B. Helffer

Sur une classe d'opérateurs pseudodifférentiels hypoelliptiques à caractéristiques doubles, d'après L. Hörmander

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 22, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A21_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z
1 9 7 4 - 1 9 7 5

SUR UNE CLASSE D'OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS HYPOELLIPTIQUES A CARACTERISTIQUES DOUBLES, D'APRES L. HORMANDER

par B. HELFFER

Exposé n° XXII

14 Mai 1975

Nous présentons ici des résultats dus à L. Hörmander sur les opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles.

§ 1. INTRODUCTION

Soit P un o.p.d. (opérateur pseudo-différentiel) classique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; on désigne le symbole principal par p_m et le symbole sous-principal par $p^s_{m-1} = p_{m-1} - \frac{1}{2i} \frac{\partial^2 p_m}{\partial x \partial \xi}$.

Nous allons étudier sous quelles conditions sur p_m et p^s_{m-1} , on a hypoellipticité de P et l'inégalité suivante (perte d'une dérivée) :

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \forall\, s \in \mathbb{R} \ , \ \forall\, K \subset\subset \Omega \ , \ \exists\, C(s,K) ; \ \forall\, u \in C^\infty_o(K) \\ \|u\|_{s+m-1} \leq C(s,K) \ (\|Pu\|_s + \|u\|_{s+m-2}) \end{cases}$$

où $\| \ \|_s$ désigne la norme usuelle pour l'espace de Sobolev H^s.

Dans le cas où P est de type principal, cette étude est très avancée (cf. Trèves, Trèves-Nirenberg, Egorov);il semble que Egorov, dans son dernier article (Uspehi matematitcheski Nauk,Tome XXX 2.(182)) donne une caractérisation complète de la sous-ellipticité pour les o.p.d. de type principal.

Nous regardons donc ici le cas des caractéristiques doubles :

$$p_m(x_o,\xi_o) = 0 \Rightarrow \operatorname{grad}_{x,\xi} p_m(x_o,\xi_o) = 0$$

On sait que, dans ce cas, le symbole sous principal (qui est bien défini en un point caractéristique) joue un rôle important. Une inégalité du type (1.1) n'entraîne pas nécessairement l'hypoellipticité de P, aussi nous supposerons en outre qu'il existe un cône convexe fermé propre $\Gamma \subset \mathbb{C}$ tel que :

$$(1.2) \qquad p_m(x,\xi) \in \Gamma \ , \quad \forall\, x \in \Omega, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$$

(Les résultats présentés ici étant microlocaux, on pourrait supposer que Γ dépend continûment de (x,ξ)).

Lorsque (1.2) est vérifiée, nous allons donner des conditions nécessaires et suffisantes sur p^s_{m-1} pour que (1.1) soit vérifiée. On en déduira alors l'hypoellipticité de P et P^*.

Nous ne présenterons dans l'introduction que le résultat obtenu dans le cas le plus simple où l'ensemble caractéristique est une sous-variété Σ et où p_m s'annule exactement à l'ordre 2 sur Σ $(c_1 |\xi|^m d^2_\Sigma \le |p_m| \le C_2 |\xi|^m d^2_\Sigma)$.

En un point caractéristique (x_o,ξ^o), nous désignons la forme quadratique qui commence le développement de Taylor de p_m en (x_o,ξ^o) par $Q(v)$, v étant dans $T_{x_o,\xi^o}(T^*\Omega)$.

La forme bilinéaire symétrique associée $Q(v,v')$ peut être écrite :

(1.3) $$Q(v,v') = \sigma(v,F\,v')$$

où σ est la forme symplectique $\Sigma\, d\xi_j \wedge dx_j$.

On montre facilement que les valeurs propres de F/i (F est défini par 1.3) sont dans Γ ou $-\Gamma$; on désignera celles qui sont dans $\Gamma\backslash 0$ par μ_j. Finalement, nous désignerons par N_o l'espace des vecteurs propres généralisés de F correspondant à la valeur propre 0.

<u>Théorème 1.1</u> : Si p_m s'annule exactement à l'ordre 2 sur une sous-variété Σ et si (1.2) est vérifiée, alors (1.1) est vérifiée si et seulement si en tout point de Σ :

(1.4) $$p^s_{m-1} + Q(v,\bar{v}) + \Sigma(2\alpha_j + 1)\,\mu_j \neq 0$$

lorsque $v \in N_o$. $0 \le \alpha_j \in \mathbb{Z}$.
Cette condition implique que P et P^* sont strictement hypoelliptiques.

Précisons que :

1) Lorsque Σ est symplectique (σ non dégénérée sur Σ), le résultat est démontré dans [1], [3], [10] .

<u>Exemple</u> : $$P = D^2_t + t^2 D^2_x + \lambda |D_x|$$

N_o est réduit au radical de Q et la condition (1.4) s'écrit :

$$(1.4)' \qquad p^s_{m-1} + \Sigma(2\alpha_j + 1)\mu_j \neq 0, \qquad 0 \leq \alpha_j \in \mathbb{Z}$$

2) Lorsque Σ est involutive (l'idéal des fonctions qui s'annulent sur Σ est stable par crochet de Poisson), le résultat est énoncé dans [1].

