J. P. Puel

Inéquations variationnelles d'évolution paraboliques du 2ème ordre

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 8, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A7_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z

1 9 7 4 - 1 9 7 5

INEQUATIONS VARIATIONNELLES D'EVOLUTION PARABOLIQUES DU 2ème ORDRE

par J. P. PUEL

Exposé n° VIII

15 Janvier 1975

§ 1. INTRODUCTION. POSITION DES PROBLEMES.

Sans chercher à faire un exposé général et exhaustif sur le sujet, nous allons donner ici une série de résultats sur les inéquations variationnelles d'évolution associées à des opérateurs (linéaires) paraboliques du deuxième ordre, et des convexes dépendant du "temps". Nous laisserons de côté le cas des systèmes paraboliques faiblement couplés pour lesquels les résultats sont analogues, ainsi que des extensions possibles à certains opérateurs non linéaires.

Soit donc Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $H = L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $(.,.)$ et de la norme $|.|$.

Soit V un espace de Hilbert réel muni de la norme $\|.\|$. On suppose que $V \hookrightarrow H$ avec injection continue et que V est dense dans H. Nous avons alors $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$. Nous noterons encore $(.,.)$ la dualité (V',V).

On considère sur $V \times V$ une forme bilinéaire continue $a(.,.)$ associée à un opérateur $A : V \to V'$. Soit T un nombre positif et pour presque tout $t \in (0,T)$ $K(t)$ un convexe fermé de V.

Nous noterons : $K = \{v, v \in L^2(0,T;V),\ v(t) \in K(t) \text{ p.p. en } t\}$

$$\tilde{K} = \{v, v \in L^2(0,T;V), \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T;V'), v(t) \in K(t) \text{ p.p. en } t\}$$

Soit $f \in L^2(0,T;V')$ et $u_o \in H$ des données.

<u>Problème fort</u> : Chercher u (solution forte) telle que :

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in \tilde{K}, \quad u(0) = u_o \\ \int_0^T (\frac{\partial u}{\partial t}, v - u)\,dt + \int_0^T a(u, v - u)\,dt \geq \int_0^T (f, v-u)\,dt \quad \forall\, v \in K . \end{array} \right.$$

l'existence d'une solution forte nécessitera des hypothèses de régularité importantes (en particulier sur la dépendance en t des convexes), hypothèses qui ne sont pas toujours vérifiées. Nous allons donc affaiblir le problème (I).

Si u est solution de (I) et si $v \in \tilde{K}$ (et non plus seulement $v \in K$) on a

$$\int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u\right) dt + \int_0^T a(u, v-u)\, dt + \int_0^T \left(\frac{\partial (u-v)}{\partial t}, v-u\right) dt \geq \int_0^T (f, v-u)\, dt.$$

donc :

$$\int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u\right) dt + \int_0^T a(u, v-u)\, dt + \frac{1}{2}\left|v(0) - u_0\right|^2 \geq \int_0^T (f, v-u)\, dt \quad .$$

Cette nouvelle inéquation ne fait plus intervenir $\frac{\partial u}{\partial t}$. Nous définissons alors le :

<u>Problème faible</u> : Chercher u (solution faible) telle que :

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} u \in K \\ \displaystyle\int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u\right) dt + \int_0^T a(u, v-u)\, dt + \frac{1}{2}\left|v(0) - u_0\right|^2 \geq \int_0^T (f, v-u)\, dt. \quad \forall v \in \tilde{K}. \end{cases}$$

Nous étudierons successivement :

. l'existence d'une solution faible

. l'existence d'une solution forte dans le cas de convexes réguliers (en fait nous nous limiterons à un exemple de convexe pour simplifier.)

. l'existence d'une solution faible maximale pour <u>certains</u> convexes non réguliers.

§ 2. <u>EXISTENCE D'UNE SOLUTION FAIBLE</u>

Le problème est traité sous forme générale dans Brézis [1] et Lions [1]. On suppose que :

(1) $\exists\, \alpha > 0$, $\forall\, v \in V \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2$.

(2) $\tilde{K} \neq \phi$.

<u>Théorème 1</u> : Il existe une solution du problème (II).

