SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. S. BAOUENDI

C. GOULAOUIC

Problèmes de Cauchy singuliers non linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 3 et 4, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A3_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z

1 9 7 4 - 1 9 7 5

PROBLEMES DE CAUCHY SINGULIERS NON LINEAIRES

par M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC

Exposés n^{os} III et IV   20 et 27 Novembre 1974

Rappelons d'abord le théorème classique de Cauchy-Kovalevsky pour un système non linéaire du premier ordre : le système

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = f(t,x,u,\dfrac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial u}{\partial x_n}) \\ u(0,x) = u_o(x) \end{cases}$$

où u_o est analytique au voisinage de 0 et f analytique au voisinage de $(0.0,u_o(0),\ldots,\dfrac{\partial u_o}{\partial x_n}(0))$, a une solution u unique analytique au voisinage de l'origine.

N. Nagumo [4] a étendu ce théorème au cas où f est seulement continue en t à valeurs dans les fonctions analytiques dans les autres variables : il obtient alors une solution locale unique continue en t à valeurs dans les fonctions analytiques en x. Des démonstrations de ce théorème, dans des contextes plus généraux ont été données indépendamment et par des méthodes différentes par L. Nirenberg [5] et L. V. Ovsjannikov [6]. L'idée commune est la résolution d'un problème de Cauchy abstrait dans une chaîne d'espaces de Banach (idée introduite et utilisée aussi par T. Yamanaka, J. F. Treves [7]...).

Dans [1], nous avons étendu le résultat de Nagumo au cas de problèmes singuliers du type de Fuchs que nous allons décrire ci-dessous. La méthode est inspirée de [2] et du travail de L. Nirenberg [5] qui traite le cas non caractéristique.

Commençons par un exemple : soit au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$ l'équation scalaire

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{u}{t}\dfrac{\partial u}{\partial x} + h(t,x) \\ u(0,x) = u_o(x) \end{cases}$$

où u_o est donnée analytique au voisinage de 0 et h est supposée, pour simplifier, analytique au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$; on cherche u aussi analytique au voisinage de l'origine. On voit que u_o doit satisfaire au voisinage de 0

$$u_o(x)\frac{\partial u_o}{\partial x}(x) = 0 ,$$

ce qui implique $u_o(x) = c \in \mathbb{C}$. On distingue les cas $c \neq 0$ et $c = 0$ (respectivement : non fuchsien et fuchsien suivant la terminologie dans la suite).

Dans le cas $c \neq 0$, il existe une infinité de solutions de (2) ; on résoud un problème de Cauchy avec surface initiale non caractéristique $\{x = 0\}$, sur laquelle on peut avoir une donnée initiale φ analytique arbitraire pourvu que $\varphi(0) = c$.

Dans le cas $c = 0$,(2) a une solution unique ; cela résultera du théorème 1 ci-dessous (la vérification en est laissée au lecteur).

Nous considérons le système

$$t\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \tag{3}$$

avec $u = (u_1,\ldots,u_p)$, $f = (f_1,\ldots,f_p)$, $t \in \mathbb{R}$, $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$; les fonctions f_i pour $i = 1,\ldots,p$, sont $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à t à valeurs dans l'espace des fonctions analytiques des variables $x, u,\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}$, définie dans un voisinage de $(0,0,u_o(0),\ldots,\frac{\partial u_o}{\partial x_n}(0))$, où u_o est une fonction analytique définie dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$f\left(0,x,u_o(x),\ldots,\frac{\partial u_o(x)}{\partial x_n}\right) = 0 . \tag{4}$$

On dit que le système (3) est fuchsien en $(0,u_o)$ si on a pour $i = 1,\ldots,n$

$$f'_{\frac{\partial u}{\partial x_i}}\left(0,x,u_o(x),\ldots,\frac{\partial u_o(x)}{\partial x_n}\right) = 0 \text{ au voisinage de } 0. \tag{5}$$

On supposera (4) et (5) vérifiées. On note

$$\Lambda(x) = f'_u\left(0,x,u_o(x),\ldots,\frac{\partial u_o(x)}{\partial x_n}\right) - I .$$

On a alors le résultat :

Théorème 1 : Si $\det(\Lambda(0) - kI) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'équation (3) a une unique solution u définie dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathcal{C}^\infty$ en t à valeurs dans les fonctions analytiques en x et telle que $u(0,x) = u_o(x)$.