<u>Exemple</u> : $\qquad P = D_t^2 + \lambda |D_x|$

La condition (1.4) s'écrit alors

$$(1.4)'' \qquad p^s_{m-1} + Q(v,v) \neq 0 \quad \text{lorsque } v \in T_{x_o,\xi_o}(T^*\Omega) .$$

3) Lorsque σ a un rang constant sur Σ, le résultat est démontré dans [5]

<u>Exemple</u> : $\qquad P = D_t^2 + (t^2 + x^2)(D_x^2 + D_y^2) + \lambda |D_x|$

4) Il sera démontré dans [2], qu'on peut, sous les hypothèses du théorème 1.1, construire une paramétrix pour P dans la classe introduite dans [1].

Nous démontrerons le théorème 1.1 comme corollaire d'un théorème plus général, moins explicite, mais où on ne fait plus d'hypothèses sur l'ensemble caractéristique Σ. Ce théorème sera énoncé à la fin de l'exposé.

Au paragraphe 2, nous montrerons qu'une inégalité du type (1.1) implique des estimations uniformes du type :

$$(1.5) \qquad \|u\|_o \leq C \, \|(Q + \mathcal{K})u\|_o, \quad u \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$$

pour une famille de $(Q,\mathcal{K})$ où $\mathcal{K} \in \mathbb{C}$, et $Q(x,D_x)$ est un opérateur différentiel dont le symbole est un polynôme de degré 2 en (x,ξ).

Aux paragraphes 3 et 4, nous analyserons sous quelles conditions on a des inégalités du type (1.5) pour $(Q,\mathcal{K})$ fixé ou pour $(Q,\mathcal{K})$ dans une famille.

Au paragraphe 5, nous montrerons comment des estimations du type (1.5) impliquent (1.1). On énoncera alors le théorème général et on donnera une esquisse de sa démonstration.

§ 2. THEOREMES DE LOCALISATION

On supposera dans une grande partie du paragraphe : $m = 1$, $s = 0$.

On met dans (1.1) des fonctions test du type suivant :

Pour $x \in K$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, $u(y) = \varphi(y)\, \psi((y-x)\sqrt{|\xi|})\, e^{i\langle y,\xi\rangle}$ où $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi = 1$ sur K et $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On en déduit l'inégalité

$$(2.1)\quad \begin{cases} \forall K,\ \exists C,\ \forall(x,\xi),\ x\in K,\ \xi \in \mathbb{R}^n\setminus 0\ ;\ \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \int |\psi|^2 dy \le C \int \Big| \sum_{|\alpha+\beta|\le 2} p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)\, |\xi|^{(|\alpha|-|\beta|)/2} \dfrac{y^\beta D_y^\alpha \psi}{\alpha!\,\beta!} \Big|^2 dy \\ \qquad + (1+|\xi|)^{-1} \sum_{|\alpha|+|\beta|\le 3} \int |y^\beta D_y^\alpha \psi|^2\, dy \end{cases}$$

Faisant tendre ξ vers l'∞, nous déduisons :

$$(2.2)\quad \begin{bmatrix} \int |\psi|^2 dy \le C \varliminf_{\xi\to\infty} \int \Big| \sum_{|\alpha+\beta|\le 2} p_{1(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)\, |\xi|^{(|\alpha|-|\beta|)/2} \dfrac{y^\beta D_y^\alpha \psi}{\alpha!\beta!} \\ \qquad + p_0(x,\xi)\psi \Big|^2 dy \end{bmatrix}$$

Que peut-on déduire d'une telle inégalité ? L'idée la plus simple est de regarder ce que devient (2.2), lorsqu'on la regarde en un point caractéristique $(x_0, t\xi_0)$, $|\xi_0| = 1$, $t \to \infty$.

On déduit de (2.2)

$$(2.3)\quad \int |\psi|^2 dy \le C \int \Big| \sum_{|\alpha+\beta| = 2} p_{1(\beta)}^{(\alpha)}(x_0,\xi_0) \frac{y^\beta D_y^\alpha \psi}{\alpha!\beta!} + p_0(x_0,\xi_0)\psi \Big|^2 dy$$

Dans le cas où Σ est une sous-variété régulière sur laquelle p_1 s'annule exactement à l'ordre 2. On peut montrer que (2.2) est équivalent à (2.3), mais, dans le cas général, on perd beaucoup d'informations comme le montre l'exemple suivant : on suppose que p_1 s'annule à l'ordre 4 sur Σ, (2.3) s'écrit simplement $p_o(x_o,\xi_o) \neq 0$ sur Σ, ce qui n'est manifestement pas suffisant pour l'hypoellipticité.