<u>Définition</u> : Un opérateur de pénalisation β associé à un convexe fermé $\mathcal{K}$ de $\mathcal{V}$ est un opérateur de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$ monotone borné hémicontinu tel que : $\{v \in \mathcal{V} .\ \beta(v) = 0\} = \mathcal{K}$.

Si $\mathcal{V} = L^2(0,T;V)$ un tel opérateur existe toujours (prendre par exemple $\beta = I - P_k$).

Soit donc β un opérateur de pénalisation associé à K. Pour tout $\varepsilon > 0$, considérons l'équation de pénalisation :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + A u_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = f \\ \\ u_\varepsilon(0) = u_o . \end{cases}$$

D'après un théorème de Lions [1] sur les équations d'évolution abstraites, ce problème admet une solution unique

$$u_\varepsilon \in L^2(0,T;V) \;, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0,T;V') .$$

Estimations : D'après (2) $\exists v_o \in \tilde{K}$. Multiplions (3) par $u_\varepsilon - v_o$. Il vient puisque $\beta(v_o) = 0$

$$\int_o^T (\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial s} - \frac{\partial v_o}{\partial s} \;,\; u_\varepsilon - v_o)ds + \int_o^T a(u_\varepsilon - v_o, u_\varepsilon - v_o)ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_o^T (\beta(u_\varepsilon) - \beta(v_o), u_\varepsilon - v_o)ds$$
$$= \int_o^T (f - \frac{\partial v_o}{\partial s} - Av_o, u_\varepsilon - v_o)ds$$

d'où u_ε est borné dans $L^2(0,T;V)$ indépendemment de ε.

De même $|u_\varepsilon(T)|$ est borné indépendemment de ε. Montrons maintenant que :

$$\int_o^T (\beta(u_\varepsilon),\; u_\varepsilon)dt \to 0 \qquad \text{si } \varepsilon \to 0 .$$

et

$$\forall\, v \in L^2(0,T;V),\; \int_o^T (\beta(u_\varepsilon), v)\, dt \to 0 \qquad \text{si} \qquad \varepsilon \to 0.$$

En multipliant (3) par u_ε on a :

$$\frac{1}{2}|u_\varepsilon(T)|^2 - \frac{1}{2}|u_o|^2 + \int_o^T a(u_\varepsilon, u_\varepsilon)dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_o^T (\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon)dt = \int_o^T (f, u_\varepsilon)dt .$$

Comme u_ε est borné dans $L^2(0,T;V)$ et que $|u_\varepsilon(T)|$ est borné en multipliant par ε on voit que

$$\int_0^T (\beta(u_\varepsilon),u_\varepsilon)\,dt \to 0 \quad \text{si} \quad \varepsilon \to 0 \ .$$

Comme $\beta(u_\varepsilon)$ est borné dans $L^2(0,T;V')$, pour montrer la deuxième affirmation,, il suffit de la montrer pour $v \in L^2(0,T;V)$ tel que $\frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T;V')$. Pour cela, on multiplie (3) par v et on fait une intégration par parties sur le terme $\int_0^T (\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v)\,dt$.

Passage à la limite :

Après extraction d'une "sous-suite", on peut supposer que $u_\varepsilon \to u$ dans $L^2(0,T;V)$ faible si $\varepsilon \to 0$.

Il faut montrer que $u \in K$ et que u satisfait à l'inéquation faible. Montrons que $u \in K$. On a :

$$\forall\, v \in L^2(0,T;V) \qquad \int_0^T (\beta(u_\varepsilon) - \beta(v),u_\varepsilon - v)\,dt \geq 0 \qquad (\text{monotonie de } \beta)$$

et

$$\int_0^T (\beta(u_\varepsilon),u_\varepsilon - v)\,dt \to 0 \qquad \text{si} \quad \varepsilon \to 0.$$

Donc :

$$\int_0^T (\beta(v),u - v)\ dt \leq o, \quad \text{si } w \in L^2(0,T;v)$$

prenons $v = u + \mu w$ avec $\mu > 0 \Rightarrow \int_0^T (\beta(u+\mu w),\mu w)\,dt \geq 0$.