De plus, si f est analytique aussi en t, il en est de même pour u.

Ce théorème et des résultats analogues pour des équations d'ordre supérieur seront obtenus en passant par la résolution de problèmes de Cauchy singuliers abstraits (lesquels ont d'autres applications non traitées dans cet exposé).

Le plan est :

I - Problème de Cauchy abstrait sous une forme réduite.

II- Réduction du problème de Cauchy du premier ordre.

III- Equations d'ordre supérieur .

§ 1. PROBLEME DE CAUCHY ABSTRAIT SOUS UNE FORME REDUITE

On se donne une chaîne décroissante $(X_s)_{0<s\leq 1}$ d'espaces de Banach (i.e. pour tous $0 < s' < s \leq 1$, l'injection de X_s dans $X_{s'}$ est de norme ≤ 1) ♦. Soit Λ un opérateur linéaire de $\bigcup_{0<s\leq 1} X_s$ dans lui-même dont la restriction à chaque X_s est continue de X_s dans lui-même ($\Lambda \in \mathcal{L}(X_s,X_s)$).

On fait l'hypothèse

(6) Il existe $M > 0$, un compact K et un contour γ entourant K contenus dans $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \operatorname{Re} z < 0\}$ tels que, pour tout $s \in]0,1]$, le spectre $\operatorname{sp}_s \Lambda$ de Λ opérant dans X_s est contenu dans K et

$$\sup_{\substack{z \in \gamma \\ s \in]0,1]}} \|(z-\Lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_s,X_s)} \leq M.$$

♦ Exemple : On prend $X_s = (Y_s)^p$ où Y_s est l'espace des fonctions analytiques bornées sur le polydisque $\{z = (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n\ ;\ |z_i| < \rho s\}$ avec $\rho > 0$. L'application des résultats abstraits du paragraphe II dans ce cadre donnera le théorème 1.

Soient $T > 0$ et $h \in \mathcal{C}([-T,T],X_1)$; on désigne par u_o l'unique élément de X_1 vérifiant

$$-\Lambda u_o = h(0).$$

Soient $R > 0$ et g une fonction de $[-T,T] \times \bigcup_{0<s\leq 1} \{u \in X_s \,;\|u - u_o\|_s < R\}$ dans $\bigcup_{0<s\leq 1} X_s$ qui, pour tous $0 < s' < s \leq 1$, est continue de $[-T,T] \times \{u \in X_s \,;\|u - u_o\|_s < R\}$ dans $X_{s'}$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $s \in]0,1]$ et tout $u \in X_s$ vérifiant $\|u - u_o\|_s < R$, il existe $A_u \in \mathcal{C}([-T,T], \mathcal{L}(X_s,X_{s'})$ pour tous $0 < s' < s$ et vérifiant

(7) $$\sup_{|t|\leq T} \|A_u(t)\|_{\mathcal{L}(X_s,X_{s'})} \leq \frac{C}{s - s'},$$

et, pour tout $v \in X_s$ avec $\|v - u_o\|_s < R$,

(8) $$\sup_{|t|\leq T} \|g(t,v) - g(t,u) - A_u(t)(v - u)\|_{s'} \leq \frac{C}{s-s'} \|v - u\|_s^2 .$$

On suppose aussi (ce qui est toujours possible quitte à restreindre la chaîne (X_s)) que l'application

(9) $t \mapsto g(t,u_o)$ est continue de $[-T,T]$ dans X_1 .

On a alors, avec les hypothèses précédentes le résultat suivant

<u>Théorème 2</u> : L'équation

(10) $$tu' - \Lambda u = tg(t,u) + h(t)$$

admet au voisinage de $t = 0$, une solution unique au sens suivant :
Il existe $T_o \in]0,T]$ tel que pour tout $a \in]0,T_o]$ et tout $s \in]0,1[$, il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}(]-a(1-s),a(1-s)[,X_s)$ vérifiant

$$\sup_{|t|<a(1-s)} \|u(t)-u_o\|_s < R \quad \text{et} \quad (10) \ .$$

De plus $u(0) = u_o$.

