C. Mattera

Régularité pour des problèmes elliptiques singuliers

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 14, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A15_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1975-1976

REGULARITE POUR DES PROBLEMES ELLIPTIQUES SINGULIERS

par C. MATTERA

Exposé n° XIV

24 Février 1976

§ 1. INTRODUCTION

J'étudie la régularité d'opérateurs elliptiques singuliers dans un ouvert borné Ω de R^n, $\bar{\Omega}$ étant une variété compacte à bord Γ de classe C^∞.

Jusqu'à maintenant, l'étude de la régularité maximum pour ces problèmes a porté, essentiellement, sur des opérateurs qui dégénèrent en fonction de la distance au bord de l'ouvert : ces opérateurs dépendent d'une fonction φ C^∞ de R^n dans R telle que :

$$\Omega = \{x \in R^n | \varphi(x) > 0\}$$
$$\Gamma = \{x \in R^n | \varphi(x) = 0\}$$
$$d\varphi \neq 0 \text{ sur } \Gamma \text{ (} d\varphi \text{ est la différentielle de } \varphi\text{)}$$

Plus précisément, si on note R^n_+ le demi-espace, $R^n_+ = \{(x,t) \in R^n, x \in R^{n-1} t \in R_+\}$ ces opérateurs se localisent au voisinage du bord sous la forme :

$$Lu(x,t) = \sum_{|\alpha| + p \leq m} a_{\alpha,p}(x,t) t^{\mu(\alpha,p)} D^\alpha_x D^p_t u(x,t)$$

où $\mu(\alpha,p)$ est une fonction de α et de p.

J'indique, ci-dessous, les résultats de régularité que j'ai obtenus [cf.[12]] concernant des opérateurs elliptiques singuliers qui ne se localisent pas sous cette forme. En effet, ils dépendent, soit uniquement, soit simultanément avec φ, de l'une des fonctions poids ci-dessous (A,B ou C) :

A. La distance δ au bord $\partial\omega$ d'un autre ouvert ω :
ω désignera alors un ouvert de bord $\partial\omega$ variété de dimension n-1 et de classe C^∞ et δ une fonction C^∞ de R^n dans R telle que :

$$\omega = \{x \in R^n | \delta(x) > 0\}$$
$$\partial\omega = \{x \in R^n | \delta(x) = 0\}$$
$$d\delta \neq 0 \text{ sur } \partial\omega$$

<u>Exemples</u> : Dans R^2_+ au voisinage de 0

$$\begin{cases} Au = D_t^2 u + D_x[(t+x^2)^k D_x u] + u & k \in \mathbb{N} \quad \delta = t + x^2 \\ Au = D_t[tD_t u] + D_x[(t+x^2)D_x u] + u & \delta = t + x^2 \quad \varphi = t \\ Au = D_t^2 u + D_x[(t-x^2)^{2k} D_x u] + u & k \in \mathbb{N} \quad \delta = t - x^2 \end{cases}$$

B. La distance $r(x)$ à un point x_o fixé de Ω ou de Γ :

<u>Exemple</u> : Au voisinage de $x_o = 0$ dans R^2 ou dans R^2_+ :

$$Au = D_t^2 u + D_x[(t^2 + x^2)^k D_x u] + u \qquad k \in \mathbb{N}$$

C. Une autre fonction poids nulle en un point :

<u>Exemple</u> : Au voisinage de $x_o = 0$ dans R^2 ou dans R^2_+ :

$$Au = D_t^2 u + D_x[(t^4 + x^4)^k D_x u] + u \qquad k \in \mathbb{N} .$$

§ 2. <u>BREF HISTORIQUE DE LA REGULARITE DES OPERATEURS ELLIPTIQUES SINGULIERS</u>

Pour situer les classes d'opérateurs que j'étudie aux paragraphes suivants, je rappelle, brièvement, celles étudiées jusqu'à maintenant :

a) Le premier résultat de régularité maximum a été obtenu par M. S. Baouendi, dans sa thèse [1], (1967), pour des opérateurs d'ordre 2 variationnels non caractéristiques de la forme :

$$Au = \sum_{0 \le i,j \le n} D_j[a_{ij}\varphi^\rho D_i u] + \Lambda^*[\Lambda u] + cu \qquad (D_o u = u, \ D_j u = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial x_j})$$

où $\rho \in \mathbb{N}$ est pair, Λ est un opérateur homogène d'ordre 1, à coefficients C^∞ réels, transversal à Γ.

<u>Exemple</u> : Dans R^2_+, au voisinage de 0, $Au = D_t^2 u + t^2 D_x^2 u + u$.

Ses résultats furent étendus à ρ impair, dans certains cas, par T Matsuzawa [13].

Exemple : Dans R^2_+, au voisinage de 0, $Au = D_t^2 u + t\, D_x^2 u + u$,
puis, dans le cas général d'opérateurs d'ordre 2m non caractéristiques non nécessairement variationnels, par M. I. Višik et V. V. Grušin [19] (1969).

