SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. BROS
D. IAGOLNITZER

Tuboïdes et structure analytique des distributions

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 16, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A15_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
ENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

SEMINAIRE GOULAOUIC-LIONS-SCHWARTZ
1974-1975

TUBOÏDES ET STRUCTURE ANALYTIQUE DES DISTRIBUTIONS

par J. BROS et D. IAGOLNITZER

I. TUBOÏDES ET GENERALISATION D'UN THEOREME DE GRAUERT

par J. BROS

Exposé n° XVI

19 Mars 1975

Les deux exposés qui vont suivre présentent une méthode d'étude de la structure analytique des distributions (ou éventuellement hyperfonctions), mettant en relief les aspects géométriques de ce type de problème.

Le problème principal de cette étude peut se formuler de la façon suivante : si f est une distribution sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, ou plus généralement sur une variété analytique réelle, caractériser toutes les décompositions possibles du type :

$$f = \sum_i f_i \tag{1}$$

ou chaque f_i est une distribution sur un ouvert Ω_i, valeur au bord d'une fonction analytique dans un certain domaine complexe D_i bordé sur les réels par Ω_i (Ω étant l'intersection des ouverts Ω_i).

Dans un premier exposé, on présentera une étude géométrique des domaines D_i les plus généraux du type ci-dessus, que nous appellerons des "tuboïdes". Les propriétés de convexité holomorphe de ces domaines seront étudiées en se plaçant d'abord dans le cas de $\mathbb{C}^n$ [1] puis dans le cas de variétés analytiques complexes quelconques de dimension n.

Ces propriétés permettront d'obtenir, comme application du théorème B de Cartan [2] ou du théorème correspondant de Hörmander [3] dans le cas à croissance lente, un premier type de propriété de décomposition (au sens de la formule (1)).

Ces propriétés de décomposition peuvent être appelées "horizontales", dans la mesure où f y est toujours valeur au bord d'une seule fonction analytique h au-dessus de Ω, laquelle se décompose en somme de fonctions analytiques h_i au-dessus d'ouverts Ω_i contenant Ω.

Dans un second exposé, un autre type de propriété de décomposition, impliquant les théorèmes du type "edge of the wedge" [4] [5] sera obtenu au moyen d'une transformation de Fourier généralisée. Un théorème analogue au théorème de la transformée de Laplace montre l'équivalence [5] de ce second type de propriété de décomposition avec une décomposition en supports pour les transformées, modulo des termes à décroissance exponentielle.

Ces propriétés de décomposition peuvent être appelées "verticales" dans la mesure où f est décomposée en une somme de valeurs au bord de fonctions analytiques h_i dans des domaines D_i disjoints, au-dessus du même ouvert réel Ω.

La méthode de la transformée de Fourier généralisée introduit alors de façon très concrète la notion de "support essentiel d'une distribution", analogue à celle de "spectre singulier d'une hyperfonction" introduite par S. K. K. [6].

On indiquera enfin comment, en s'appuyant sur les deux types précédents de propriétés de décomposition, on peut obtenir un théorème général de décomposition des distributions : pour tout recouvrement du support essentiel Σ_f d'une distribution f dans Ω (Σ_f étant un sous-ensemble fermé du fibré cotangent $T^*\Omega$) par une famille de fermés $\{S_i\}$, il existe au moins une décomposition de la forme (1), où chaque f_i a son support essentiel Σ_{f_i} contenu dans S_i.

I. TUBOÏDES ET GENERALISATION D'UN THEOREME DE GRAUERT

§ 1. TUBOÏDES DANS $\mathbb{C}^n$

Posons* $\mathbb{C}^n_{(z)} = \mathbb{R}^n_{(x)} \times \mathbb{R}^n_{(y)}$; $\mathbb{S}^{n-1}_{(\dot{y})}$ désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^n_{(y)}$.

Définition 1 : On appelle profil au-dessus d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n_{(x)}$, tout domaine Λ de $\mathbb{C}^n_{(z)}$ de la forme suivante :

$$\Lambda = \bigcup_{x\in\Omega} (x,\Lambda_x) ,$$

où, pour tout x dans Ω, Λ_x est un cône ouvert connexe non vide de sommet l'origine dans $\mathbb{R}^n_{(y)}$. $\dot{\Lambda} = \bigcup_{x\in\Omega} (x,\dot{\Lambda}_x)$ désignera la projection canonique de $\Lambda\backslash\Omega$ dans $\mathbb{R}^n_{(x)} \times \mathbb{S}^{n-1}_{(\dot{y})}$ ($\dot{\Lambda}_x$ étant la base du cône Λ_x sur la sphère unité). Par convention on supposera toujours que si $\dot{\Lambda}_x = \mathbb{S}^{n-1}_{(\dot{y})}$, alors l'origine appartient à Λ_x (c'est à dire $\Lambda_x = \mathbb{R}^n_{(y)}$) ; il y a donc une bijection canonique associant $\dot{\Lambda}$ à Λ.