Pour la démonstration de ce théorème nous avons besoin de quelques préliminaires.

1) <u>Equation fuchsienne opérationnelle</u>

Soit X un espace de Banach et $L \in \mathcal{L}(X,X)$ tel que

$$\operatorname{sp} L \subset \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \operatorname{Re} z \leq -2\varepsilon < 0\} \ .$$

<u>Lemme 1</u> : Pour tout $f \in \mathcal{C}([-T,T],X)$ il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}([-T,T],X)$ vérifiant

(11) $$tu' - Lu = f \quad \text{dans }]-T,T[.$$

De plus $tu' \in \mathcal{C}([-T,T],X)$ et $(tu')(0) = 0$. Cette solution u est notée $H_L f$.

<u>Démonstration</u> : Pour $\sigma \in]0,\infty[$, on définit l'opérateur $\sigma^{-L-I} \in \mathcal{L}(X,X)$ par la formule

$$\sigma^{-L-I} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \sigma^{-z-1}(z-L)^{-1}dz$$

où γ est un contour entourant sp L et est contenu dans $\{z \in \mathbb{C}; \ \operatorname{Re} z \leq -\varepsilon\}$. On définit alors

$$(H_L f)(t) = \int_o^1 \sigma^{-L-1} f(\sigma t)\, d\sigma$$

et on vérifie que $H_L f \in \mathcal{C}([-T,T],X)$ est la solution unique de l'équation (11) ; de plus on a :

$$\|(H_L t f)(t)\|_X \leq C_o \int_{[o,t]} \|f(\sigma)\|_X d\sigma \quad ,$$

$$\|(H_L f)(t)\|_X \leq \frac{C_o}{\varepsilon} \sup_{\sigma \in [0,t]} \|f(\sigma)\|_X \quad ,$$

et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $f \in \mathcal{C}^k([-T,T],X)$ alors $H_L f \in \mathcal{C}^k([-T,T],X)$ et $H_L tf \in \mathcal{C}^{k+1}([-T,T],X)$.

2) <u>Résolution de (10) dans le cas linéaire</u>

Pour $a \in]0,T]$ on note E_a l'espace des fonctions u définies dans $]-a,a[$ à valeurs dans $\bigcup_{0<s\leq 1} X_s$ telles que, pour tout $s \in]0,1[$,

$$u \in \mathcal{C}(]-a(1-s),a(1-s)[,X_s)$$

et $N_a(u) = \sup_{\substack{|t|<a(1-s)\\ 0<s<1}} (\|u(t)\|_s (1 - \frac{t}{a(1-s)}) < \infty$.

On suppose ici que g dans (10) est de la forme $g(t,u) = A(t)u$ où $A \in \mathcal{C}(]-a(1-s),a(1-s)[,\mathcal{L}(X_s, X_{s'}))$ pour $0< s' < s \leq 1$ et vérifie

$$\sup_{\substack{|t|<a(1-s)\\ 0<s<1}} \|A(t)\|_{\mathcal{L}(X_s,X_{s'})} \leq \frac{C}{s'-s} \quad .$$

On a :

<u>Lemme 2</u> : Pour $a \in]0, \frac{1}{4CC_o}[$ et $\ell \in E_a$, l'équation intégrale

$$u = H_\Lambda tAu + \ell$$

a une solution unique dans E_a, en plus

(12) $$N_a(u) \leq \frac{1}{1 - 4aCC_o} N_a(\ell)$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de montrer que l'application $u \mapsto H_\Lambda t\, Au$ est continue de E_a dans lui même et vérifie, pour tout $u \in E_a$,

(13) $$N_a(H_\Lambda tAu) \leq 4aCC_o N_a(u) \quad .$$

Pour $u \in E_a$ et $s \in]0,1[$, on a

$$\|(H_\Lambda t\, A\, u)(t)\|_s \leq C_o \int_{[0,t]} \|A(\sigma)u(\sigma)\|_s d\sigma.$$

Pour $s(\sigma) \in \left]s, \frac{a-|\sigma|}{a}\right[$ on a

$$\|A(\sigma)u(\sigma)\|_s \leq \frac{C}{s(\sigma)-s} \|u(\sigma)\|_{s(\sigma)} \leq \frac{Ca(1-s(\sigma))}{(s(\sigma)-s)(a(1-s(\sigma)-|\sigma|)} N_a(u) \ .$$

En choisissant $s(\sigma) = \frac{1}{2}(s+1-\frac{|\sigma|}{a})$, une majoration d'intégrales donne (13).