Exemple : Dans R^2_+, au voisinage de 0, $Au = D_t^4 u + t^4 D_x^4 u + D_t u$

b) Un premier type d'opérateurs caractéristiques fut étudié par H. Triebel [17] (1968)

$$Au = \sum_{0 \le i,j \le n} D_j [a_{ij} \varphi D_i u] + \sum_{1 \le j,k \le n} \Lambda^*_{jk} [\Lambda_{jk} u]$$

où $\Lambda_{jk} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} D_k u - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} D_j u$.

(Les $i\Lambda_{jk}$ sont des opérateurs d'ordre 1 à coefficients C^∞ réels tangents à Γ et de rang $n-1$ sur Γ).

Exemple : Dans R^2_+, au voisinage de 0, $Au = D_t [t\, D_t u] + D_x^2 u + tu$

H. Triebel calculait les domaines des itérés de A et en déduisait que A est un isomorphisme de $\mathcal{D}[\bar{\Omega}]$. L'analyticité de ces opérateurs fut étudiée par M. S. Baouendi et C. Goulaouic [4] et la régularité H^k par P. Bolley et J. Camus [5].

c) Un deuxième type d'opérateurs caractéristiques fut étudié par M. S. Baouendi et C. Goulaouic [2] (1969): $Au = \sum_{0 \le i,j \le n} D_j [a_{ij} \varphi D_i u]$.
Pour ces opérateurs, ils déterminent la régularité H^k et le domaine des itérés. Ces opérateurs sont des isomorphismes de $\mathcal{D}[\bar{\Omega}]$.

Exemple : Dans R^2_+ au voisinage de 0

$$Au = D_t [t\, D_t u] + D_x [t\, D_x u] + tu$$

Ces résultats furent étendus à des opérateurs de la forme $\sum_{h=o}^{\inf(m,k)} P^{m-h} [\varphi^{k-h} u]$, P^m proprement elliptique d'ordre m et P^{m-h} d'ordre $\le m-h$ par N. Shimakura [16] et P. Bolley et J. Camus [6] (1972).

d) Enfin, un travail récent (1975) de P. Bolley, J. Camus et B. Helffer [7] englobe tous les opérateurs précédents par l'étude de l'hypoellitpicité partielle des opérateurs localement de la forme :

$$Lu(x,t) = \sum_{|\alpha|+p\leq m} a_{\alpha p}(x,t)t^{k+\delta|\alpha|+p}D_x^\alpha D_t^p u(x,t)$$

e) M. I. Višik et V. V. Grušin [18] en 1969 puis D. Prévosto et J. Rolland [15] en 1975 ont étudié des opérateurs d'un type différent dont le modèle est : $Au = \sum_{0\leq i,j\leq n} D_j[a_{ij}\varphi^\rho D_i u] + cu$, $\rho \in \mathbb{N}$, $\rho > 2$.

Exemple : Dans R^2_+ au voisinage de 0

$$Au = D_t[t^3, D_t u] + D_x[t^3 D_x u] + u$$

f) Un type d'opérateurs ne dégénérant pas en fonction de la distance au bord a été étudié par L. Hörmander [9] puis M. Derridj [8] du point de vue de l'hypoellipticité : il s'agit des opérateurs de la forme

$\sum_{i=1}^{r} X_i^2 u + X_o u + cu$, X_i champ de vecteurs C^∞ réel. M. Derridj obtient aussi des résultats de régularité H^k partiels (c'est-à-dire un certain contrôle de la régularité mais pas d'isomorphisme).

Dans le même ordre d'idées, J. J. Kohn et L. Nirenberg [11] et Mme O. A. Oleinik [14] ont étudié les opérateurs d'ordre 2 à coefficients réels, à forme caractéristique non négative, essentiellement du point de vue de l'existence et de l'unicité des solutions mais aussi de l'hypoellipticité et de la régularité partielle.

Du point de vue technique, il y a essentiellement deux méthodes :

a) la régularisation elliptique que je rappelle et utilise ci-dessous, bien adaptée pour des opérateurs d'ordre 2 variationnels mais techniquement délicate pour les opérateurs d'ordre > 2.

b) Les inégalités à priori déduites de théorèmes d'isomorphismes à une variable que l'on transporte à plusieurs variables par transformation de Fourier tangentielle.

La difficulté du problème que j'étudie tient, en partie, au fait que la seconde technique ne semble pas pouvoir être appliquée. J'étudie essentiellement deux types de problèmes :

-Régularité H^k pour les opérateurs obtenus en remplaçant, dans ceux étudiés dans la thèse de M. S. Baouendi [Cf. a)], φ par une autre fonction poids.

-Domaines des itérés pour les opérateurs intermédiaires entre $\sum_{0\leq i,j\leq n} D_j[a_{ij}\varphi D_i u] + \sum_{1\leq j,k\leq n} \Lambda^*_{jk}[\Lambda_{jk} u]$ [cf.b)] et $\sum_{0\leq i,j\leq n} D_j[a_{ij}\varphi D_i u]$ [cf. c)].

Remarquons que ces deux opérateurs n'ont pas le même comportement vis à vis du théorème des itérés [4] [3] ni le même comportement spectral [4] [2].
Je donne aussi des résultats de régularité et de non régularité pour $\sum_{0\leq i,j\leq n} D_j[a_{ij}\delta^\rho D_i u] + cu \quad \rho \geq 2$ [cf. d) et e)].