En divisant par μ et en faisant tendre μ vers 0, comme β est hemicontinu, il vient :

$$\int_0^T (\beta(u),w)\,dt \geq 0 \qquad \forall\, w \in L^2(0,T;V)$$

donc $\beta(u) = 0$ et $u \in K$.

Montrons que u est solution du problème faible :
si $v \in \tilde{K}$, on a puisque $\beta(v) = 0$

$$\int_o^T \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v - u_\varepsilon\right) dt + \int_o^T a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_o^T (\beta(u_\varepsilon) - \beta(v), v - u_\varepsilon) dt = \int_o^T (f, v - u_\varepsilon) dt .$$

Donc :

$$\int_o^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v - u_\varepsilon\right) dt + \int_o^T a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) dt + \frac{1}{2}|v(0) - u_o|^2 \geq \int_o^T (f, v - u_\varepsilon) dt .$$

On peut maintenant passer à la limite en utilisant la semi continuité inférieure pour la topologie faible de $v \to \int_o^T a(v,v)\,dt$.

D'où u est solution de (II), ce qui termine la démonstration du théorème 1.

§ 3. UN CAS D'EXISTENCE D'UNE SOLUTION FORTE

Nous donnons ici sur un exemple, les démonstrations de Brézis [2] auquel nous renvoyons pour un résultat plus général.

$V = H_o^1(\Omega)$, Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$.

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v\,dx + \int_\Omega a_o u.v\,dx .$$

où $a_{ij} \in C_B^1(\bar{\Omega})$, $b_i, a_o \in L^\infty(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$.

On suppose toujours que a(.,.) vérifie (1).

Soit $\varphi \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$ tel que $\frac{\partial\varphi}{\partial t} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. De même pour ψ. On suppose que $\varphi(0) \leq 0 \leq \psi(0)$

$$\varphi/\Sigma \leq 0 \leq \psi/\Sigma \quad \text{où } \Sigma = \partial\Omega \times]0,T[.$$

Nous prenons alors $K(t) = \{v/v \in V, \ \varphi(t) \leq v \leq \psi(t)\}$. Nous prenons $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et $u_o = 0$ (ceci pour simplifier, les résultats étant légèrement différents, du point de vue de la régularité si on suppose seulement $u_o \in L^2(\Omega)$ et $\varphi(0) \leq u_o \leq \psi(0)$.).

Théorème 2 : Il existe u unique, solution du problème fort (I) avec $u \in L^2(0,T;H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega))$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. De plus u est l'unique solution du problème faible (II).

Démonstration Montrons que u est l'unique solution du problème faible (II) (ce qui montrera l'unicité du problème fort, bien sûr). Soit $\hat{u}$ une solution de (II). On a

$$\int_o^T [(\frac{\partial v}{\partial t}, v-\hat{u}) + a(\hat{u},v-\hat{u}) - (f,v-\hat{u})]dt + \frac{1}{2}|v(0)-u_o|^2 \geq 0 \quad \forall v \in \tilde{K}$$

$$\int_o^T [(\frac{\partial u}{\partial t}, v - u) + a(u,v - u) - (f,v-u)]dt \geq 0 \qquad \forall v \in K .$$

$$u(0) = u_o \ , \quad u \in \tilde{K}.$$

On peut prendre $v = u$ dans la première inéquation et $v = \hat{u}$ dans la deuxième.

$$\int_o^T (\frac{\partial u}{\partial t}, u - \hat{u})dt + \int_o^T a(\hat{u},u-\hat{u})dt - \int_o^T (f,u-\hat{u})dt \geq 0 \quad , \quad \text{donc}$$

$$\int_o^T (\frac{\partial u}{\partial t} , u - \hat{u})dt + \int_o^T a(u,u - \hat{u})dt - \int_o^T (f,u-\hat{u})dt + \int_o^T a(\hat{u}-u,u-\hat{u})dt \geq 0$$

d'où $\displaystyle\int_o^T a(u-\hat{u},u-\hat{u})dt \leq 0 \quad \Rightarrow \quad u = \hat{u}.$

Montrons maintenant l'existence d'une solution forte régulière de (I). Désignons par $P(t)$ la projection dans H sur le convexe fermé de H $K_H(t) = \{v, v \in H, \ \varphi(t) \leq v \leq \psi(t)\}$.