3) <u>Démonstration du théorème 2 par l'utilisation d'une méthode itérative du type de celle de Newton</u>

On peut supposer que $h(0) = 0$ et donc $u_o = 0$.

Résoudre l'équation (10) équivaut à résoudre, dans les mêmes espaces, l'équation intégrale

(14) $$u = H_\Lambda t\, g\,(t,u) + H_\Lambda h.$$

On utilise une suite a_k définie par

$$\begin{cases} a_o \text{ choisi ultérieurement dans } \left]0, \frac{1}{4\,CC_o}\right[\\ a_{k+1} = a_k(1 - \frac{1}{(k+2)^2}) \quad \text{pour } k \geq 0 \ . \end{cases}$$

On va construire par récurrence une suite de fonctions (u_k) vérifiant :

(15) $u_k \in E_{a_{k-1}}$ pour $k \geq 1$ et $u_o = 0$,

(16) $\|u_k(t)\|_s < \frac{R}{2}$ pour $|t| < a_k(1-s)$ pour $k \geq 0$ et $s \in]0,1[$,

et définie par :

$u_{k+1} = u_k + v_k$ pour $k \geq 0$, où v_k est donnée par

(17) $$v_k = H_\Lambda t\, A_{u_k} v_k + H_\Lambda h + H_\Lambda t\, g\,(t,u_k) - u_k \ .$$

On remarque d'abord que (17) a un sens grâce à (15) et (16) ; en effet si

$$u \in \mathcal{C}(]-a_k(1-s), a_k(1-s)[, X_s) \quad \text{pour tout } s \in]0,1[$$

il en est de même de $g(t,u)$.

Il résulte du lemme 2 avec $a = a_k$ et $A = A_{u_k}$ que (17) a une unique solution $v_k \in E_{a_k}$ et telle que

$$N_{a_k}(v_k) \leq \frac{1}{1-4a_k CC_o} N_{a_k}(H_\Lambda h + H_\Lambda t\, g(t,u_k) - u_k) . \tag{18}$$

Il suffit maintenant de prouver (16) pour l'indice $k+1$ au lieu de k, en choisissant a_o assez petit indépendamment de k.

On note

$$C_1 = \frac{1}{1-4a_o C C_o} \geq \frac{1}{1-4a_k C C_o} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} ,$$

et

$$\lambda_k = N_{a_k}(H_\Lambda h + H_\Lambda t\, g(t,u_k) - u_k) .$$

On a pour $|t| < a_{k+1}(1-s)$ et $s \in]0,1[$,

$$\|u_{k+1}(t)\|_s \leq \|v_k(t)\|_s + \|u_k(t)\|_s$$

$$\leq N_{a_k}(v_k) \frac{a_k(1-s)}{a_k(1-s)-|t|} + \|u_k(t)\|_s \quad ;$$

d'après (18) on a donc :

$$\|u_{k+1}(t)\|_s \leq C_1 \lambda_k (k+2)^2 + \|u_k(t)\|_s,$$

et donc

$$\|u_{k+1}(t)\|_s \leq C_1 \sum_{j=0}^{k} \lambda_j (j+2)^2 \quad \text{pour } |t| < a_{k+1}(1-s) .$$