§ 3. REGULARITE H^k POUR LA 1ère CLASSE D'OPERATEURS

On utilise les notations du I :

A) Soit $Au = \sum_{0\leq i,j\leq n} D_j[a_{ij}\delta^\rho D_i u] + \Lambda^*[\Lambda u] + cu$

où - a_{ij}, $c \in \mathcal{D}[\bar{\Omega}]$

- $\rho \in \mathbb{N}$ est tel que $\delta^\rho \geq 0$ dans $\bar{\Omega}$.

- Λ est un opérateur homogène d'ordre $\underline{1}$ à coefficients C^∞ réels transversal à Γ sur $\Gamma \cap \partial\omega$ et à $\partial\omega$ sur $\partial\omega \cap \bar{\Omega}$.

On considère :

$$a[u,v] = \sum_{0\leq i,j\leq n} \int_\Omega a_{ij}(x)\delta^\rho(x)\, D_i u(x)\overline{D_j v(x)}\,dx + \int_\Omega \Lambda u(x)\,\overline{\Lambda v(x)}\,dx + \int_\Omega c(x)u(x)\overline{v(x)}dx$$

et l'espace variationnel $V = \{u \in L^2[\Omega], \delta^{\frac{\rho}{2}} D_i u \in L^2[\Omega] \quad 0\leq i\leq n \;, \; \Lambda u \in L^2[\Omega]\}$ muni de sa norme naturelle et $\mathring{V}$ l'adhérence de $\mathcal{D}[\Omega]$ dans V avec $\|u\|_{\mathring{V}} = \|u\|_V$.

On fait l'hypothèse de coercivité suivante :
Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $u \in \mathcal{D}[\Omega]$, $\mathrm{Re}\, a[u,u] \geq \alpha\|u\|^2_{\mathring{V}}$.

<u>Exemples</u> : Dans R^2_+ au voisinage de 0, $\Gamma = \{t = 0\}$, $\Lambda = \frac{\partial}{\partial t}$,
$\omega = \{(x,t) \in R^2, \delta(x,t) > 0\}$,

$A_1 u = D_t^2 u + D_x[t^2 D_x u] + u$ ($\delta = \varphi$ opérateur étudié par M. S. Baouendi).

$A_2 u = D_t^2 u + D_x[(t + x^2)^k D_x u] + u \quad k \in \mathbb{N} \quad \delta = t + x^2$

$A_3 u = D_t^2 u + D_x[(t - x^2)^k D_x u] + u \quad k \in \mathbb{N} \quad \delta = t - x^2$

$A_4 u = D_t^2 u + D_x[(t - x)^{2k} D_x u] + u \quad k \in \mathbb{N} \quad (\delta = t - x)$

$A_5 u = D_t^2 u + D_x[(t + e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x^2})^{2k} D_x u] + u \quad k \in \mathbb{N} \quad (\delta = t + e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x^2})$

opérateurs exclus [cf. remarque 4] :

$A_6 u = D_t^2 u + D_x[x^2 D_x u] + u$ (Λ est tangent à $\partial\omega$)

$A_7 u = D_x^2 u + D_t[(t+x^2)^{2k} D_t u] + u$ (Λ est tangent à Γ) $k \in \mathbb{N}$.

Théorème 1 : On suppose ρ pair. Soient pour $k \in \mathbb{N}$:

$$W^k = \{u \in H^{k-2}[\Omega],\ \Lambda u \in H^{k-2}[\Omega],\ \Lambda^2 u \in H^{k-2}[\Omega], \delta^\rho D_i u \in H^{k-1}[\Omega] \text{ pour } 0 \leq i \leq n\}$$

Alors pour $u \in \mathring{V}$ et $k \in \mathbb{N}$: $Au \in H^k[\Omega] \Leftrightarrow u \in W^{k+2}$.

Remarque 1 : Le résultat ci-dessus s'interprète comme la régularité du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} Au \in H^k(\Omega) \\ \gamma u = 0 \quad (\gamma u = \text{trace de } u) \\ u \in V \end{cases}$$

Corollaire 1 : Pour $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ $g \in C^\infty(\Gamma)$ il existe u, unique, dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ tel que : $\begin{cases} Au = f \\ u|\Gamma = g \end{cases}$

Remarque 2 : Le théorème 1 est aussi vrai, sous certaines conditions (cf. [12]) pour ρ impair. Il est vrai pour A_2 et k impair.

Remarque 3 : Les résultats ci-dessus généralisent ceux de M. S. Baouendi pour ρ pair et ceux de T. Matsuzawa pour ρ impair.

Si ρ est pair et les coefficients réels, les opérateurs ci-dessus sont de la forme $\sum_{i=1}^{r} X_i^2 u + X_0 u + cu$ [cf. § II. f)]. L'hypoellipticité jusqu'au bord était connue. Ces résultats affinent, dans un cas particulier, les résultats de régularité de M. Derridj [9].

Remarque 4 : Le théorème 1 est faux pour A_7. On applique le raisonnement fait au paragraphe V de cet exposé.