On procède donc plus soigneusement dans le cas général : on considère une suite (x_j,ξ_j) avec $x_j \in K$, $\xi_j \to \infty$ telle que $\lim\limits_{j\to\infty} p_{1(\beta)}^{(\alpha)}(x_j,\xi_j) = a_{\alpha\beta}$. On peut supposer que $x_j \to x^o$,

$$\frac{\xi_j}{|\xi_j|} \to \frac{\xi^o}{|\xi^o|}.$$

Ces hypothèses impliquent que $p_1(x^o,\xi^o) = 0$ et que, pour $|\alpha| + |\beta| = 2$, $\lim\limits_{j\to\infty} p_{1(\beta)}^{(\alpha)}(x_j,\xi_j) = p_{1(\beta)}^{(\alpha)}(x^o,\xi^o) = a_{\alpha\beta}$.

Posons $Q^s(y,D) = \sum\limits_{|\alpha|+|\beta|\leq 2} \dfrac{a_{\alpha\beta}(y^\beta D_y^\alpha + D_y^\alpha\ y^\beta)}{2\,\alpha!\,\beta!}$. On déduit alors de (2.2) (en considérant l'ensemble des suites (x_j,ξ_j) possédant les propriétés ci-dessus et en passant à la limite) le théorème suivant :

<u>Théorème 2.1</u>[♦] : : On suppose que (1.1) est valide pour un s réel ; soit $K_1 \subset\subset K$, $Q(y,\eta)$ une limite de $|\xi|^{1-m}\, p_m(x+y|\xi|^{-1/2},\xi + \eta|\xi|^{1/2})$ lorsque $K_1 \ni x \to x^o$, $\xi \to \infty$, $\xi/|\xi| \to \xi^o/|\xi^o|$. Alors nous avons : $p_{m(\beta)}^{(\alpha)}(x^o,\xi^o) = 0$, $|\alpha+\beta| < 2$. La partie principale de Q est $\sum\limits_{|\alpha+\beta|=2} |\xi^o|^{\alpha-m} p_{m(\beta)}^{(\alpha)}(x^o,\xi^o)\dfrac{y^\beta\eta^\alpha}{\alpha!\beta!}$

et on a :

(2.4) $$\int |\psi|^2\, dy \leq C \int |Q^s(y,D)\psi + |\xi^o|^{1-m} p_{m-1}^s(x^o,\xi^o)\psi|^2 dy \ ; \ \psi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$$

C est <u>indépendant</u> de la limite choisie. On peut remplacer Q par $t^2Q(y/t,\eta/t)$.

On n'a pas d'informations dans le cas général sur les termes d'ordre inférieur de Q, mais on peut faire les remarques suivantes :

<u>Remarque 2.2</u> : Lorsque p_m s'annule à l'ordre 2 exactement sur une sous-variété lisse Σ (cas du théorème 1.1), (2.4) est équivalente à la même

♦ Nous reprenons les notations générales (s,m) inégalité (2.4)' où l'on suppose maintenant que les termes d'ordre inférieur de Q sont nuls.

Remarque 2.3 : On suppose que p_m s'annule exactement à l'ordre M $(M > 2)$ sur une sous-variété lisse Σ. Alors (2.4) est équivalent à (2.4)".

(2.4)"

$$\left\{\begin{array}{l} \exists\, C > 0,\ \forall (x_o,\xi_o) \in \Sigma\ ,\ C \leq (|\xi^o|^{1-m} p_{m-1}(x_o,\xi_o) + \mathcal{H}_{x_o,\xi_o}(\overbrace{v,\dots,v}^{M})) \\ \forall\, v \in T_{x_o,\xi_o}(T^*\Omega) \\ \text{où } \mathcal{H} \text{ est définie pour } v_1,\dots,v_M \in T_{x_o,\xi_o}(T^*\Omega) \text{ par :} \\ \qquad \mathcal{H}(v_1,\dots,v_M) = \frac{1}{M!}(\tilde{X}_1\dots\tilde{X}_M p_m)_{x_o,\xi_o} \\ \text{où } (\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_M) \text{ désignent des champs de vecteurs prolongeant } (v_1,\dots,v_M) \\ \text{au voisinage du point } (x_o,\xi_o). \end{array}\right.$$

§ 3. ESTIMATIONS POUR UN OPERATEUR QUADRATIQUE FIXE (cf. [5], [8], [10])

On cherche à analyser dans ce paragraphe, sous quelles conditions l'inégalité (2.4) est vérifiée pour Q^s fixée.

On se donne une forme quadratique fixée Q, à coefficients complexes, dans $V = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$. V est un espace vectoriel symplectique pour la forme symplectique :

$$\sigma(v,v') = \langle\xi,x'\rangle - \langle x,\xi'\rangle \ ;\ v = (x,\xi),\ v' = (x',\xi')$$

On peut supposer (cf. [10]) comme conséquence de (1.2) que :

$$(3.1) \qquad Q(V) \subset \Gamma = \{z\ ;\ |\mathrm{Im}\, z| \leq K\, \mathrm{Re}\, z\}$$

On associe à Q la forme bilinéaire symétrique sur $V_c \times V_c$ où V_c désigne le complexifié de V. On définit F, l'hamiltonien de Q par

$$(3.2) \qquad Q(v,v') = \sigma(v,Fv')$$

F ainsi définie est une application linéaire : $V_c \to V_c$ qui est antisymétrique par rapport à σ.

