

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. S. BAOUENDI

J. SJÖSTRAND

## **Régularité analytique pour des opérateurs elliptiques singuliers en un point**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 7,  
p. 1-10*

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1974-1975\\_\\_\\_A6\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975___A6_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE  
CENTRE DE MATHÉMATIQUES  
*17, rue Descartes*  
*75230 Paris Cedex 05*

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z  
1 9 7 4 - 1 9 7 5

REGULARITE ANALYTIQUE POUR DES OPERATEURS  
ELLIPTIQUES SINGULIERS EN UN POINT

par

M. S. BAOUENDI et J. SJÖSTRAND

Exposé n° VII

18 Décembre 1974



On considère un opérateur différentiel dans  $\mathbf{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) de la forme

$$(1) \quad P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

où  $a_\alpha$  est un polynôme de  $n$  variables homogène de degré  $|\alpha|$  à coefficients complexes. On suppose que  $P$  est elliptique en dehors de 0 dans  $\mathbf{R}^n$ .

Le cas particulier suivant

$$L_{\lambda, \mu} = r^2 \Delta + \mu r \frac{\partial}{\partial r} + \lambda$$

où  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ ,  $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$  et  $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ , a été étudié dans [1] ;

il a été démontré que pour tous  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ ,  $L_{\lambda, \mu}$  n'est pas hypoelliptique dans  $\mathbf{R}^n$ , mais que pour tout  $\Omega$  ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , si  $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  et  $L_{\lambda, \mu} u$  est analytique dans  $\Omega$ ,  $u$  est aussi analytique dans  $\Omega$ .

On se propose ici de généraliser ces résultats à l'opérateur (1). Des opérateurs plus généraux que (1) (coefficients non nécessairement polynomiaux) sont aussi traités dans [2], auquel on renvoie aussi pour des démonstrations plus détaillées des résultats ci-dessous.

On désigne par  $S_{n-1}$  la sphère unité de  $\mathbf{R}^n$ . On a un difféomorphisme naturel

$$(2) \quad S_{n-1} \times \mathbf{R}_+ \simeq \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$$

correspondant à prendre des coordonnées polaires. Il résulte de (2) le difféomorphisme

$$(3) \quad T^*(S_{n-1}) \times \mathbf{R} \simeq T^*(\mathbf{R}^n) \Big|_{S_{n-1}}$$

Soit  $p(x, \xi)$  le symbole principal de  $P$  défini sur  $T^*(\mathbf{R}^n)$ , et pour  $((\theta, \eta), \zeta) \in T^*(S_{n-1}) \times \mathbf{R}$ , soit  $q(\theta, \eta, \zeta)$  la composition de  $p$  avec le difféomorphisme (3). La fonction  $q(\theta, \eta, \zeta)$  est un polynôme homogène de degré  $m$  en les variables  $(\eta, \zeta)$ .

On note

$$(4) \quad \Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists (\theta, \eta) \in T^*(S_{n-1}) \setminus 0, q(\theta, \eta, -iz) = 0\}$$

$$\Gamma_+ = \Gamma \cap \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\} .$$

L'ellipticité de  $P$  en dehors de l'origine, entraîne que  $\Gamma$  et  $\Gamma_+$  sont des cônes fermés dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ne rencontrant pas l'axe imaginaire.

On introduit l'hypothèse (H) suivante :

Il existe des nombres  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_\ell$  satisfaisant

$$(H) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_\ell < \frac{\pi}{2} \\ \theta_{j+1} - \theta_j < \frac{\pi}{n-1} \quad \text{pour } j = 0, \dots, \ell-1 \\ \Gamma_+ \subset \bigcup_{j=0}^{\ell-1} \{z \in \mathbb{C} \mid \theta_j < \arg z < \theta_{j+1}\} . \end{array} \right.$$

On note que (H) est toujours vérifiée pour  $n = 2$ .

On a les résultats :

**Théorème 1** : On suppose (H) vérifiée. Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  telle que  $Pu$  soit analytique dans  $\Omega$ , alors  $u$  est aussi analytique dans  $\Omega$ .