B) On a des résultats analogues pour les opérateurs :

$$Au = \sum_{0 \leq i,j \leq n} D_j[a_{ij} r^{2\rho} D_i u] + \Lambda^*[\Lambda u] + cu$$

où - $a_{ij}, c \in \mathcal{D}[\bar{\Omega}]$

- $\rho \in \mathbb{N}$

- Λ est un opérateur homogène d'ordre 1 à coefficients C^∞ réels non nul en x_0 et transversal à Γ en x_0 si $x_0 \in \Gamma$.

Il n'y a plus à distinguer ρ pair et ρ impair. On fait l'hypothèse de coercivité analogue à celle du A).

Exemple : Dans R^2 ou dans R^2_+ au voisinage de $x_o = 0$, $\Lambda = \frac{\partial}{\partial t}$, $r = \sqrt{x^2+t^2}$

$$Au = D_t^2 u + D_x[(t^2+x^2)^k D_x u] + u$$

Théorème 1bis : Soient, pour $k \in \mathbb{N}$, $W^k = \{u \in H^{k-2}[\Omega], \Lambda u \in H^{k-2}[\Omega], \Lambda^2 u \in H^{k-2}[\Omega]$ $r^{2\rho} D_i u \in H^{k-1}(\Omega)$ pour $0 \leq i \leq n\}$ alors, pour $u \in \mathring{V}$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$Au = f \in H^k[\Omega] \Leftrightarrow u \in W^{k+2} .$$

Remarque 5 : Ici aussi, ce résultat s'interprète comme la régularité d'un problème de Dirichlet homogène et on a : pour $f \in \mathcal{D}[\bar{\Omega}]$ $g \in C^\infty(\Gamma)$ il existe u, unique, dans $\mathcal{D}[\bar{\Omega}]$ tel que $Au = f, u|_\Gamma = g$.

C) Les résultats ci-dessus sont valables pour d'autres classes d'opérateurs sous une hypothèse de coercivité analogue à celle du A) [cf. [12]] .

Exemples : Dans R^2 ou dans R^2_+ au voisinage de $x_o = 0$, $\Lambda = \frac{\partial}{\partial t}$, $\Gamma = \{t=0\}$

$$Au = D_t^2 u + D_x[(t^2+x^4)^k D_x u] + u , \quad k \in \mathbb{N}$$

$$Au = D_t^2 u + D_x[(t^4+x^4)^k D_x u] + u , \quad k \in \mathbb{N} .$$

§ 4. DOMAINES DES ITERES POUR LA 2ème CLASSE D'OPERATEURS

On utilise les notations du I :

A) Soit $Au = \sum_{0 \leq i,j \leq n} D_j[a_{ij} \varphi D_i u] + \sum_{1 \leq i,j \leq q} \Lambda_j^*[b_{ij} \delta^\rho \Lambda_i u] + cu$

où - a_{ij}, b_{ij} $c \in \mathcal{D}[\bar{\Omega}]$

- $\rho \in \mathbb{N}$ est tel que $\delta^\rho \geq 0$ dans $\bar{\Omega}$.

- Les $(\Lambda_i)_{1 \leq i \leq q}$ sont des opérateurs homogènes d'ordre 1 à coefficients C^∞ réels tangents à Γ en tout point de Γ et dont le rang vaut $n-1$ sur Γ, par exemple $\{\Lambda_i\}_{1 \leq i \leq q} = \{i\Lambda_{jk}\}_{1 \leq j.k \leq n}$. Comme au III, on fait l'hypothèse de coercivité de la forme intégrodifférentielle associée sur l'espace variationnel V ($\mathcal{D}[\Omega]$ est dense dans V).

Exemples : Dans R^2_+ au voisinage de 0, $\Gamma = \{t=0\}$, $\varphi = t$, $q = 1$, $\Lambda_1 = \frac{\partial}{\partial x}$

$$\begin{cases} A_1u = D_t[tD_tu] + D_x[(t+x^{2k})D_xu] + u = D_t[tD_tu] + D_x[tD_xu] + D_x[x^{2k}D_xu] + u \\ A_2u = D_t[tD_tu] + D_x[tD_xu] + D_x[(t+x^2)^k D_xu] + u \qquad k \in \mathbb{N} \\ A_3u = D_t[tD_tu] + D_x[tD_xu] + D_x[(t-x^2)^{2k}D_xu] + u \qquad k \in \mathbb{N} \\ A_4u = D_t[tD_tu] + D_x[tD_xu] + D_x[(t-x)^{2k}D_xu] + u \qquad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Notations : $(\pi_0 \Lambda_i)u = u$, $(\pi_{2s}\Lambda_i)u$ $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$ désigne un produit appliqué à u, de 2s opérateurs Λ_i, $D(A^k)$ = domaine de A^k.

On a

Théorème 2 : Si ρ est pair, ou, si ρ est impair et $\delta - \varphi = (\sum_{i=1}^{d} \mu_i^2)$ $d \in \mathbb{N}$, $\mu_i \in \mathcal{D}[\bar{\Omega}]$ μ_i réelle, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D(A^k) = \{u \in \mathcal{D}'[\Omega]$, $\varphi^p(\delta^\rho)^s(\pi_{2s}\Lambda_i)u \in H^{k+p-s}[\Omega]$ pour tous $p \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$, $\pi_{2s}\Lambda_i$ avec $0 \leq p+s \leq k\}$.