Il suffit donc de montrer que l'on a, pour a_o assez petit indépendamment de k,

(19) $$C_1 \sum_{j=0}^{k} \lambda_j (j+2)^2 < \frac{R}{2} .$$

Pour cela on calcule λ_j en fonction de λ_{j-1} pour $j = 1,\dots,k$; on note

$$r_j = g(t,u_j) - g(t,u_{j-1}) - A_{u_{j-1}}(u_j - u_{j-1}) .$$

De (17) pour l'indice j, on obtient

$$H_\Lambda(t\, g(t,u_{j-1}) + t\, A_{u_{j-1}}(u_j - u_{j-1}) + h) - u_j = 0 ,$$

et donc

$$\lambda_j = N_{a_j}(H_\Lambda\, t\, r_j) .$$

On a par ailleurs, pour $|t| < a_j(1-s)$,

$$\|(H_\Lambda\, t\, r_j)(t)\|_s \le \int_{[0,t]} \|r_j(\sigma)\|_s d\sigma ;$$

en utilisant (8), on a pour $s < s(\sigma) < 1 - \frac{|\sigma|}{a_j}$,

$$\|(H_\Lambda\, t r_j)\ (t)\|_s \le \int_0^{|t|} \frac{C}{s(\sigma)-s} \left(N_{a_{j-1}}(v_{j-1}) \frac{(1-s(\sigma))a_{j-1}}{a_{j-1}(1-s(\sigma))-\sigma}\right)^2 d\sigma .$$

On prend

$$s(\sigma) = \frac{1}{2}\left(s+1-\frac{|\sigma|}{a_j}\right) ,$$

en utilisant (18) pour l'indice (j-1), on obtient après de pénibles majorations d'intégrales :

(20) $$\lambda_j \le 4\, C\, C_1^2\, a_o\, \lambda_{j-1}^2 (j+1)^2 .$$

Pour obtenir (19) il suffit d'avoir par exemple

(21) $$\lambda_j \le \beta(j+2)^{-4} \quad \text{pour } j = 0,1,\dots,k$$

avec β assez petit pour vérifier

(22) $$\beta C_1 \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)^{-2} < R/2 \quad .$$

On suppose (21) jusqu'à l'ordre $j-1$ et on le montre pour l'ordre j ; de (20) on déduit

$$\lambda_j \leq 4C\, C_1^2\, a_o\, (j+1)^2 \beta^2 (j+1)^{-8} \quad ;$$

il suffit d'avoir

(23) $$\sup_{j \in \mathbb{N}} ((j+2)^4 (j+1)^{-6}) \leq (4\beta\, C\, C_1^2\, a_o)^{-1} \, .$$

On choisit d'abord β vérifiant (22); on peut alors choisir a_o assez petit pour obtenir (23); il reste seulement à montrer qu'avec a_o assez petit on peut aussi réaliser (21) pour $j = 0$; ceci se fait en utilisant des inégalités déjà utilisées sur l'opérateur H_Λ et est laissé au lecteur.

Alors, pour a_o assez petit, on a construit par récurrence une suite (u_k) de fonctions vérifiant (15) (16) (17) et

$$N_{a_k}(u_{k+1} - u_k) \leq C_1\, \beta (k+2)^{-4} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \, .$$

On pose

$$a_\infty = \lim_{k \to \infty} a_k \quad .$$

La suite (u_k) converge dans E_{a_∞} vers une fonction u vérifiant

$$\|u(t)\|_s \leq R/2 \quad \text{pour} \quad |t| < a_\infty(1-s) \quad \text{et} \quad s \in \,]0,1[\, .$$

Il résulte de (17), par passage à la limite, que u vérifie l'équation (14).

Pour démontrer l'unicité de la solution de l'équation (14), on montre par des estimations du type de celles déjà utilisées, que si u et v sont deux solutions de (14) dans E_a on a

$$N_a(u-v) \leq 4\, a\, C\, C_o(1+2R)\, N_a(u-v) \quad ,$$

ce qui implique l'unicité pour a assez petit.

Remarque 1 : Si, en plus des hypothèses du théorème 2, on suppose g et h $\mathcal{C}^\infty$ en t, alors la solution u est aussi $\mathcal{C}^\infty$ en t; cela résulte de l'équation et des propriétés de l'opérateur H_Λ .

On peut aussi montrer que u est analytique en t si g et h le sont.