**Théorème 2** : Sous l'hypothèse (H) ; l'opérateur  $P$  est non hypoelliptique dans  $\mathbb{R}^n$  ; plus précisément il existe une distribution  $T$  définie dans  $\mathbb{R}^n$ , non  $\mathcal{C}^\infty$  et vérifiant  $PT = 0$ .

On note que la condition (H) n'est pas invariante sous des changements linéaires de coordonnées. On ignore si les conclusions des théorèmes 1 et 2 restent encore valables sans la condition restrictive (H)

On signale que les théorèmes 1 et 2 s'appliquent en particulier si on suppose que  $m$  est pair et que l'on a la factorisation

$$\sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} = q(x) (A(D))^{m/2}$$

où  $A(D)$  est un opérateur elliptique homogène d'ordre 2 à coefficients constants et à symbole réel. En effet, après un changement linéaire de variables, on peut supposer  $A(D) = \Delta$ , dans ce cas, on a  $\Gamma_{+} = \mathbf{R}_{+}$  et (H) est alors satisfaite.

L'idée (qui pourrait paraître naturelle), de démontrer, au moins en partie, le théorème 1 par l'utilisation d'un développement de Taylor à l'origine, échoue. On peut en effet trouver un opérateur  $P$  de la forme (1) avec  $n=2$  et  $m=1$ , une fonction analytique  $f$  au voisinage de 0 dans  $\mathbf{R}^2$  tels qu'il existe une série formelle  $u$ , unique à l'addition d'une constante près, vérifiant  $Pu = f$ , et qui soit divergente.

### § 1. INDICATIONS SUR LA DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Si  $u \in \mathcal{C}^{\infty}(B)$  où  $B$  est la boule unité fermée de  $\mathbf{R}^n$  centrée à l'origine, on écrit le développement de Taylor de  $u$  à l'origine en utilisant les coordonnées polaires, sous la forme

$$(5) \quad u \sim \sum_{k=0}^{\infty} r^k u_k(\theta)$$

( $\theta \in S_{n-1}$ ,  $r \in \mathbf{R}_{+}$ ,  $u_k \in V_k$ , espace des restrictions à  $S_{n-1}$  des polynômes homogènes de degré  $k$ ).

La transformée de Mellin de  $u$  dans la direction radiale est donnée par

$$(6) \quad u(z, \theta) = \int_0^1 u(r\theta) r^{-z-1} dr.$$

La fonction  $\tilde{u}$  est une fonction méromorphe en  $z$  à valeurs dans  $\mathcal{C}^{\infty}(S_{n-1})$ . Les seuls pôles sont les entiers  $\geq 0$ , le résidu de  $\tilde{u}$  au point  $z = k \in \mathbf{N}$  est  $u_k(\theta)$ . On a aussi pour tout  $N \in \mathbf{N}$

$$(7) \quad \tilde{u}(z, \theta) = \sum_{k=0}^N \frac{u_k(\theta)}{k-z} + \tilde{u}_N(z, \theta)$$

où, pour tout  $s \in \mathbf{R}$  la fonction  $z \mapsto \|\tilde{u}_N(z, \theta)\|_{H^s(S_{n-1})}$  est uniformément bornée dans  $\{\operatorname{Re} z \leq N + \frac{1}{2}\}$ .

On vérifie aussi que l'on a, pour tout  $N \in \mathbf{N}$

$$(8) \quad \widetilde{\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)^N u}(z, \theta) = z^N \tilde{u}(z, \theta) + \sum_{j=0}^{N-1} C_j(\theta) z^j$$

où les  $C_j \in \mathcal{C}^\infty(S_{n-1})$  et font intervenir les traces de  $u$  jusqu'à l'ordre  $N-1$  sur la sphère  $r=1$ .

On note aussi que si  $\tilde{u}(z, \theta)$  est un polynôme en  $z$ , on a  $u \equiv 0$ .

L'analyticité de  $u$  implique l'existence de  $M > 0$  tel que, pour tout  $s \in \mathbf{R}$ , il existe  $C_s > 0$  vérifiant, pour tout  $k \in \mathbf{N}$ :

$$(9) \quad \|u_k\|_{H^s(S_{n-1})} \leq C_s M^k.$$

On montre par un raisonnement sur les polynômes homogènes  $P_k(x) = r^k u_k(\theta)$ , que (9), pour  $s=0$ , implique que la série de Taylor de  $u$  à l'origine est convergente.