Corollaire 1 : A est un isomorphisme de $\mathcal{D}[\bar{\Omega}]$ sur lui-même.

Remarque 1 : Pour $\rho = 0$, on retrouve les domaines des itérés de l'opérateur étudié par H. Triebel [cf. II b)].

Pour $\rho = 1$, $\delta = \varphi$, $b_{ij} = 0$, on retrouve les domaines des itérés de l'opérateur étudié par M. S. Baouendi et C. Goulaouic [cf. II c)].

B) Les résultats ci-dessus s'appliquent aussi aux opérateurs :

$$Au = \sum_{0 \leq i,j \leq n} D_j[a_{ij}\varphi D_iu] + \sum_{1 \leq i,j \leq q} \Lambda_j^* [b_{ij}r^{2\rho}\Lambda_iu] + cu$$ [il n'y a plus à distinguer ρ pair et ρ impair].

Exemple : Dans R^2_+ ou voisinage de 0 :

$$Au = D_t[tD_tu] + D_x[tD_xu] + D_x[(t^2+x^2)^kD_xu] + u \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Sous l'hypothèse de coercivité analogue à celle du A) on a :

<u>Théorème 2bis</u> : Le domaine de A^k est $D(A^k) = \{u \in \mathcal{D}'[\Omega], \varphi^p(r^{2\rho})^s(\pi_{2s} \Lambda_i) u \in H^{k+p-s}[\Omega]$ pour tous $p \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$, $\pi_{2s} \Lambda_i$ tels que $0 \le p+s \le k\}$.

<u>Corollaire</u> : A est un isomorphisme de $\mathcal{D}[\bar{\Omega}]$ sur lui-même.

C) Les résultats ci-dessus s'appliquent à d'autres opérateurs de la forme :

$$Au = \sum_{0 \le i,j \le n} D_j [a_{ij} \varphi D_i u] + \sum_{1 \le i,j \le q} \Lambda_j^{*} [b_{ij} \nu \Lambda_i u] + cu$$

sous certaines conditions sur ν [cf [12]] et sous l'hypothèse de coercivité analogue à celle du A).

<u>Exemples</u> : Dans R^2_+ au voisinage de 0

$$A_1 u = D_t[tD_t u] + D_x[tD_x u] + D_x[(t^3 + x^4)^k D_x u] + u \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$A_2 u = D_t[tD_t u] + D_x[tD_x u] + D_x[e^{-\frac{1}{t^2+x^2}} D_x u] + u$$

§ 5. <u>REMARQUES SUR LA REGULARITE DE</u> $\sum_{0 \le i,j \le n} D_j[a_{ij} \delta^\rho D_i u] + cu \quad \rho \ne 1$ <u>ET</u> $c \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re} c > 0$ $\delta^\rho \ge 0$ <u>DANS</u> Ω .

On suppose que la forme associée a $[u,v]$ est coercive sur l'adhérence de $\mathcal{D}[\Omega]$ dans l'espace variationnel V. Soit $W^2 = \{u \in \mathring{V},\ \delta^\rho u \in H^2[\Omega]\}$.

<u>Proposition 1</u> : Pour $u \in \mathring{V}$, $Au \in L^2[\Omega] \Leftrightarrow u \in W^2$.
Pour la régularité d'ordre supérieur, il faut distinguer suivant la valeur de ρ et la position des deux ouverts. On dit que A est régulier si, pour $u \in \mathring{V}$, $Au \in H^k \Rightarrow \{u \in H^k, \delta^\rho D_i u \in H^{k+1}\ 0 \le i \le n\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

<u>Proposition 2</u> : a) Supposons $\Omega = \omega$ ou $\bar{\omega} \subset \Omega$ - Si $\rho \ne 2$ le problème de Dirichlet est toujours régulier [cf.[15]]

- Si $\rho = 2$, le problème de Dirichlet n'est pas régulier (image de codimension non nulle).

b) Si $\Gamma \cap \partial\omega \ne \emptyset$ et $\Omega \ne \omega$ le problème de Dirichlet n'est jamais régulier.

Exemple : Dans R^2_+ au voisinage de 0

$$Au = D_t[(t+x^2)^k D_t u] + D_x[(t+x^2)^k D_x u] + u \qquad k \geq 2 \quad .$$

Démonstration de b) : Soit $x_1 \in \Gamma \cap \partial\omega$ adhérent à l'ouvert $\Gamma - \partial\omega$ de Γ et $f \in \mathcal{D}[\bar{\Omega}]$ $f(x_1) \neq 0$, si le problème de Dirichlet était régulier, il existerait u dans $\mathcal{D}[\bar{\Omega}] \cap H^1_0\ [\Omega]$ tel que $Au = f$. Cela impliquerait $u(x_1) = 0$ et $f(x_1) = 0$. C'est impossible.

Remarque : P. Bolley et J. Camus ont montré qu'en général le problèmede Dirichlet variationnel est irrégulier [6].

