.1 : 1) Si $\mathring{A} \in L^2_\nu(E^{\mathbb{C}})$ alors $A(z,\bar{\zeta}) \in \mathcal{H}(X^{\mathbb{C}} \times X^{\mathbb{C}})$

2) Soit $P_{\lambda,\mu} = (-1)^{|\lambda|+|\mu|} e^{z\bar{z}} (\frac{\partial}{\partial z})^\mu (\frac{\partial}{\partial \bar{z}})^\lambda e^{-z\bar{z}}$

$\int P_{\lambda,\mu} \overline{P_{\lambda',\mu'}}\, d\nu(\zeta) = \delta_{\lambda\lambda'}\, \delta_{\mu\mu'}\, \lambda!\,\mu!$ et les $P_{\lambda,\mu}$ forment un système orthogonal et total de $L^2_\nu(E^{\mathbb{C}})$ donc $\mathring{A} = \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda,\mu} P_{\lambda,\mu}$ où $\sum_{\lambda,\mu} |a_{\lambda,\mu}|^2 \lambda!\mu! = \int |\mathring{A}|^2 d\nu < +\infty$, dans ces conditions $A(z,\bar{\zeta}) = \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda,\mu} z^\lambda \bar{\zeta}^\mu$

et $\iint |A(z,\bar\zeta)|^2 d\nu(z)\, d\nu(\zeta)$ $\quad \int |\mathring{A}|^2 d\nu(\zeta)$.

3) Si $A(z,\bar\zeta)$ est un polynôme, on a $\mathring{A}(z,\bar z) = \sum_\rho \frac{(-1)^\rho}{\rho!} \partial_z^\rho \partial_{\bar z}^\rho A(z,\bar z)$.

Ces formules permettent de passer des Wick symbol aux anti-Wick symbols et réciproquement. Cherchons les Wick symbols des opérateurs différentiels :

<u>P.2.2</u> : Si $P(x,D) = \mathrm{div}_j(a_{jk}\circ D^k)$ le Wick symbol de l'opérateur correspondant est :

$$A(z,\bar\zeta) = (a_{jk}(iz)^k,(i\bar\zeta)^j) \quad \text{, quand } a_{jk} \text{ constant.}$$

Pour l'opérateur de multiplication par φ : $u(x) \to \varphi(x)\, u(x)$ il correspond l'opérateur de Wick symbol $\tilde\varphi(z-\bar\zeta)$ où $\tilde\varphi = e^{+\frac{1}{2}\xi^2}\, \widehat{\varphi\nu}(\xi)$.

Introduisons une classe de symboles :

<u>Définition 2.2</u> : $S^m = \{\mathring{A}(\bar\zeta,\zeta) \mid \mathring{A}(\bar\zeta,\zeta)\, C^\infty$ Fréchet différentiable sur E et $|||D^j \mathring{A}(\bar\zeta,\zeta)|||_j \leq C\,(1+\|\zeta\|^2)^{\frac{m-j}{2}}\}$, on a désigné par $|||\ \ |||_j$ la norme usuelle des applications j-linéaires continues sur E (celle de $(\widehat{\bigodot}_j^\pi E)'$).

<u>Exemple</u> : 1) $\mathring{A}(\bar\zeta,\zeta) = (a\circ\zeta^k,\bar\zeta^\ell)$ où $a \in \mathcal{L}(\widehat{\bigodot}_k E, \widehat{\bigodot}_\ell E')$ est dans $S^{k+\ell}$.

2) On remarque $\mathring{A} \in S^m$ implique :

$$|\partial_z^\lambda \partial_{\bar z}^\mu \mathring{A}(z,\bar z)| \leq \frac{C}{a^\lambda a^\mu}\,(1+\|z\|^2)^{\frac{m}{2}-\frac{|\lambda|+|\mu|}{2}}$$

on notera L^m les opérateurs correspondants à des anti-Wick symboles de S^m et on a :

<u>P.2.3</u> : Si $A \in L^m$ alors $A : \Lambda^s \to \Lambda^{s-m}$ avec une norme $\leq C \sup_\zeta \frac{|\mathring{A}(\bar\zeta,\zeta)|}{(1+\|\zeta\|^2)^{\frac{m}{2}}}$

ceci est évident car on a $A\phi = \pi(\mathring{A}\phi)$ et que π est continu.