Rappelons qu'une estimation de la forme :

(3.3) $$\|u\| \leq C\|Q^s(x,D)u + \mathcal{K}u\| , \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

reste valide si Q est composée avec une transformation symplectique réelle sur V. On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.1 (cf. [5] : On suppose que Q vérifie (3.1). Désignons par μ_j les valeurs propres dans $\Gamma\backslash 0$ de l'hamiltonien F de Q/i et soit N_o l'espace des vecteurs propres généralisés de F correspondant à la valeur propre 0. Alors l'estimation (3.3) est vérifiée si et seulement si :

(3.4) $$K + Q(v,\bar{v}) + \Sigma(2\alpha_j + 1)\mu_j \neq 0$$

lorsque $v \in N_o$, $0 \leq \alpha_j \in \mathbb{Z}$.

Esquisse de la démonstration

Les zéros de Re Q dans V forment un espace vectoriel W. On peut se ramener au cas où la forme symplectique s'annule sur W. On choisit des coordonnées symplectiques $x = (x',x'')$, $\xi = (\xi',\xi'')$ telles que W est le plan ξ'' ; Q est alors un polynôme en x', ξ', x'' seulement.

On a $\mathrm{Ker}\, F = W_c$ et $\mathrm{Im}\, F = W_c^\perp = \{x; x'' = 0\}$. L'application F' induite par F sur $W_c^\perp / W_c$ correspond alors à la forme elliptique $Q'(x',\xi') = Q(x',\xi',0)$ de sorte que le spectre de F' est le spectre non nul de F.

On en déduit la caractérisation suivante de N_o :

$v \in N_o$ est équivalent à $Q(v,v') = 0$, pour tout v' tel que $x'' = 0$ (c'est-à dire $W_c^\perp$) (en effet $v \in N_o \Leftrightarrow F^2 v = 0$)

Comme il n'intervient pas de dérivations en x", on peut clairement se ramener à l'étude d'une estimation uniforme en regardant x" comme paramètre. L'implication (3.4) $\Rightarrow$ (3.3) s'obtiendra alors à partir de cette estimation et d'un contrôle de l'estimation lorsque $|x''| \to \infty$.

On écrit Q sous la forme :

$Q = \langle A\xi', \xi'\rangle + 2\langle Bx', \xi'\rangle + \langle Cx', x'\rangle + \langle a, \xi'\rangle + \langle b, x'\rangle + c$ où a, b sont des fonctions linéaires de x'', c est une forme quadratique en x'', A et C sont symétriques.

Pour se ramener à la situation étudiée dans [10], on cherche $(x'_o, \xi'_o) = H(x'')$ tel que

$$Q(x,\xi) = Q'(x' - x'_o, \xi' - \xi'_o) + c_o$$

où c_o ne dépend pas de (x', ξ').

Un tel (x'_o, ξ'_o) vérifie

$$Q((x'_o, \xi'_o, x'', 0), (x', \xi', 0, \xi'')) = 0 \ , \quad \forall\, x', \xi', \xi''$$

ce qui signifie précisément que $v = (x'_o, \xi'_o, x'', 0) \in N_o$.

Grâce à une transformation canonique affine :
$\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \ni (x,\xi) \to (x' - x'_o, x'', \xi' - \xi'_o, \xi'')$, on montre qu'on peut se ramener à l'étude de (3.3) pour

$$Q'(x', D') + c_o + \mathcal{K}$$

étude qui est faite dans [10] .

Cette inégalité est vérifiée pour x'' fixé, si et seulement si :

$$\Sigma(2\alpha_j + 1)\mu_j + c_o + \mathcal{K} \neq 0 \ , \qquad 0 \leq \alpha_j \in \mathbb{Z}$$

Il reste à vérifier que c_o parcourt, lorsque x'' varie, l'ensemble $\{Q(v,\bar{v}), v \in N_o\}$. Or c_o est la valeur de Q au point $(x'_o, \xi'_o, x'', 0)$ de N_o de coordonnée x'' réelle.

Pour $v \in N_o$, on peut écrire $v = v_1 + iv_2$ où v_1 et v_2 sont dans N_o et ont des coordonnées (x'', ξ'') réelles.

$\bar{v} - v_1 + iv_2$ a des coordonnées (x'', ξ'') nulles de sorte que :

$$Q(\bar{v},v) = Q(v_1 - iv_2 , v_1 + iv_2) + Q(\bar{v} - v_1 + iv_2, v_1 + iv_2)$$
$$= Q(v_1) + Q(v_2)$$

l'image de $Q(\bar{v},v)$ lorsque $v \in N_o$ est donc le même angle convexe que l'image de $Q(v)$ lorsque $v(\in N_o)$ a des coordonnées (x'',ξ'') réelles.

On en conclut le théorème (en utilisant une remarque antérieure).