§ 2. REDUCTION DU PROBLEME DE CAUCHY DU PREMIER ORDRE

On considère ici une chaîne décroissante d'espaces de Banach $(X_s)_{0<s\leq s_1}$ avec $s_1 > 1$. Pour $|t| \leq T$ et $1 \leq i \leq n$, on considère des opérateurs $A_i(t)$ tels que

$$A_i \in \mathcal{C}^\infty([-T,T], \mathcal{L}(X_s, X_{s'})) \quad \text{pour tous } 0 < s' < s \leq s_1 \ ,$$

$$\sup_{\substack{|t|\leq T \\ 0<s'<s\leq s_1}} (s-s')\|A_i^{(p)}(t)\|_{\mathcal{L}(X_s,X_{s'})} < \infty \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N} \ .$$

On note aussi pour $i = 1,\ldots,n$

$$A_{i+n}(t) = \begin{cases} \dfrac{A_i(t) - A_i(0)}{t} & \text{pour } 0 < |t| \leq T \\[2ex] A_i'(0) & \text{pour } t = 0 \ . \end{cases}$$

Soient u_o donné dans X_{s_1}, $R > 0$; pour $s \in \,]0,s_1[$ on note

$$\Omega(u_o,s) = \{(y_o,\ldots,y_n) \in (X_s)^{n+1} \ ; \ \|y_o - u_o\|_s < R \text{ et } \|y_i - A_i(0)u_o\|_s < R \quad \text{pour } i = 1,\ldots,n\} \ .$$

Soit F une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $[-T,T] \times \Omega(u_o,s)$ dans X_s pour tout $s \in]0,s_1[$ et telle que

$$F(0,u_o,A_1(0)u_o,\dots,A_n(0)u_o) = 0 \ .$$

On note F'_t et F'_{y_i} les dérivées partielles de F par rapport à t et y_i pour $i = 0,\dots,n$.

Le but de ce paragraphe est de résoudre au voisinage de $t=0$ l'équation

$$(24) \qquad \begin{cases} tu' = F(t,u,A_1u,\dots,A_nu) \\ u(0) = u_o \ . \end{cases}$$

On note $\tilde{F}(t,u) = F(t,u,A_1u,\dots,A_nu)$ et

$$\Lambda = \tilde{F}'_u(0,u_o) - I \ .$$

On désigne par Γ_i le commutateur $[\Lambda,A_i(0)]$ pour $i = 1,\dots,2n$.

Evidemment Λ et Γ_i pour $i = 1,\dots,2n$ appartiennent à $\mathcal{L}(X_s,X_{s'})$ pour tous $0 < s' < s < s_1$.

On fait maintenant l'hypothèse essentielle décrivant la caractère fuchsien de l'équation (24).

Les opérateurs Λ et Γ_i, pour $i = 1,\dots,2n$, sont dans $\mathcal{L}(X_s,X_s)$ pour $s \in]0,s_1[$ et il existe $B > 0$ tel que

$$\sup_{0<s<s_1} \|\Lambda\|_{\mathcal{L}(X_s,X_s)} \leq B \qquad \text{et}$$

$$\sup_{\substack{0<s<s_1 \\ i=1,\dots,2n}} \|\Gamma_i\|_{\mathcal{L}(X_s,X_s)} \leq B.$$

On a alors le résultat :

<u>Théorème 3</u> : On suppose que $sp_s \Lambda \cap \mathbb{N} = \emptyset$ pour tout $s \in]0,s_1[$, alors l'équation (24) a une solution $\mathcal{C}^\infty$ unique au voisinage de l'origine.

L'existence et l'unicité s'entendent au sens du théorème 2. La démonstration de ce théorème se fait en trois étapes.

1) On pose $u = u_o + tv$, ce qui permet de mettre l'équation (24) sous la forme

$$tv' - \Lambda v = tG(t,v,A_1 v,\ldots,A_{2n}v) + H(t) \tag{25}$$

où G et H vérifient des hypothèses de régularité analogues à celles de F.

2) Dans le cas où Λ ne vérifie pas (6), on utilise un développement de Taylor d'ordre m tel que $\Lambda - mI$ vérifie (6) ; on a alors à résoudre un système fini d'équations stationnaires et une équation du type (25) où Λ vérifie (6). Ceci permet aussi de traiter le cas où $sp_s \Lambda$ rencontre $\mathbb{N}$.