$\beta = Id - P(t)$ est un opérateur de pénalisation.

Nous savons que si $v \in H$, $P(t)v = v + (\varphi(t) - v)^+ - (\psi(t)-v)^-$. Reprenons l'équation de pénalisation (3) avec β ainsi choisi.

Comme $\beta(u_\varepsilon) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, nous savons que :

$$u_\varepsilon \in L^2(0,T;H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Nous avons également : $\beta(u_\varepsilon) \in L^2(0,T;H_o^1(\Omega))$ et nous pouvons multiplier (3) par $\frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon)$.

$$\int_o^T (\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon))dt + \int_o^T a(u_\varepsilon,\frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon))dt + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_o^T |\beta(u_\varepsilon)|^2 dt = \int_o^T (f,\frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon))dt \ .$$

<u>Lemme 1</u> : $\int_0^T (\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon))dt \geq \rho_1 |\frac{\beta(u_\varepsilon)}{\varepsilon}|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ où ρ_1 est une constante (pouvant être négative).

Nous avons : $\frac{1}{2\varepsilon}\frac{d}{dt}|u_\varepsilon(t) - P(t)u_\varepsilon(t)|^2 = (\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t), \frac{u_\varepsilon(t) - P(t)u_\varepsilon(t)}{\varepsilon})$

$$- (\dot{P}(t)u_\varepsilon(t), \frac{u_\varepsilon(t) - P(t)u_\varepsilon(t)}{\varepsilon}).$$

où $\dot{P}(t)v = \frac{\partial}{\partial t} P(t)v$ si $v \in H$.

La démonstration dans le cas général de cette égalité n'est pas simple. Dans notre exemple elle est simplifiée par la connaissance explicite de $P(t)$.

Ici

$\dot{P}(t)u_\varepsilon(t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\chi)^{\psi}{}_{(\varphi(t)\geq u_\varepsilon(t))} + \frac{\partial\psi}{\partial t}(t)\chi_{(u_\varepsilon(t)\geq\tau(\psi))}$. ($\chi_E$ désigne la fonction caractéristique de E), et nous voyons que :

$$(\frac{\partial}{\partial t}P(t)u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t) - P(t)u_\varepsilon(t)) =$$
$$(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t) + (\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t) - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t))\chi_{(\varphi\geq u_\varepsilon)} + (\frac{\partial\psi}{\partial t}(t) - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t))\chi_{(u_\varepsilon\geq\psi)}, u_\varepsilon(t) - P(t)u_\varepsilon(t)) =$$

$$(\dot{P}(t)u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t) - P(t)u_\varepsilon(t)).$$

Par suite : $\int_0^T (\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon))dt = \frac{1}{2\varepsilon}|u_\varepsilon(t) - P(T)u_\varepsilon(T)|^2 - \frac{1}{2\varepsilon}|u_o - P(0)u_o|^2$

$$+ \int_0^T (\frac{\partial\varphi}{\partial t}\chi(\varphi\geq u_\varepsilon) + \frac{\partial\psi}{\partial t}\chi(u_\varepsilon\geq\psi), \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon))dt .$$

Comme $u_o = P(0)u_o$ on a :

$\int_0^T (\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon))dt \geq \rho_1 |\frac{\beta(u_\varepsilon)}{\varepsilon}|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ où ρ_1 ne dépend que de

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} \text{ et de } \frac{\partial\psi}{\partial t} .$$

<u>Lemme 2</u> : $\int_0^T a(u_\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon))dt \geq \rho_2 \left|\frac{\beta(u_\varepsilon)}{\varepsilon}\right|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ où ρ_2 est une constante (pouvant être négative).

$$\int_0^T a(u_\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon))dt = \int_0^T a(\beta(u_\varepsilon), \frac{\beta(u_\varepsilon)}{\varepsilon})dt + \int_0^T a(Pu_\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon))dt \geq \int_0^T a(Pu_\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon))dt$$

$$a(P(t)u_\varepsilon(t), \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon)(t)) = -\frac{1}{\varepsilon}a(\varphi(t), (\varphi(t)-u_\varepsilon(t))^+) + \frac{1}{\varepsilon}a(\psi(t), (\psi(t)-u_\varepsilon(t))^-)$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}(A\varphi(t), (\varphi(t)-u_\varepsilon(t))^+) + \frac{1}{\varepsilon}(A\psi(t), (\psi(t)-u_\varepsilon(t))^-)$$

Mais : $|u_\varepsilon(t) - P(t)u_\varepsilon(t)|^2 = |(\varphi(t)-u_\varepsilon(t))^+|^2 + |(\psi(t)-u_\varepsilon(t))^-|^2$.