On voit facilement que :

<u>P.2.4</u> : Si $P(x,D) = \sum_{0\leq \ell+k\leq m} \mathrm{div}_k a_{k\ell}\circ D^\ell$ où $a_{k\ell}$ sont constants, si $\mathring{A}(\bar\zeta,\zeta)$ désigne l'anti-Wick symbole de l'opérateur sur le Fock correspondant à $P(x,D)$ alors $P_m(\bar\zeta,\zeta) - \mathring{A}(\bar\zeta,\zeta) \in S^{m-1}$.

P.2.5 : Composition des opérateurs .

Soit $B = Op(\overset{\circ}{B}) \in L^{m'}$ $A = Op(\overset{\circ}{A}) \in L^{m}$, on suppose que $\overset{\circ}{A}$ ou $\overset{\circ}{B}$ est un polynôme alors $C = B \circ A \in L^{m+m'}$ et $\overset{\circ}{C}(z,\overline{z}) = \sum_{\lambda} \frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda !} \partial_{\zeta}^{\lambda}\overset{\circ}{B}\ \partial_{\overline{\zeta}}^{\lambda} \overset{\circ}{A}$ avec $\forall\ j \in \mathbb{N}$:

$$\overset{\circ}{C}_j(\overline{\zeta}.\zeta) = \sum_{|\lambda|=j} \frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda !} \partial_{\zeta}^{\lambda}\overset{\circ}{B}\partial_{\overline{\zeta}}^{\lambda}\overset{\circ}{A} \in S^{m+m'-2j} .$$

Remarques : 1) la classe L^m telle que nous l'avons définie n'est pas stable par composition si $\overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{B}$ sont quelconques ; elle ne contient pas en général les opérateurs de multiplication par des fonctions $\varphi(x)$ arbitraires.

2) Si $a_j \in S^{m_j}$ avec $m_j \downarrow -\infty$ alors il existe $a \in S^m$ avec $a \sim \sum_j a_j$ au sens classique.

§ 3. DEMONSTRATION DES THEOREMES

Démonstration du théorème 1 : (iv) ⇒ (i) classique ; (iii) ⇒ (i) évident, montrons : (i) ⇒ (ii)

On montre qu'on peut se ramener à une forme quadratique différentielle :

$$\sum_{\substack{k+\ell=m \\ k'+\ell'=m}} (-1)^{k+k'} (a_{k\ell} \otimes a^{*}_{k'\ell'}, D^{\ell+k'}u, D^{\ell'+k}u) .$$

Soit l'inégalité :

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \int \frac{|\partial^{\alpha}u|^2}{a^{2\alpha}} d\nu \leq C(\sum_{|\alpha|+|\beta|=2m} a_{\alpha\beta} \int \partial^{\alpha}u\,\overline{\partial^{\beta}u}\, d\nu(x) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|<m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \frac{1}{a^{2\alpha}} \int |\partial^{\alpha}u|^2 d\nu)$$

où $|P_m(\overline{\zeta},\zeta)|^2 = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2m} a_{\alpha\beta}\, \zeta^{\alpha}\overline{\zeta}^{\beta}$, il suffit donc de prendre $u(x) = e^{i\lambda(x|\zeta)}$ et de faire $\lambda \to +\infty$ pour avoir (ii).

(ii) ⇒ (iii)

On construit la paramétrix sur l'espace de Fock, ce qui est facile car (ii) signifie que $|\overset{\circ}{A}(\overline{\zeta},\zeta)| \geq C(1+\|\zeta\|^2)^{m/2}$ quand ζ est assez grand, on construit donc la paramétrix comme dans le cas elliptique usuel avec $\frac{\varphi(\|\zeta\|)}{\overset{\circ}{A}(\overline{\zeta},\zeta)}$ où φ est convenable. Le théorème 1 est donc démontré

<u>Démonstration du théorème 2</u> : On a encore (iii) $\Rightarrow$ (i) classique. On montre ensuite que (i) pour $P(x,D)$ est équivalent à (i) pour $P(x_o,D)$ ($a_{k\ell}(x_o)$ constants) si on se limite en outre à des fonctions à support dans un voisinage convenable de x_o, ce que l'on peut faire en utilisant la technique classique, car on sait construire des partitions de l'unité convenables et il est facile de montrer que $[P,\varphi]$ est un opérateur d'ordre m-1.