§ 4. ESTIMATIONS POUR DES FAMILLES D'OPERATEURS QUADRATIQUES

Il est facile de voir que (3.3) reste vérifiée (avec un petit changement de C) si $\mathcal{K}$ et Q sont remplacés par $(\mathcal{K}',Q')$ avec $\mathcal{K}-\mathcal{K}'$, $Q-Q'$ suffisamment petits, rang $Q=$ rang Q', dim N_o = dim N'_o. C'est le cas étudié dans [5]. Mais de petites perturbations de Q peuvent augmenter le rang et diminuer N_o. Dans le cas général, sous des hypothèses peu restrictives, Hörmander démontre le théorème suivant :

<u>Théorème 4.1</u> : Soit $\mathcal{M}$ un ensemble de paires $(Q,\mathcal{K})$ où $\mathcal{K} \in \mathbb{C}$ et Q est une forme quadratique dans $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$, dont l'image est dans un angle fixé $\Gamma = \{z; |\mathrm{Im}\, z| < K \,\mathrm{Re}\, z\}$. On suppose que $\mathcal{K}$ et les valeurs propres de l'hamiltonien de Re Q sont uniformément bornés lorsque $(Q,\mathcal{K}) \in \mathcal{M}$. Alors (3.3) est vérifiée pour une constante C (indépendante de $(Q,\mathcal{K}) \in \mathcal{M}$) si et seulement si il existe des constantes ε,δ telles que :

(4.1) $$\delta \leq |\mathcal{K} + Q(v,\bar{v}) + \Sigma(2\alpha_j + 1)\mu_j|$$

si $(Q,\mathcal{K}) \in \mathcal{M}$, $0 \leq \alpha_j \in \mathbb{Z}$, $\mu_j \in \Gamma$, $i\mu_j$ est valeur propre de F, l'hamiltonien de Q, v appartient à l'espace engendré par les vecteurs propres généralisés de F correspondant aux valeurs propres de module $< \varepsilon$.

<u>Brève esquisse de la démonstration</u>

On peut supposer (invariance symplectique) que, pour tous les $(Q,\mathcal{K})$ dans $\mathcal{M}$, la partie réelle Re Q est de la forme :

$\mathrm{Re}\, Q = \sum_1^{n_1} \lambda_j^2(x_j^2 + \xi_j^2) + \sum_{n_1+1}^{n_2} x_j^2$. On peut se ramen au cas où n_1 et n_2 sont fixés. $n_1 + n_2 = n$. Il suffit de montrer que toute suite $(Q_\nu,\mathcal{K}_\nu)$ satisfaisant l'une des deux conditions (4.1), (3.3) contient une sous-suite satisfaisant les deux. Ecrivons $\operatorname{Re} Q_\nu = \sum_1^{n_1} \lambda_{j\nu}^2 (x_j^2 + \xi_j^2) + \sum_{n_1+1}^{n} x_j^2$.

Comme les $\lambda_{j\nu}$ sont bornés uniformément, on peut supposer que $\lim_{\nu \to \infty} \lambda_{j\nu} = \lambda_j$ existe pour tout j. On réordonne les coordonnées de telle sorte que $\lambda_j \neq 0$ $(j \leq n')$ et $\lambda_j = 0$ $(n' < j \leq n_1 = n' + n'')$.

On écrit $x = (x', x'', x''')$, avec $x' = (x_1, \ldots, x_{n'})$, $x'' = (x_{n'+1}, \ldots, x_{n_1})$ $x''' = (x_{n_1+1}, \ldots, x_n)$. On introduit la suite $Q_\nu(x', \xi', x''/\lambda_\nu, \xi''/\lambda_\nu, x''')$ dont on peut extraire une sous-suite convergente vers $Q(x', \xi', x'', \xi'', x''')$. L'intérêt de cette homothétie (qui n'est pas une transformation symplectique) réside dans la propriété suivante :

<u>Lemme 4.2</u> : On désigne par N_ν l'espace propre généralisé correspondant aux valeurs propres de l'hamiltonien de Q_ν tendant vers 0, alors la limite de l'image de $Q_\nu(v, \bar{v})$ lorsque $v \in N_\nu$ est égal à l'image de $Q(v, \bar{v})$ lorsque $v = (x', \xi', x'', \xi'', x''')$ vérifie :

(4.2) $$Q(x', \xi', \ldots, x'''; y', \eta', 0, \ldots, 0) = 0, \quad \forall (y', \eta').$$

On montre dans une deuxième étape le lemme suivant :

<u>Lemme 4.3</u> : On suppose que $(Q_\nu, \mathcal{K}_\nu)$ vérifie (3.3), et que $\mathcal{K}_\nu \to \mathcal{K}$. Alors il s'en suit que :

(4.3) $$\mathcal{K} + Q(v, \bar{v}) + \sum (2\alpha_j + 1)\mu_j \neq 0 , \quad 0 \leq \alpha_j \in \mathbb{Z}$$

où vérifie (4.2), et les μ_j sont les valeurs propres dans $\Gamma \setminus 0$ de l'hamiltonien de Q_∞ / i (où Q_∞ est défini par $Q_\infty(x, \xi) = Q(x', \xi', 0, 0, x''')$.