3) On va quasilinéariser (25) (en supposant que Λ vérifie (6)). On note

$$w_o = v$$
$$w_i = A_i v \qquad \text{pour } i = 1,\ldots,2n \;;$$

en appliquant A_i à (25) pour $i = 1,\ldots,2n$ on obtient

$$\left\{\begin{aligned} &tw'_o - \Lambda w_o = t\,G(t, w_o,\ldots,w_{2n}) + H(t) \\ &tw'_i - \Lambda w_i + \Gamma_i w_o = t\,A_i\,G(t,w_o,\ldots,w_{2n}) + tA'_i w_o \\ &\qquad\qquad + A_i H - t\left[\Lambda,\frac{A_i - A_i(0)}{t}\right] w_o \end{aligned}\right. \tag{26}$$

L'équation (26) se met sous la forme

$$tW' - \tilde{\Lambda} W = t\,\tilde{G}(t, W) + \tilde{H} \tag{27}$$

avec

$$W = \begin{pmatrix} w_o \\ \vdots \\ w_{2n} \end{pmatrix} \qquad \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\Gamma_1 & \Lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ -\Gamma_{2n} & 0 & \cdots & \Lambda \end{pmatrix}$$

et $\tilde{G}$ et $\tilde{H}$ vérifiant les hypothèses sur g et h du théorème 2 dans la chaîne $(X_s)^{2n+1}$. On remarque $\tilde{\Lambda}$ vérifie (6) dans cette chaîne et on peut alors appliquer le théorème 2 et la remarque 1.

§ 3. EQUATIONS D'ORDRE SUPERIEUR

Pour plus de simplicité on considère seulement le cas d'une équation.

Soient $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ une famille d'opérateurs indépendants de t, commutant entre eux et vérifiant

$$\sup_{\substack{0 < s' < s < s_1 \\ 1 \leq i \leq n}} (s - s') \|A_i\|_{\mathcal{L}(X_s, X_{s'})} < \infty .$$

Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $A^\alpha = A_1^{\alpha_1} \dots A_n^{\alpha_n}$.

On veut résoudre au voisinage de l'origine des équations de la forme

$$(28) \qquad \begin{cases} t^k D_t^m u = F(t, D_t^\ell A^\alpha u \text{ pour } 0 \leq \ell + |\alpha| \leq m, \ \ell < m) \\ \text{avec } k \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad k \leq m. \end{cases}$$

Pour écrire (28) sous une forme réduite, on cherche u sous la forme

$$u(t) = u_o + tu_1 + \dots + t^{m-1} u_{m-1} + t^m v(t)$$

et on prend un développement de Taylor d'ordre m de F. Les conditions de compatibilité donnent m équations en $u_o, \dots, u_{m-1}$. Si certaines dérivées partielles de F s'annulent en $(0, A^{\alpha} u_{\ell}$ pour $\ell + |\alpha| \leq m$, $\ell < m)$ alors (28) peut se mettre sous une forme plus agréable que l'on considère désormais.

Soit l'équation

(29) $$(tD_t)^m v + \Lambda_{m-1}(tD_t)^{m-1} v + \ldots + \Lambda_o v = G(t, (tD_t)^{\ell} A^{\alpha} tv \text{ pour } \ell + |\alpha| \leq m, \ \ell < m)$$

où

$$\sup_{\substack{0 \leq i \leq m-1 \\ 0 < s \leq s_1}} \|\Lambda_i\|_{\mathcal{L}(X_s, X_s)} < \infty ,$$

La fonction $G(t, y^{\ell,\alpha})$ est $\mathcal{C}^{\infty}$ de $[-T.T] \times \{y^{\ell,\alpha} \in (X_s)^N ; \|y^{\ell,\alpha}\|_s < R$ pour tout $(\ell,\alpha)\}$ dans X_s pour tout $s \in \,]0, s_1]$. On a noté N le nombre de multi-indices $(\ell,\alpha) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tels que $0 < |\alpha| + \ell \leq m$, $\ell < m$, et R un nombre strictement positif donné.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note

$$\wp(\lambda) = \lambda^m + \Lambda_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + \Lambda_o .$$

On a

<u>Théorème 4</u> : Si $\wp(k)$ est inversible dans X_s pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $s \in \,]0, s_1]$, alors l'équation (29) a une solution $\mathcal{C}^{\infty}$ unique au voisinage de $t = 0$.

<u>Démonstration</u> : On remarque d'abord que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ on a

(30) $$\begin{cases} \wp(tD_t)t^{\ell} = \wp(\ell)t^{\ell} \\ \wp(tD_t)t^{\ell} v(t) = t^{\ell}\wp(tD_t + \ell)v(t) . \end{cases}$$

On note

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ -\Lambda_o & -\Lambda_1 & \cdots & \cdots & -\Lambda_{m-1} \end{pmatrix}$$

et on vérifie que $\lambda \notin \mathrm{sp}\, \tilde{\Lambda}$ si et seulement si $\rho(\lambda)$ est inversible.