Donc : $\int_0^T a(P(t)u_\varepsilon(t), \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon)(t))dt \geq \rho_2 \left|\frac{u_\varepsilon(t) - P(t)u_\varepsilon(t)}{\varepsilon}\right|_{L^2(0.T:L^2(\Omega))}$

où ρ_2 peut être négative et ne dépend que de $A\varphi$ et $A\psi$. D'où le lemme 2.

D'après les lemmes 1 et 2, $\frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon)$ reste borné dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Donc : $\begin{cases} u_\varepsilon \text{ est borné dans } L^2(0.T:H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \text{ est borné dans } L^2(0,T:L^2(\Omega)). \end{cases}$

Après extraction d'une "sous-suite" :

$$u_\varepsilon \longrightarrow u \quad \text{dans } L^2(0,T;H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \text{ faible}$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{dans } L^2(0.T;L^2(\Omega)) \text{ faible}$$

($u_\varepsilon \longrightarrow u$ dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ fort si Ω est borné. cf. Lions [1]).

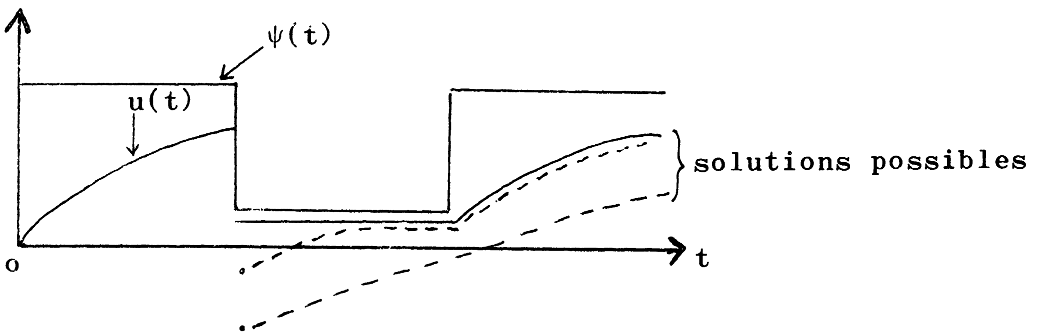
Il est maintenant aisé de montrer que : $u \in K$. (donc $u \in \tilde{K}$) et que u est solution du problème fort (I): si $v \in K$, on multiplie l'équation de pénalisation par $v - u_\varepsilon$ et on passe à la limite en ε (en utilisant la semi continuité inférieure pour la topologie faible si on ne sait pas que $u_\varepsilon \to u$ dans $L^2(0,T;V)$ fort).

§.4 EXISTENCE D'UNE SOLUTION MAXIMALE POUR CERTAINS CONVEXES IRREGULIERS

On considère toujours par exemple $V = H_0^1(\Omega)$, $a(u,v)$ définie comme au paragraphe (III).

$K(t) = \{v, v \in V,\ v \leq \psi(t)\}$ où ψ est une fonction mesurable de $(0,T)$ à valeurs dans H, sans hypothèse de régularité.

Dans ce cas, en général, il n'y a pas existence d'une solution forte, ni unicité des solutions faibles comme le montre l'exemple suivant figure sur un dessin (on prend $H = \mathbb{R}$, $a(u,v) = u.v$ et le calcul se fait directement) :



Nous allons montrer qu'il existe une solution faible maximum (au sens de l'ordre de $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ qui est limite de la solution d'une équation pénalisée. (Travail publié dans Mignot-Puel [1]).

<u>Remarque</u> : La forme particulière du convexe est essentielle comme il apparaîtra dans la démonstration.