On en déduit alors que $(Q_\nu, \mathcal{K}_\nu)$ vérifie (4.1) uniformément grâce au lemme 4.2. Réciproquement si $(Q_\nu, \mathcal{K}_\nu)$ vérifie (4.1) uniformément, $(Q, \mathcal{K})$ vérifie (4.3) et la démonstration complète du théorème résultera du lemme suivant :

<u>Lemme 4.4</u> : On suppose que $(Q, \mathcal{K})$ vérifie (4.3), alors la famille $(Q_\nu, \mathcal{K}_\nu)$ vérifie (4.1) uniformément.

Esquisse de la démonstration du lemme 4.4 : On considère Q^s comme un opérateur pseudo-différentiel en (x'',x''') à valeur opérateur sur des fonctions de x'. On pose dans cette démonstration $t=(x'',\xi'',x''')$. (4.3) implique (grâce au th.3.3) que :

$$Q(x',D',t)+\mathcal{K}$$

a pour tout t réel un inverse $E(t)$ qui est continu de L^2 dans l'espace de Hilbert B des fonctions $u\in L^2(\mathbb{R}^{n'})$ telles que :

$$\|u\|_B^2 = \sum_{(\alpha+\beta)\le 2} \|x'^{\alpha} D'^{\beta} u\|^2 \le \infty .$$

Cet inverse est C^∞ en t et on a de plus les estimations suivantes :

(4.4) $\qquad \forall\, \alpha,\beta,\gamma, \quad |\alpha|+|\beta|\le 2 \quad , \quad \exists\, C_\gamma$

$$(1+|t|)^{|\gamma|+2-|\alpha|-|\beta|}\|D_t^\gamma x'^{\alpha} D'^{\beta} E\, u\| \le C_\gamma \|u\| \quad , \; u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n'}) \; .$$

Par un argument de perturbation, on construit pour $Q_\nu(x',\xi',x''/\lambda_\nu,\xi''/\lambda_\nu,x''')+\mathcal{K}_\nu$ un inverse $E_\nu(x'',\xi'',x''')$ vérifiant uniformément (4.4). On pose alors $E'_\nu(x'',\xi'',x''')=E_\nu(\lambda_\nu x'',\lambda_\nu\xi'',x''')$ et $\mathcal{E}_\nu(x,D)u = (2\pi)^{-n''}\int e^{i<x'',\xi''>}E'_\nu(x'',\xi'',x''')\hat{u}(x',\xi'',x''')\,d\xi''$.

On peut montrer en utilisant le théorème de Calderon-Vaillancourt [4] et (4.4) que $\mathcal{E}_\nu(x,D)$ ainsi défini est continu (uniformément) dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et que :

$$(Q_\nu^s(x,D)+\mathcal{K}_\nu)\mathcal{E}_\nu = I + \mathcal{R}_\nu$$

avec $\|\mathcal{R}_\nu\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$.

On en déduit alors que $\mathcal{E}_\nu(I+\mathcal{R}_\nu)^{-1}$ est uniformément borné en tant qu'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^n)$, ce qui démontre le lemme.

Lorsque $(Q,\mathcal{K})$ est une famille compacte et que Q est de rang constant (cas où l'ensemble caractéristique est une sous-variété lisse), on a le corollaire suivant :

Corollaire 4.5 : Soit $\mathcal{M}$ un ensemble compact de paires $(\mathcal{K},Q)$ de nombres complexes $\mathcal{K}$ et de formes quadratiques Q dans $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ avec image dans un angle Γ. On suppose que toutes les formes Q qui interviennent ont le même rang r. Alors (3.3) est vérifiée uniformément si et seulement si :

$$\mathcal{K} + Q(\bar{v},v) + \Sigma\,(2\alpha_j + 1)\,\mu_j \neq 0 \tag{4.5}$$

lorsque $(Q,\mathcal{K}) \in \mathcal{M}$, $0 \leq \alpha_j \in \mathbb{Z}$, μ_j sont les valeurs propres $\in \Gamma$ de l'hamiltonien de Q/i, et v est un vecteur propre généralisé correspondant à la valeur propre 0.

Démonstration : Il suffit de montrer que, lorsque le rang est constant et qu'on considère une suite Q_ν qui tend vers Q, l'image de $Q(\bar{v},v)$ lorsque $v \in N_o$ est la limite de l'image de $Q_\nu(\bar{v},v)$ lorsque $v \in N_\nu$, $(\nu \to \infty)$.