§ 6. METHODES DE DEMONSTRATION. ESQUISSES DES DEMONSTRATIONS SUR DES EXEMPLES.

a) On utilise la régularisation elliptique cf.[1]. Soit $u \in \overset{\circ}{V}$ tel que $Au = f \in H^k[\Omega]$ ou $Au \in D(A^k)$. On considère une suite ε_j de réels $\varepsilon_j > 0$ tendant vers 0 et une suite $f_j \in \mathcal{D}[\bar{\Omega}]$ qui tend vers f dans $H^k[\Omega]$ ou dans $D(A^k)$ (si $\mathcal{D}[\bar{\Omega}]$ est dense dans $D(A^k)$).

On approche alors la forme $a[u,v]$ par les formes $a_j[u,v] = a[u,v] + \varepsilon_j(u,v)_{H^1 \times H^1}$ et u par les solutions u_j dans $\mathcal{D}[\bar{\Omega}] \cap H^1_0[\Omega]$ de la relation : $\forall\, v \in H^1_0[\Omega] \quad a_j(u_j,v) = (f_j,v)_{H^1 \times H^1_0}$.

Les u_j vérifient : a) $\sqrt{\varepsilon_j}\ \|u_j\|_{H^1_0[\Omega]}$ est borné quand j varie.

b) $\|u_j\|_{\overset{\circ}{V}}$ est borné quand j varie

c) il existe une sous-suite des u_j qui tend vers u dans $\overset{\circ}{V}$ faible .

Soit S un opérateur pseudo-différentiel ou différentiel de $\mathcal{D}[\bar{\Omega}] \cap H^1_0[\Omega]$ dans $H^1_0[\Omega]$ dont l'adjoint formel S^* est continu de l'image de S dans $H^1_0[\Omega]$. On choisit S de telle sorte que pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$|a_j(u_j,Su_j) - a_j(u_j,S^*Su_j)| \leq C(\|Su_j\|_{\overset{\circ}{V}} + \sqrt{\varepsilon_j}\|Su_j\|_{H^1})$$

et $$|a_j(u_j,S^*Su_j)| = |(f_j,S^*Su_j)| \leq C\|Su_j\|_{\overset{\circ}{V}}$$

Puisque $a_j[Su_j, Su_j] \geq \alpha \|Su_j\|^2_{\mathring{V}} + \varepsilon_j \|Su_j\|^2_{H^1}$, on en déduit que $\|Su_j\|_{\mathring{V}}$ est borné et, si S est fermé dans $\mathring{V}$ faible, que $Su \in \mathring{V}$.

b) <u>Esquisse de la démonstration du théorème 1 sur l'exemple</u>

$$Au = D_t^2 u + D_x[(t - x^2)^{2\ell} D_x u] + u \qquad \ell \in \mathbb{N} \ , \qquad \ell \geq 1$$

<u>Régularité L^2</u> : On constate que $\{u \in \mathring{V}, Au \in L^2[\Omega], \zeta \in \mathcal{D}[\bar{\Omega}]\}$ implique $\zeta u \in \mathring{V}$ et $A[\zeta u] \in L^2[\Omega]$. Soit B un voisinage ouvert de 0 dans $\overline{R}^2_+$, on démontre l'existence de deux constantes $C > 0$ et $C' > 0$ telles que pour tout $v \in \mathring{V}$ supp $v \subset B$:

$$\|v\|_{L^2_+[H^{\frac{1}{\ell+1}}(R)]} \leq c\|v\|_{\mathring{V}} \quad \text{et} \quad \|(t - x^2)^{\ell - 1} v\|_{L^2_+[H^{\frac{\ell}{\ell+1}}(R)]} \leq c'\|v\|_{\mathring{V}} \ .$$

La première inégalité permet de considérer la régularisation elliptique :

$$Su_j = \beta\, T_{\frac{1}{\ell+1}} [\zeta u_j]$$

où - β et ζ sont deux fonctions réelles de $\mathcal{D}[B]$ telles que $\beta\zeta = \zeta$

- T_s est défini par $\widehat{T_s u}(\xi', t) = (1 + |\xi'|^2)^{\frac{s}{2}}\, \hat{u}(\xi', t)$ où $\hat{u}$ est la transformée de Fourier tangentielle de u.

La seconde inégalité permet alors, grâce aux résultats de la première régularisation elliptique, de majorer les lemmes de commutations de la régularisation elliptique :

$$Su_j = (t - x^2)^{\ell} \frac{\partial[\zeta u_j]}{\partial x}$$

On en déduit $D_x[(t - x^2)^{2\ell} D_x(\zeta u)] \in L^2$ et $D_t^2[\zeta u] \in L^2$ d'où $\zeta u \in W^2$. La régularité L^2 est établie.

<u>Régularité H^1</u> :

<u>Remarque 1</u> : Pour ce type d'opérateurs, les deux implications suivantes, habituellement vraies pour ce type de problèmes :

a) $u \in W^2 \quad Au \in H^1 \quad \zeta \in \mathcal{D}[\bar{\Omega}] \Rightarrow A[\zeta u] \in H^1[\Omega]$

b) $\zeta \in W^2 \Rightarrow [A, \frac{\partial}{\partial x}](\zeta u) \in L^2[\Omega]$

ne sont pas vérifiées. (La dérivée tangentielle du poids intervient!)