Si  $u$  est analytique et si  $M < 1$  dans (9) on a

$$(10) \quad \tilde{u}(z, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(\theta)}{k-z}.$$

Le théorème 1 résulte des lemmes 1 et 2 ci-dessous.

**Lemme 1** : Sous l'hypothèses (H) si  $u \in \mathcal{C}^\infty(B)$ , plate à l'origine (i.e.  $D^\alpha u(0) = 0$  pour tout  $\alpha \in \mathbf{N}^n$ ) et  $Pu \equiv 0$ . alors  $u \equiv 0$ .

Démonstration Il suffira de démontrer que  $\tilde{u}(z, \theta)$  est un polynôme en  $z$ .

En coordonnées polaires,  $P$  s'écrit sous la forme

$$(11) \quad P = \sum_{j=0}^m A_j(\theta, D_\theta) \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)^{m-j}$$

où  $A_j$  est un opérateur différentiel sur  $S_{n-1}$  d'ordre  $\leq j$ . Si  $a_j^*(\theta, \eta)$  est le symbole principal d'ordre  $j$  de  $A_j$ , on a, pour  $((\theta, \eta), \zeta) \in T^*(S_{n-1}) \times \mathbf{R}$

$$(12) \quad q(\theta, \eta, \zeta) = \sum_{j=0}^m a_j^*(\theta, \eta) (i \zeta)^{m-1}.$$

En utilisant (8), on obtient, à partir de  $Pu = 0$  et (11)

$$(13) \quad \sum_{j=0}^m A_j(\theta, D_\theta) z^{m-j} \tilde{u}(z, \theta) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j(\theta) z^j.$$

L'ellipticité de  $P$  en dehors de l'origine entraîne que  $A_0(\theta) \neq 0$  sur  $S_{n-1}$ .  
En posant

$$B_j = -A_0^{-1} A_j \quad \text{et} \quad \hat{c}_j = c_j A_0^{-1}$$

l'équation (13) devient

$$(14) \quad (z^m - B_1(\theta, D_\theta) z^{m-1} - \dots - B_m(\theta, D_\theta)) \tilde{u}(z, \theta) = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{c}_j(\theta) z^j.$$

On va maintenant écrire (14) sous forme d'un système du premier ordre.

On pose

$$U(z, \theta) = \begin{pmatrix} \tilde{u}(z, \theta) \\ z \Lambda^{-1} \tilde{u}(z, \theta) \\ \vdots \\ z^{m-1} \Lambda^{-(m-1)} \tilde{u}(z, \theta) \end{pmatrix}$$

avec  $\Lambda = (I - \Delta_\theta)^{1/2}$ ,  $\Delta_\theta$  étant le laplacien sur la sphère  $S_{n-1}$ ,

$$C_j(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Lambda^{-(m-1)} c_j(\theta) \end{pmatrix}$$



$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \Lambda \\ \Lambda^{-(m-1)} B_m \dots \dots & \dots & \dots & \Lambda^{-(m-1)} B_1 \Lambda^{m-1} \end{pmatrix}$$

On obtient alors

$$(15) \quad (z - \mathcal{A}(\theta, D_\theta))U(z, \theta) = \sum_{j=0}^{m-1} C_j(\theta) z^j$$

L'opérateur  $\mathcal{A}$  est un pseudo-différentiel d'ordre 1; si  $a(\theta, \eta)$  désigne son symbole principal d'ordre 1, on obtient par un calcul simple, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ :

$$(16) \quad \det(z - a(\theta, \eta)) = q(\theta, \eta, -iz).$$

On voit alors que  $\mathcal{A}$  est elliptique et même que  $a$  n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire. Pour  $z$  dans la résolvante de  $\mathcal{A}$ , l'équation (5) s'écrit:

$$(17) \quad U(z, \theta) = (z - \mathcal{A})^{-1} \left( \sum_{j=0}^{m-1} C_j(\theta) z^j \right).$$