§ 5. ESTIMATIONS GLOBALES ET HYPOELLIPTICITE

On va essayer de recoller tous les morceaux pour énoncer le théorème général.

a) Lorsque l'on fait l'hypothèse (1.2), on peut se ramener au cas où l'on a :

$$\left|\frac{\partial p_m}{\partial x}\right|^2 + |\xi|^2 \left|\frac{\partial p_m}{\partial \xi}\right|^2 \leq C\,|\xi|^m\,\mathrm{Re}\,p_m(x,\xi) \tag{5.1}$$

On déduit de (5.1) (lemme de Radkevic [9]) la propriété suivante :

$$\forall K \subset\subset \Omega,\quad \forall s,\quad \exists\ C(s,K),\quad \forall\, u \in C_o^\infty(K) \tag{5.2}$$

$$\sum_1^n \|P_m^{(j)}(x,D)u\|_{s+1/2} + \sum_1^n \|P_{m(j)}(x,D)u\|_{s-1/2} \leq C_{s,K}(\|P_m(x,D)u\|_s$$
$$+ \|u\|_{s+m-1}) .$$

Une telle inégalité conjuguée avec :

$$\exists\ s_o \in \mathbb{R},\quad \forall\, K \subset\subset \Omega,\quad \exists C_K,\quad \forall\, u \in C_o^\infty(K) \tag{5.3}$$

$$\|u\|_{s_o+m-1} \leq C_K(\|Pu\|_{s_o} + \|u\|_{s'}) \qquad (\text{avec } s' < s_o + m-1)$$

permet classiquement de déduire l'hypoellipticité de P ((5.3) est alors vrai pour tout s).

On se ramène donc ainsi à la vérification de (5.3).

b) Dans une deuxième étape, on montre (on suppose $m=1$) que, si l'estimation (2.4) est vérifiée avec une constante uniforme pour toutes les limites Q définies au théorème 2.1, alors il existe, pour tout $K \subset\subset \Omega$ une fonction $\varepsilon(\xi)$ (qui tend vers 0 quand $\xi \to \infty$), telle que, lorsque $x \in K$, on ait :

$$(5.4)\quad \int |\psi|^2 dy \le (C+1) \int \Big| \sum_{|\alpha+\beta| \le 2} p_{1(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)\, |\xi|^{(|\alpha|-|\beta|)/2} y^\beta D_y^\alpha \psi + p_o(x,\xi)\psi \Big|^2 dy$$

$$+ \varepsilon(\xi) \int \sum_{|\alpha+\beta| \le 3} |y^\beta D_y^\alpha \psi|^2 dy \quad , \quad \forall\, \psi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n) \ .$$

c) La dernière étape consiste à montrer que (5.4) $\Rightarrow$ (5.3). Celle-ci peut se faire par la méthode classique [7], mais une variante de la méthode, utilisant le théorème de Calderon-Vaillancourt [4], permet de simplifier la démonstration. Nous l'esquissons seulement :
soit $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|\varphi\|_o = 1$ et posons

$$(5.5)\qquad \Phi(x,\xi,y,\eta) = \varphi(x-y).r(\eta)).\ \ \varphi(\xi-\eta/r(\eta))$$

où $r(\eta) = (1+|\eta|^2)^{1/4}$.

Pour u dans $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$, on pose :

$$(5.6)\qquad Tu(x,y,\eta) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle}\, \Phi(x,\xi,y,\eta)\, \hat{u}(\xi)\, d\xi$$

C'est "en gros" la partie de u qui a son support à une distance $1/r(\eta)$ de y et son spectre à une distance $r(\eta)$ de η.

On a :

$$(5.7)\ \Big| \int |Tu(x,y,\eta)|^2 dx\,dy\,d\eta - \int |u|^2 dx \Big| \le C \|u\|^2_{-1/2} \ , \quad u \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n) \quad .$$

Comme d'habitude, on introduit un paramètre δ, $0 < \delta < 1$, en remplaçant φ par $\varphi_\delta(x) = \delta^{n/2}\varphi(\delta x)$, T par T_δ et on vérifie :

$$(5.8) \qquad \overline{\lim_{\xi \to \infty}} \; r(\xi)^{|\alpha|-|\beta|} \| D_x^\beta D_\xi^\alpha \Phi_\delta(x,\xi,\ldots)\|_{L^2_{(y,\eta)}} \leq C_\alpha . C_\beta \; \delta^{|\alpha+\beta|}$$

où $C_\alpha = \|D^\alpha \varphi\|$.

On peut donc regarder T_δ comme un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 et de type 1/2, 1/2 à valeur dans $L^2_{(y,\eta)}$.

On peut alors démontrer le lemme suivant :

<u>Lemme 5.1</u> : Soit P un opérateur pseudo-différentiel vérifiant (5.4). Alors, pour tout compact $K \subset\subset \Omega$, il existe une constante C_1 telle que pour $\delta > 0$ (arbitrairement petit) et tout $u \in C_o^\infty(K)$:

$$(5.9) \qquad \|u\|_o \leq C_1 \|Pu\|_o + \delta(\|u\|_o + \sum_1^n \|P_1^{(j)}(x,D)u\|_{1/2} + \sum_1^n \|P_{1(j)}(x,D)u\|_{-1/2})$$
$$+ C_\delta \|u\|_{-1/4}$$