On commence par démontrer, par récurrence sur p entier ≥ 0 tel que $P \times \frac{1}{\ell+1} \leq \frac{1}{\ell+1} + 1$ que les quantités $\sqrt{\varepsilon_j}\, \|\beta T_{\frac{P}{\ell+1}}[\zeta u_j]\|_{H^1}$ et $\|\beta T_{\frac{P}{\ell+1}}[\zeta u_j]\|_V$ sont bornées quand j varie.

On peut alors majorer les lemmes de commutations de la régularisation elliptique $Su_j = \frac{\partial[\zeta u_j]}{\partial x}$ et en déduire successivement :

a) $\frac{\partial[\zeta u]}{\partial x} \in \mathring{V}$

b) $\frac{\partial A[\zeta u]}{\partial x} \in L^2$ et $A[\frac{\partial[\zeta u]}{\partial x}] \in L^2$ d'où $\frac{\partial[\zeta u]}{\partial x} \in W^2$

c) $\frac{\partial A[\zeta u]}{\partial t} \in L^2$ et $\frac{\partial^3[\zeta u]}{\partial t^3} \in L^2$

La régularité H^1 est établie.

<u>Régularité H^k</u> : On peut faire la même remarque que pour la régularité H^1. On procède par récurrence sur k en prouvant que

$$\begin{cases} Au = f \in H^k \Leftrightarrow p_k \text{ est vérifiée} \\ u \in \mathring{V} \end{cases}$$

$p_k = \{u \in W^{k+2}$ et si u_j est une suite définie au a) approchant u les quantités : $\sqrt{\varepsilon_j}\, \|\beta T_{\frac{P}{\ell+1}}[\zeta u_j]$ et $\|\beta T_{\frac{P}{\ell+1}}[\zeta u_j]\|_V$ sont bornées quand j varié pour $\frac{P}{\ell+1} \leq \frac{1}{\ell+1} + k\}$.

Passons de k - 1 à k : on démontre que les régularisations elliptiques $\beta T_{\frac{P}{\ell+1}}[\zeta u_j]$ vérifient les conditions ci-dessus pour $\frac{P}{\ell+1} \leq \frac{1}{\ell+1} + k$ et on conclut comme pour la régularité H^1.

<u>Esquisse de la démonstration du théorème 2 sur l'exemple</u> :

$x_o = 0 \quad \Omega \subset R^2_+ \quad x_o \in \Gamma = \{t=0\}$, $Au = D_t[tD_tu] + D_x[tD_xu] + D_x[t^2+x^2)D_xu] + u$

Soient $P_k[\Omega] = \{u \in \mathscr{D}'[\Omega], t^P(t^2+x^2)^s D_x^{2s} u \in H^{k+p-s}[\Omega] \quad 0 \leq p+s \leq k\}$.

Domaine de $A = D(A)$ on a :

$$\{u \in \mathring{V}, Au \in L^2[\Omega],\ \zeta \in \mathcal{D}[\bar{\Omega}]\} \Rightarrow \{\zeta u \in \mathring{V},\ A[\zeta u] \in L^2[\Omega]\}$$

Soit B un voisinage ouvert de 0 dans $\overline{R^2_+}$, il existe $c > 0$ telle que pour tout $v \in \mathring{V}$ supp $v \subset B$

$$\|v\|_{L^2_+[H^{\frac{1}{2}}(R)]} \leq c\|v\|_{\mathring{V}} \qquad [\text{cf. } [5]]$$

Soient ζ et β deux fonctions réelles de $\mathcal{D}[B]$ avec $\beta\zeta = \zeta$, on applique la régularisation elliptique $Su_j = \beta T_{\frac{1}{2}}[\zeta u_j]$ d'où on déduit que

$\|\zeta u_j\|_{L^2_+[H^1(R)]}$ sont bornées quand j varie

On peut alors majorer les commutateurs des régularisations elliptiques :

$$Su_j = t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial[\zeta u_j]}{\partial x} \text{ et } Su_j = x \frac{\partial}{\partial x}[\zeta u_j]$$

On en déduit $D_x[tD_x(\zeta u)] \in L^2$, $D_x[(t^2+x^2)D_x(\zeta u)] \in L^2$ d'où $D_t[tD_t(\zeta u)] \in L^2$. Par inégalité de Hardy, on a $D_t[\zeta u] \in L^2$ et $tD_t^2(\zeta u) \in L^2$ d'où $\zeta u \in P_1[\Omega]$ et $D(A) = P_1[\Omega]$.

Domaine de $A^2 = D(A^2)$: Les étapes de la démonstration sont :

- $\frac{\partial[\zeta u]}{\partial x} \in \mathring{V}$ [par régularisation elliptique $Su_j = \frac{\partial[\zeta u_j]}{\partial x}$]
- $t\,\frac{\partial^2[\zeta u]}{\partial x^2} \in \mathring{V}$ et $(t^2+x^2)\,\frac{\partial^2[\zeta u]}{\partial x^2} \in \mathring{V}$ [par régularisation elliptique]
- $A[\frac{\partial[\zeta u]}{\partial x}] \in L^2$ d'où $\frac{\partial[\zeta u]}{\partial u} \in P_1[\Omega]$ et $A[t\frac{\partial^2[\zeta u]}{\partial x^2}] \in L^2$, $A[(t^2+x^2)\frac{\partial^2[\zeta u]}{\partial x^2}] \in L^2$.