On montre maintenant que la fonction entière  $U(z, \theta)$  satisfait l'inégalité

$$(18) \quad \|U(z, \theta)\|_{L^2(S_{n-1})} \leq C(1 + |z|)^{m-1} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Pour cela on applique le théorème de Phragmén-Lindelöf à la fonction  $U$ , écrite sous la forme (17), sur les angles  $\theta_j \leq \arg z \leq \theta_{j+1}$ ,  $j = 0, \dots, \ell-1$ , en utilisant les deux estimations suivantes sur la résolvante de  $\mathcal{A}$ :

1) D'après [4] il existe  $C > 0$  tel que l'on ait pour  $|z|$  assez grand et  $\arg z = \theta_j$ ,  $j = 0, \dots, \ell$

$$(19) \quad \|(z - \mathcal{A})^{-1}\|_{L^2(S_{n-1})} \leq \frac{C}{|z|}$$

2) En utilisant des résultats de [3] sur des opérateurs de classe  $C_p$  ainsi que des résultats classiques [5] sur les fonctions entières exponentielles de type  $p$ , on montre qu'il existe une suite de cercles  $(C_j)$  centrés à l'origine et de rayons tendant vers l'infini, tels que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $C_\varepsilon > 0$  vérifiant

$$(20) \quad \|(z - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(S_{n-1}))} \leq C_\varepsilon e^{|z|^{n-1+\varepsilon}} \text{ pour } z \in \bigcup_j C_j .$$

L'inégalité (18) montre alors que  $U$  est un polynôme et donc  $u$  est identiquement nulle.

Lemme 2 : Sous l'hypothèse (H), si  $u \in C^\infty(B)$  et  $Pu$  est analytique, le développement de Taylor de  $u$  à l'origine est une série convergente.

Démonstration : On pose  $Pu = v$ . On écrit la série de Taylor de  $v$  sous la forme (5)

$$v(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k v_k(\theta) ,$$

les fonctions  $v_k$  vérifient (9) (avec  $v_k$  au lieu de  $u_k$ ). Comme l'opérateur  $P$  est invariant par homothétie, on peut supposer que la constante  $M$ , figurant dans (9) pour les  $v_k$ , est  $< 1$ . On a alors

$$\tilde{v}(z, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k(\theta)}{k-z} .$$

Comme dans la réduction de la démonstration du lemme 1, on réduit l'équation  $Pu = v$  au système du premier ordre:

$$(21) \quad (z - \mathcal{A}(\theta, D_\theta)) U(z, \theta) = V(z, \theta) + \sum_{j=0}^{m-1} C_j(\theta) z^j$$

avec  $\tilde{U}$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $C_j$  comme dans le lemme 1 et

$$V(z, \theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Lambda^{-(m-1)} A_0^{-1} \tilde{v}(z, \theta) \end{pmatrix} .$$

Pour se ramener à des fonctions entières on pose

$$\hat{U}(z, \theta) = \sin(2\pi z) U(z, \theta)$$

$$\hat{V}(z, \theta) = \sin(2\pi z) V(z, \theta).$$

On a alors, à partir de (21), pour  $z$  dans la résolvente de  $\mathcal{A}$ .

$$(22) \quad \hat{U}(z, \theta) = (z\mathcal{A})^{-1} (\hat{V}(z, \theta) + \sum_{j=0}^{m-1} C_j(\theta) z^j \sin(2\pi z)).$$

Comme dans le lemme précédent, on peut utiliser le théorème de Phragmén-Lindelöf grâce à (19) et (20) et on obtient

$$(23) \quad \|\hat{U}(z, \theta)\|_{L^2(S_{r-1})} \leq C_1 e^{C_2 |z|} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Comme on a  $(2\pi)u_k(\theta) = \hat{U}(k, \theta)$ , on déduit de (23) que  $(u_k)$  vérifie (9) pour  $s=0$ , et on obtient ainsi la convergence de la série de Taylor de  $u$ .

## § 2. INDICATIONS SUR LA DEMONSTRATION DU THEOREME 2

Soit  $\mathcal{A}$  l'opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 introduit dans la démonstration du lemme 1. On a

Lemme 3 : Sous l'hypothèse (H) il existe  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} z_0 < 0$  et  $z_0$  est une valeur propre de  $\mathcal{A}$ .