<u>Théorème 3</u> : Si $a(.,.)$ et $\tilde{K}$ vérifient (1) et (2) si $f \in L^2(0,T;V')$ et $u_0 \in H$, le problème (II) admet une solution (faible) maximum.

<u>Démonstration</u> : Reprenons l'équation pénalisée en particularisant l'opérateur β (Nous prenons encore $\beta = I - P(t)$)

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + Au_\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon}(\psi - u_\varepsilon)^- = f \\[2ex] u_\varepsilon(0) = u_0 \end{cases}$$

Les résultats du paragraphe 2 sont toujours applicables mais nous avons de plus le :

<u>Lemme</u> : Si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $u_{\varepsilon_1} \leq u_{\varepsilon_2}$.

La démonstration de ce lemme est triviale.

Donc $u_\varepsilon \longrightarrow \bar{u}$ dans $L^2(0,T;V)$ faible si $\varepsilon \to 0$, où $\bar{u}$ est une solution de (II) et de plus :

$$u_\varepsilon \longrightarrow \bar{u} \text{ dans } L^2(0,T;H) \text{ fort si } \varepsilon \to 0.$$

Nous allons montrer que $\bar{u}$ est solution maximum de (II) et pour cela il suffit de montrer que si u est solution de (II), $\forall\ \varepsilon > 0$, $u_\varepsilon \geq u$.

Soit donc u une solution de (II).

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T [(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u) + a(u,v-u) - (f,v-u)]dt + \frac{1}{2}|v(0)-u_0|^2 \geq 0 & \forall\ v \in \tilde{K} \\ u \in K \end{cases}$$

Posons $u - u_\varepsilon = z$ et $v - u_\varepsilon = w$, nous obtenons :

$$(5)\begin{cases} \displaystyle\int_0^T [(\frac{\partial w}{\partial t}, w-z) + a(z,w-z) - \frac{1}{\varepsilon}((\psi - u_\varepsilon)^-, w-z)]dt + \frac{1}{2}|w(0)|^2 \geq 0, \ \forall w \in \tilde{K} - u_\varepsilon \\ z \in K - u_\varepsilon \ . \end{cases}$$

Nous allons montrer que $z \leq 0$. On sait, d'après (2) qu'il existe $w_0 \in \tilde{K} - u_\varepsilon$. De plus :

$$\forall\ \theta \in L^2(0,T;V) \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} \in L^2(0,T;V'), \quad \theta \geq 0 \ , \quad w_0 - \lambda\theta \in \tilde{K} - u_\varepsilon \quad \text{si } \lambda > 0.$$

(Ici intervient la forme particulière du convexe).

Prenons $w = w_0 - \lambda\theta$ dans (5).

$$\int_0^T [(\frac{\partial(w_0-\lambda\theta)}{\partial t}, w_0 - \lambda\theta - z) + a(z,w_0 - \lambda\theta - z) - \frac{1}{\varepsilon}((\psi - u_\varepsilon)^-, w_0 - \lambda\theta - z)]dt$$
$$+ \frac{1}{2}|w_0(0) - \lambda\theta(0)|^2 \geq 0 \ .$$

$$\frac{1}{2}|w_o(T)-\lambda\theta(T)|^2-\int_o^T(\frac{\partial w_o}{\partial t},z)\,dt+\int_o^T a(z,w_o-z)\,dt-\frac{1}{\varepsilon}\int_o^T((\psi-u_\varepsilon)^-,\ w_o-z)\,dt$$

$$+\lambda[\int_o^T(\frac{\partial\theta}{\partial t},z)\,dt-\int_o^T a(z,\theta)\,dt+\frac{1}{\varepsilon}\int_o^T((\psi-u_\varepsilon)^-,\theta)\,dt]\ \geq 0\ .$$

Prenons θ tel que $\theta(T)=0$. Divisons par λ et faisons tendre λ vers $+\infty$. Il vient

$$(6)\begin{cases}\int_o^T(\frac{\partial\theta}{\partial t},z)\,dt-\int_o^T a(z,\theta)\,dt+\frac{1}{\varepsilon}\int_o^T((\psi-u_\varepsilon)^-,\theta)\,dt\geq 0\\ \forall\theta\in L^2(0,T;V),\ \frac{\partial\theta}{\partial t}\in L^2(0,T;V'),\ \theta\geq 0,\ \theta(T)=0\end{cases}$$

Nous allons prendre dans (6) pour θ une approximation de z^+. Pour $\eta>0$, soit θ_η tel que :

$$(7)\quad\begin{cases}-\eta\frac{\partial\theta_\eta}{\partial t}+\theta_\eta=z^+\\ \theta_\eta(T)=0\end{cases}$$

(problème rétrograde qui admet une solution unique).