On en déduit $t\frac{\partial^2[\zeta u]}{\partial x^2} \in P_1[\Omega]$ et $(t^2+x^2)\frac{\partial^2[\zeta u]}{\partial x^2} \in P_1[\Omega]$.

En revenant à l'équation on a : $D_t[tD_t[\zeta u]] \in H^1$ d'où $D_t[\zeta u] \in H^1$ et $t\,D_t^2[\zeta u] \in H^1$ et $tD_t[tD_t[\zeta u]] \in H^2$ d'où $t^2D^4_{t^3x}[\zeta u] \in L^2$ et $t^2D^4_{t^4}[\zeta u] \in L^2$ au total $\zeta u \in P_2[\Omega]$ et $D(A^2) = P_2[\Omega]$.

Domaine de $A^k = D(A^k)$: on montre, par récurrence sur k, que $D(A^k) = P_k[\Omega]$. Si $u \in D(A^k)$ on établit que $A[x \frac{\partial[\zeta u]}{\partial x}] \in P_{k-2}[\Omega]$ d'où $x \frac{\partial[\zeta u]}{\partial u} \in P_{k-1}[\Omega]$ et $A[\frac{\partial[\zeta u]}{\partial x}] \in P_{k-2}[\Omega]$. On pousuit alors comme pour $D(A^2)$.

Remarque 2 : Si on cherche la régularité H^1 de A, on n'aboutit pas car on obtient en régularité normale : $D_t[t\, D_t[\zeta u]] + (t^2+x^2)\, D_x^2[\zeta u] \in H^1$ sans savoir si $D_t[(t^2+x^2)D_x^2(\zeta u)] \in L^2$.

Dans le cas où $t^2 + x^2$ est remplacé par 1 (opérateur étudié par H. Triebel) P. Bolley et J. Camus résolvent cette difficulté dans [5] en se ramenant à une équation différentielle connue par transformation de Fourier tangentielle.

Remarque 3 : La proposition 1 du paragraphe 5 se démontre par la même tehnique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi : Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Bull. Soc. Math. France 95, p.45-87 (1967).

[2] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Arch. for rat. Mec Analysis 34 n°5, p.361-379 (1969).

[3] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Etude de l'analyticité et de la régularité Gevrey pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Annales scientifiques Ec. Norm. Sup. 4ème série, t.4, p.31-46 (1971).

[4] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés. Applications. Journal of functional analysis 9, p.208-248 (1972).

[5] P. Bolley et J. Camus : Sur certains problèmes aux limites elliptiques et dégénérés. C. R. Acad. Sc., t.271, p.980-983 (1970).

[6] P. Bolley et J. Camus : Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables. Bull. Soc. Math. France, mémoire 34, p.55-140 (1973).

[7] P. Bolley et J. Camus : Régularité pour une classe de problèmes aux limites elliptiques dégénérés variationnels. C. R. Acad. Sc. t. 279, p.651-653 (1974).

[8] P. Bolley, J. Camus et B. Helffer : Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques.
A paraître au Journal de Math. Pures et Appliquées.

[9] M. Derridj : Un problème aux limites pour une classe d'opérateurs du second ordre hypoelliptiques.
Annales de l'Institut Fourier de l'Université de Grenoble, Tome XXI, Fascicule 4 (1970).

[10] L. Hörmander : Hypoelliptic second order differential equations
Acta Math. n°119 p. 147-171 (1967).

[11] J. J. Kohn et L. Nirenberg : Degenerate elliptic parabolic equations of second order.
Comm. Pure Appl. Math., vol. XX, p.797-872 (1967).

[12] C. Mattera : Problèmes aux limites pour des opérateurs du second ordre elliptiques singuliers.
Thèse 3ème cycle, Rennes (1976).

[13] T. Matsuzawa : Sur les équations $u_{tt} + t^{\alpha} u_{xx} = f (\alpha \geq 0)$.
Nagoya Math. J. vol. 42 p.43-55 (1971).

[14] O. A. Oleinik : On the linear second order equations with non negative characteristic form.
Math. U.S.S.R. Sbornik, vol. 69, p.111-140 (1966).

[15] D. Prevosto et J. Rolland : Théorème d'indice, opérateurs maximaux associés à une classe d'opérateurs elliptiques fortement dégénérés sur la frontière.
Thèse 3ème cycle, Rennes (1975).

[16] N. Shimakura : Problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré.
J. Math. Kyoto Univ. Vol. 9, n° 2, p.275-335 (1969).

[17] H. Triebel : Erzeugung des nuklearen lokalkonvexen Raumes $C^{\infty}[\bar{\Omega}]$ durch einen elliptischen differential zweiter Ordnung.
Math. Annal. 177, p.247-264 (1968).

[18] M. I. Višik et V. V. Grušin : Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain.
Math. U.S.S.R. Sbornik, vol. 9, n°4, p.423-454 (1969).

[19] M. I. Višik et V. V. Grušin : On a class of higher degenerate elliptic equations.
Math. U.S.S.R. Sbornik, vol. 8, n°1, p.1-32 (1969).