Pour avoir (i) $\Rightarrow$ (ii), on choisit un compact convenable (en particulier non ν négligeable) et on utilise $u_\lambda(x) = \varphi(x)e^{i\lambda(x|\xi)}$ où $\varphi \in HSC_o^\infty(K)$ voir [5].

Pour voir que (ii) $\Rightarrow$ (i) pour $P(x_o,D)$, on utilise le lemme suivant :

<u>Lemme 3.1</u> : Soit $s \in \mathbb{N}$, $u \in \mathcal{L}^s$ $\operatorname{supp} u \subset \{x \in E \mid \|x\| < R\}$ si $\phi(\xi) = e^{\frac{1}{2}\xi^2}\widehat{u\nu}(\xi)$, soit $\phi \in \Lambda_R^s$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\int |\phi(\zeta)|^2(1+\|\zeta\|^2)^s d\nu \leq \int |\phi(\zeta)|^2(1+\|\zeta\|^2)^s(1+\|\operatorname{Im}\zeta\|)^k\, d\nu$$

$$\leq C_R\int|\phi|^2(1+\|\zeta\|^2)^s d\nu$$

on construit alors $\overset{\circ}{B}(\bar\zeta,\zeta) = \dfrac{\varphi(\xi)}{P_m(x_o,\xi,\xi)}$ si $\zeta = \xi + iy$ et on a

$$|\overset{\circ}{B}(\zeta,\bar\zeta)| \leq C(1+\|y\|^2)^{m/2}(1+\|\zeta\|^2)^{-m/2}$$

le lemme 3.1 montre que $\overset{\circ}{B}$ opère de $\Lambda_R^s \to \Lambda^{s+m}$ pour $s \in \mathbb{N}$ et finalement on voit que l'on peut obtenir avec (ii) (i) pour $P(x_o,D)$ avec $s \in \mathbb{N}$. Pour voir que (i) est valable, $\forall\, s \in \mathbb{R}$, on a besoin des deux lemmes suivants .

<u>Lemme 3.2</u> : Soit $\pi_s = Op((1+\|\zeta\|^2)^{s/2})$, soit $\varphi \in HSC_b^\infty(E)$, φ à support borné alors $[\pi_s,\varphi]$ est d'ordre $s-\frac{1}{2}$, c'est-à-dire applique $\mathcal{L}^\sigma \to \mathcal{L}^{\sigma-s+\frac{1}{2}}$ $\forall\, \sigma \in \mathbb{R}$.(on a désigné par la même lettre l'opérateur dans les Λ^σ et l'opérateur correspondant dans les $\mathcal{L}^\sigma$).

Démonstration du lemme 3.2 : Nous avons vu que le calcul symbolique que nous avons développé ci-dessus est ici insuffisant (Remarque 2 de 2.5). Nous faisons donc une démonstration qui utilise l'écriture

$$\pi_s = \int_0^{+\infty} \int t^{-\frac{s}{2}-1} e^{-t} \tau_{yt^{1/2}} d\nu'(y)$$

quand Res < 0 et où

$$\tau_y u(x) = u(x+2y') e^{-|y'|^2 - (x|y') + i(x|y'') + iy'y'' - \frac{1}{2}|y|^2}$$

si $y \in X^{\mathbb{C}}$, $y = y' + iy''$. $d\nu'(y)$ est la mesure gaussienne de variance 1/2 sur $E'^{\mathbb{C}}$ qui est de Radon sur $X^{\mathbb{C}}$. Pour les autres valeurs de s, on utilise le théorème des 3 droites.