On choisit p tel que $\tilde{\Lambda} - p\,I$ vérifie (6) dans la chaîne $(X_s)^m$. On cherche v solution de (29) sous la forme

$$v(t) = v_o + t\,v_1 + \ldots + t^{p-1} v_{p-1} + t^p v_p(t) \;;$$

en utilisant (30) on détermine de façon unique $v_o, \ldots, v_{p-1}$ puisque $\rho(\ell)$ est inversible pour $\ell = 0, \ldots, p-1$. La fonction (29) vérifie une équation de la forme (29) où $\tilde{\Lambda}$ satisfait de plus (6) dans la chaîne $(X_s)^m$. On va désormais se placer dans cette situation. On démontre d'abord que (29) a une unique solution continue : pour cela on réduit l'équation à un système du premier ordre après l'indispensable changement de variable $\sigma^m = t$. Le théorème 3 s'applique alors au système obtenu. En fait, il donne une unique solution $\mathcal{C}^\infty$ en σ. Pour montrer que cette solution est en fait $\mathcal{C}^\infty$ en t, on montre un résultat de régularité pour l'équation (29) en la ramenant à une système qui en $t\,D_t$, est du premier ordre.

<u>Exemple</u> : Soit dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ (où les variables sont notées $(x,y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p)$) l'équation

$$(31) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + f\Big(\sum_{i=1}^{p} y_i^2 \,,\; x,\; \sum_{i=1}^{p} y_i \frac{\partial u}{\partial y_i} \,,\; D_x^\alpha u \ \text{ pour } |\alpha| \le 2\Big) = 0 \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

où u_o est analytique au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ et f est analytique au voisinage de $(0,0,0,D_x^\alpha u_o$ pour $|\alpha| \le 2)$.

L'équation (31) a une unique solution u(x,y) analytique et invariante par rotation autour de $y_1 = \ldots = y_p = 0$, c'est à dire de la forme $u(x,y) = \tilde{u}(x, \sum_{i=1}^{p} y_i^2)$ où $\tilde{u}(x,t)$ est analytique au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

On fait le changement de variable $t = \sum_{i=1}^{p} y_i^2$, l'équation (31) devient

$$4t\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{u} + 2p\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} + f(t,x,2t\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}, D_x^\alpha\tilde{u} \quad \text{pour} \quad |\alpha| \leq 2) = 0 .$$

On cherche $\tilde{u}$ de la forme $\tilde{u} = u_o + tv$ et on obtient

$$4(tD_t)^2 v + (4+2p)tD_t v + 2pv = -f(t,x,2tD_t tv, D_x^\alpha u_o + tD_x^\alpha v \quad \text{pour} \quad |\alpha| \leq 2)$$

A cette dernière équation on peut appliquer le théorème 4, en prenant comme X_s des espaces convenables de fonctions analytiques et $A_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ pour $i = 1,\ldots,n$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Sur une classe de problèmes de Cauchy singuliers non linéaires. A paraître C. R. Acad. Sc. Paris.

[2] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Cauchy problems with characteristic initial hypersurface. Comm. Pure Appl. Math. 26 (1973) p.455-475.

[3] J. Moser : A rapidly convergent iteration method and nonlinear partial differential equations. I, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 20 (1966) p.265-315.

[4] M. Nagumo : Über das Anfangswertproblem Partieller Differentialgleichungen, Japan J. Math. 18 (1941) p.41-47.

[5] L. Nirenberg : An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalewski theorem. J. Diff. Geom. 6 (1972) p. 561-576.

[6] L. V. Ovsjannikov : A non linear Cauchy problem in a scale of Banach spaces. Dokl. Akad. Nauk SSSR, Tom 200 (1971) N° 4 , and, Soviet Math 12 (1971), n° 5 , p. 1497-1502.

[7] J. F. Treves : An abstract non linear Cauchy-Kovalevska theorem, Trans. Amer. Math. Soc. 150 (1970) p.77-92.