On sait que $\theta_\eta\geq 0$, $\theta_\eta\in L^2(0,T;V)$, $\frac{\partial\theta_\eta}{\partial t}\in L^2(0,T;V)$, $\theta_\eta(T)=0$ et de plus :

$$\theta_\eta\longrightarrow z^+\ \text{ dans } L^2(0,T;V)\ \text{ si }\ \eta\to 0.$$

Nous pouvons prendre $\theta=\theta_\eta$ dans (6), ce qui donne :

$$\int_o^T(\frac{\partial\theta_\eta}{\partial t},z)\,dt-\int_o^T a(z,\theta_\eta)\,dt+\frac{1}{\varepsilon}\int_o^T((\psi-u_\varepsilon)^-,\theta_\eta)\,dt\geq 0.\quad \text{Or :}$$

$$\int_o^T(\frac{\partial\theta_\eta}{\partial t},z)\,dt=\int_o^T(\frac{\partial\theta_\eta}{\partial t},z^+)\,dt-\int_o^T(\frac{\partial\theta_\eta}{\partial t},z^-)\,dt\ .$$

$$\int_o^T(\frac{\partial\theta_\eta}{\partial t},z^+)\,dt=\int_o^T(\frac{\partial\theta_\eta}{\partial t},-\eta\frac{\partial\theta_\eta}{\partial t}+\theta_\eta)\,dt=-\eta\int_o^T|\frac{\partial\theta_\eta}{\partial t}|^2dt+\frac{1}{2}|\theta_\eta(T)|^2-\frac{1}{2}|\theta_\eta(0)|^2$$

Comme $\theta_\eta(T)=0$, $\int_o^T(\frac{\partial\theta_\eta}{\partial t},z^+)\,dt\leq 0$.

$$-\int_o^T(\frac{\partial\theta_\eta}{\partial t},z^-)\,dt=\int_o^T(\frac{z^+-\theta_\eta}{\eta},z^-)\,dt=\int_o^T\frac{1}{\eta}(z^+,z^-)\,dt-\int_o^T(\frac{\theta_\eta,z^-}{\eta})\,dt\leq 0$$

Donc $\int_o^T(\frac{\partial\theta_\eta}{\partial t},z)\,dt\leq 0$ et $\int_o^T a(z,\theta_\eta)\,dt-\frac{1}{\varepsilon}\int_o^T((\psi-u_\varepsilon)^-,\theta_\eta)\,dt\leq 0.$

En passant à la limite en η, on obtient :

$$\int_0^T a(z^+,z^+)\,dt - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T ((\psi-u_\varepsilon)^-,z^+)\,dt \leq 0 \;.$$

Mais $u \leq \psi \Rightarrow z \leq \psi - u_\varepsilon \Rightarrow \int_0^T ((\psi - u_\varepsilon)^-,z^+)\,dt = 0 \Rightarrow \int_0^T a(z^+,z^+)\,dt = 0 \Rightarrow z \leq 0$

Ceci termine la démonstration du théorème 3 et montre bien que u est solution maximum.

Remarque : Si on considère $K'(t) = \{v, v \in V,\ v \geq \psi(t)\}$ on obtient bien sur l'existence d'une solution minimum.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Brezis : Problèmes unilatéraux, J. Math. Pures et appl. 51,1972, p.1.

[2] H. Brezis : Un problème d'évolution avec constraintes unilatérales dépendant du temps. Note C. R. Acad. Sc. Paris, t.274 série A, p.310-312.

[1] J. L. Lions : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Paris 1969.

[1] F. Mignot. J. P. Puel : Note aux C. R. Acad. Sc. Paris,