Lemme 3.3 : Soient s et s' $\in \mathbb{R}$ alors

$$\pi_s \circ \pi_{s'} = \pi_{s+s'} + R_{s+s'-1} \quad R_{s+s'-1} : \mathcal{L}^{\sigma} \to \mathcal{L}^{\sigma-(s+s')+1}$$

la démonstration utilise également l'écriture de

$$\pi_s = \iint_0^{+\infty} t^{-\frac{s}{2}-1} e^{-t} \tau_y \, d\nu'_{t^{1/2}}(y)$$

pour Res < 0 et Res' < 0 et

$$\pi_{s'} = \int_0^{+\infty} \int t'^{-1-\frac{s'}{2}} e^{-t'} \tau_z \, d\nu'_{t',1/2}(z) \qquad \text{or}$$

$$\tau_z \circ \tau_y = \tau_{z+y} \, e^{\bar{z}.y}$$

On voit donc que :

$$\pi_{s'} \circ \pi_s = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1-\frac{s}{2}} e^{-t'} t'^{-1-\frac{s'}{2}} dt dt' \iint \tau_{y+z} \, e^{\bar{z}.y} d\nu'_{t^{1/2}}(y) \, d\nu'_{t',1/2}(z)$$

comme τ_y est l'opérateur dont l'anti-Wick symbole est $e^{i(\bar{y}.\zeta + y\bar{\zeta})}$, on voit que

$$(\pi_{s'} \circ \pi_s)(z,\bar{z}) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-} \; t^{-1-\frac{s}{2}} t'^{-1-\frac{s'}{2}} e^{-t'} e^{-t\|z\|^2} e^{-t'\|z\|^2} e^{-tt'|j^* j(z)|^2} dt\,dt'$$

avec $|j^* j(z)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|z_j|^2}{a_j^4}$ on conclut alors aisément que

$$\pi_s \circ \pi_{s'}(z,\bar{z}) = \pi_s(z,\bar{z})\pi_{s'}(z,\bar{z}) + R(z,\bar{z})$$

avec $|R(z,\bar{z})| \leq C\,\|z\|^2\,(1+\|z\|^2)^{\frac{s+s'}{2}-2}$. Pour s et s' quelconques, on écrit $s = 2k+\sigma$ où $\sigma < 0$ et comme π_{2k} est un polynôme, on peut utiliser notre calcul symbolique de P.2.5. Finalement, on a obtenu (ii) $\Rightarrow$ (i).

Montrons que (i) $\Rightarrow$ (iii), il faut utiliser une régularisation et pour cela on utilise les opérateurs $A_\varepsilon = Op(\exp(-\varepsilon^2\|\zeta\|^2))$ on a alors le lemme :

<u>Lemme 3.4</u> : $a(x) \in C_b^\infty(E, \mathcal{L}(F,G))$, F,G hilbert alors $a(x)A_\varepsilon - A_\varepsilon a(x)$ est un ensemble borné d'opérateurs de $\mathcal{L}^s(X,E)\hat{\otimes} F \to \mathcal{L}^{s+1}(X,E)\hat{\otimes} G$ (on a aussi désigné par A_ε l'opérateur de $\mathcal{L}^\sigma$ correspondant à l'opérateur d'anti Wick $\exp(-\varepsilon^2\|\zeta\|^2)$ et on a écrit A_ε au lieu de $A_\varepsilon \hat{\otimes} Id_F$ ou $A_\varepsilon \hat{\otimes} Id_G$).

La démonstration utilise comme ci-dessus l'écriture $A_\varepsilon u = \int \tau_{\varepsilon y} u \, d\nu'(y)$. Il est donc clair que $[P, A_\varepsilon]$ est un ensemble borné d'opérateurs de degré m-1 ce qui montre facilement que (i) $\Rightarrow$ (iii) et achève donc la démonstration du théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Bargmann : (II) Comm. Pure and Appl. Maths 20 1967.

[2] F. A. Berezin : Wick and Anti-Wick operator symbols, Mat. Sbornick (t.86) (1971).

[3] P. Krée et R. Raczka : Kernels of integral operators in quantum field theory. A paraître.

[4] P. Krée : Exposés au séminaire P. Krée (1974-1975), multigraphié.

[5] B. Lascar : N. C. R. A. S., t.280, juin 1975.

[6] B. Lascar : Exposés au séminaire P. Krée (1974-1975) multigraphié.

[7] V. V. Grusin : On a class of hypoelliptic operators. Mat Sbornick 83 (125) 1970.