Le lemme résulte du contrôle de

$$\|T_\delta Pu - P_{y,\eta}(T_\delta u)\|_{L^2_{x,y,\eta}}$$

où

$$(5.10) \qquad P_{y,\eta}(x,D) = \sum_{|\alpha+\beta| \leq 2} p_{1(\beta)}^{(\alpha)}(y,\eta) \frac{(x-y)^\beta (D_x - \eta)^\alpha}{\beta ! \, \alpha !} + p_o(y,\eta)$$

On démontre en effet en utilisant le théorème de Calderon-Vaillancourt et (5.8) que :

$$(5.11) \qquad \|T_\delta Pu - P_{y,\eta}(T_\delta u)\|_{L^2_{x,y,\eta}} \leq \delta(\|u\|_o + \sum_1^n \|p_1^{(j)}(x,D)u\|_{1/2} + \sum_1^n \|p_{1(j)}(x,D)u\|_{-\frac{1}{2}})$$
$$+ C_\delta \|u\|_{-1/4}$$

Si on remarque que $P_{y,\eta}$ est, à une homothétie et une translation près, l'opérateur intervenant dans (5.4). On applique (5.4) avec $\psi(x) = T_\delta u(x,y,\eta)$

(attention au changement de notation (y,x,ξ)) dans (5.4) est devenu (x,y,η)), on intègre par rapport à (y,η), et utilisant (5.7), on en déduit, modulo quelques détails techniques, l'estimation (5.9)).

(5.2) et (5.9) donnent alors l'estimation (5.3).

d) Enoncé du théorème

On peut regrouper les résultats des paragraphes précédents dans le théorème suivant :

Théorème 5.2 : Soit P un opérateur pseudodifférentiel proprement supporté dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tel que les valeurs du symbole principal p_m sont contenues dans un angle $\Gamma \subset \mathbb{C}$ $(<\pi)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes, pour tout $K \subset\subset \Omega$

i) $\exists C_K$; $\forall u \in C_0^\infty(K)$

$$\|u\|_{m-1} \leq C_K(\|Pu\|_0 + \|u\|_{m-2}) \ ,$$

ii) $\forall s$, $\forall s'$, $\exists C_{K,s,s'}$; $\forall u \in C_0^\infty(K)$

$$\|u\|_{m-1+s} \leq C_{K,s,s'}(\|Pu\|_s + \|u\|_{s'})$$

iii) Si $Q(y,\eta)$ désigne toute limite de $|\xi|^{1-m}\, p_m(x+y|\xi|^{-1/2},\xi+\eta|\xi|^{1/2})$ lorsque $\xi/|\xi| \to \xi^0/|\xi^0|$, et $K \ni x \to x^0$, alors

$$\int|\psi^2|\,dy \leq C\int |Q^s(x,D)\psi + |\xi^0|^{1-m}p^s_{m-1}(x^0,\xi^0)\psi|^2 dy \ ; \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

où C est indépendante de la limite choisie.

iv) Il existe une constante $\delta > 0$, dépendant de K, telle que :

$$\delta \leq \left||\xi^0|^{1-m}\, p^s_{m-1}(x^0,\xi^0) + \tilde{Q}(\bar{v},v) + \Sigma(2\alpha_j+1)\mu_j\right|$$

où $\tilde{Q}(y,y_0,\eta,\eta_0) = y_0^2\, Q(y/y_0, \eta/y_0)$ avec Q comme dans iii), $0 \leq \alpha_j \in \mathbb{Z}$ et μ_j sont les valeurs propres dans Γ de l'hamiltonian de $\tilde{Q}/i$, tandis que v est dans l'espace engendré par des vecteurs propres généralisés appartenant aux valeurs propres de module $< \delta$.

<u>Remarque 5.3</u> : En utilisant le corollaire (4.5), on trouve le théorème 1.1.

<u>Remarque 5.4</u> : On retrouve comme cas particulier, le théorème de Radkevič [8], [9].

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators. Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974), 585-639.

[2] L. Boutet de Monvel, A. Grigis, B. Helffer : en préparation.

[3] L. Boutet de Monvel and F. Trèves : On a class of pseudo-differential operators with double characteristics. Inv. Math. 24 (1974), 1-34.

[4] A. P. Calderon and R. Vaillancourt : A class of bounded pseudo-differential operators, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. 69 (1972), 1185-1187.

[5] A. Grigis : Hypoellipticité pour une classe d'opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques doubles et paramétrix associés. C. R. Acad. Sc. Paris. A paraître.

[6] V. V. Grušin : On a class of hypoelliptic operators. Mat. Sbornik 83 (1970), 456-473. Also in Math. USSR Sbornik 12 (1970), 458-476.

[7] L. Hörmander : Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems. Ann. of Math. 83 (1966), 129-209.

[8] A. Melin : Lower bounds for pseudo-differential operators. Ark. for Mat. 9(1971), 117-140.

[9] E. V. Radkevič : A priori estimates and hypoelliptic equations with multiple characteristics. Dokl. Akad. Nauk SSSR 187 (1969), 274-277. Also in Soviet Math. Doklady 10 (1969), 849-853.

[10] J. Sjöstrand : Parametrices for pseudodifferential operators with multiple characteristics. Ark. for Mat. 12 (1974), 85-130 .