Démonstration : On raisonne par l'absurde ; on suppose que tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} z < 0$  est dans la résolvente de  $\mathcal{A}$ . La fonction  $(z - \mathcal{A})^{-1}$  est donc holomorphe dans  $\operatorname{Re} z < 0$ . On en déduit, par le théorème de Phragmén-Lindelöf, grâce à (19) (pour  $|z|$  assez grand et  $\arg z = \theta_j - \pi$ ) et (20), que l'on a

$$(24) \quad \|(z - \mathcal{A})^{-1}\|_{L(L^2(S_{r-1}))} \leq \frac{C}{|z|} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}, |z| \text{ assez grand et } \operatorname{Re} z < 0.$$

Par un argument classique, on déduit de (24) que la matrice  $(a_{jk})$

valeurs propres dans  $\Re z < 0$ , ce qui est absurde (en utilisant l'homogénéité de a). c.q.f.d.

On revient maintenant à la démonstration du théorème 2. Soit  $z_0$  donné par le lemme 3. Il existe  $U \in (\mathcal{C}^\infty(S_{n-1}))^m$ ,  $U \neq 0$ , et  $(z_0 - \mathcal{A})U = 0$ .

La forme de  $\mathcal{A}$  montre que  $U$  est nécessairement de la forme

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} u_0(\theta) \\ z \Lambda^{-1} u_0(\theta) \\ \vdots \\ z^{m-1} \Lambda^{-(m-1)} u_0(\theta) \end{pmatrix},$$

avec  $u_0 \in \mathcal{C}^\infty(S_{n-1})$ ,  $u_0 \neq 0$  vérifiant

$$(25) \quad (A_m(\theta, D_\theta) + A_{m-1}(\theta, D_\theta) z_0 + \dots + A_0(\theta) z_0^m) u_0(\theta) = 0.$$

On pose avec  $x = (r\theta) \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$

$$f(x) = r^z u_0(\theta).$$

La fonction  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  dans  $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  et vérifie, grâce à (25) et (11)

$$P(x, D)f = 0 \quad \text{dans } \mathbf{R}^n \setminus \{0\}.$$

Soit alors  $F$  une distribution dans  $\mathbf{R}^n$  dont la restriction à  $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  est  $f$ . On a

$$(26) \quad P(x, D)F = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha \delta$$

avec  $c_\alpha \in \mathbb{C}$  et  $N \in \mathbf{N}$ .

Soit  $E_N$  l'espace de toutes les distributions de la forme

$\sum_{|\alpha| \leq N} d_\alpha D^\alpha \delta$ ,  $d_\alpha \in \mathbb{C}$ ;  $P$  est un opérateur linéaire de l'espace de dimension finie  $E_N$ : on distingue alors deux cas :

i)  $P$  est bijectif dans  $E_N$ ; dans ce cas, on peut, grâce à (26), modifier  $F$  par addition d'un élément de  $E_N$  et on obtient une distribution  $T$  non  $\mathcal{C}^\infty$  vérifiant

$$PT = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n.$$

ii)  $P$  n'est pas bijectif; dans ce cas il existe  $T \in E_N$ ,  $T \neq 0$  vérifiant

$$PT = 0.$$

Ceci complète la démonstration du théorème 2.

---

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. S. Baouendi, C. Goulaouic et L. J. Lipkin : On the operator  $\Delta r^2 + \mu(\frac{\partial}{\partial r})r + \lambda$  ; J. Diff. Equ. 15 (1974) p.499-509.
  - [2] M. S. Baouendi et J. Sjöstrand : Régularité analytique pour des opérateurs elliptiques singuliers en un point (Article à paraître).
  - [3] N. Dunford et J. T. Schwartz : Linear operators, Part II, New York (1963).
  - [4] R. T. Seeley : Complex powers of an elliptic operator. Proc. Symp. Pure Math. A. M. S. 10 (1967) p.288-307.
  - [5] E. C. Titchmarsh : The theory of functions, Second edition, London (1939).
-