Définition 2 : Tout domaine $D = \bigcup_{x\in\Omega} (x,D_x)$ de $\mathbb{C}^n_{(z)}$ est appelé un tuboïde de profil Λ au dessus de Ω s'il satisfait aux deux conditions suivantes**

a) Pour tout profil $\Lambda' \supset \Lambda$ tel que $\dot{\Lambda}' \supset \bar{\dot{\Lambda}}$, il existe un voisinage complexe $\mathcal{V}$ de Ω tel que :

$$D \cap \mathcal{V} \subset \Lambda'$$

b) Pour tout profil $\Lambda'' \subset \Lambda$ tel que $\bar{\dot{\Lambda}}'' \subset \dot{\Lambda}$, il existe un voisinage complexe $\mathcal{W}$ de Ω tel que :

$$\Lambda'' \cap \mathcal{W} \subset D$$

On dira aussi que dans chaque fibre $(x,\mathbb{R}^n_{(y)})$, Λ_x est le profil de D_x. Enfin, on appellera tube local tout tuboïde de profil "constant" $\Lambda = \Omega\times\mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est un cône de sommet l'origine dans $\mathbb{R}^n_{(y)}$ (un tube reste,

---

* Dans toute la suite, l'indice entre parenthèses dans $\mathbb{R}^n_{(x)}$, $\mathbb{C}^{(n)}_{(z)}$ etc... sert uniquement à désigner le nom des variables dans l'espace considéré.

** La notation $\bar{\dot{\Lambda}}$ signifiera toujours la fermeture de $\dot{\Lambda}$ dans $\Omega\times S^{n-1}$.

suivant la terminologie classique, un domaine de la forme $D = \mathbb{R}^n_{(x)} \times B$).

<u>Remarques</u> : 1) Dans [1], la condition a) était remplacée par $a_{[1]}$) (plus restrictive que a)) : $D \backslash \Omega \subset \Lambda$; la condition b) était remplacée par un ensemble équivalent de deux conditions :

$b_{[1]}$) $\forall (x_o, \mathring{y}_o) \in \mathring{\Lambda}$, $\exists \mathcal{V}$, voisinage de $(x_o, \mathring{y}_o)$ dans $\mathbb{R}^n_{(x)} \times S^{n-1}_{(y)}$ et $\exists$ $r > 0$ tels que :

$$\{(x,y) ; y = \rho\, \mathring{y} ; (x, \mathring{y}) \in \mathcal{V} ; 0 < \rho < r\} \subset D$$

$c_{[1]}$) $\forall x \in \Omega$ tel que $\mathring{\Lambda}_x = S^{n-1}_{(\mathring{y})}$, on a : $\{0\} \in D_x$.

L'équivalence de b) avec $\{b_{[1]}), c_{[1]})\}$ résulte d'un argument simple de compacité .

2) Il est clair que tout tuboïde de D satisfaisant à la définition 2 donnée ci-dessus contient un autre tuboïde de D de même profil Λ qui satisfait aussi à la définition donnée dans [1] : il suffit de poser $D' = D \cap \Lambda$ si cet ouvert est connexe (ou plus généralement D' = composante connexe de $D \cap \Lambda$ bordée par Ω).

3) Si D_1, D_2 sont deux tuboïdes de profils respectifs Λ_1, Λ_2 au-dessus d'ouverts Ω_1, Ω_2 et si pour tout x dans $\Omega_1 \cap \Omega_2$, $(\Lambda_1)_x \cap (\Lambda_2)_x \neq \emptyset$, le domaine $D_1 \cup D_2$ est un tuboïde de profil $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$, au-dessus de $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

4) On utilisera parfois implicitement (théorèmes 3 et 4 du paragraphe 4) des tuboïdes D (resp. des profils Λ) au-dessus d'ouverts réels Ω non nécessairement connexes ; de tels domaines sont simplement des réunions de tuboïdes D_j (resp. profils Λ_j) au-dessus de toutes les composantes connexes Ω_j de Ω.

La présente définition des tuboïdes dans $\mathbb{C}^n$ se prêtera aisément à une généralisation au cas des variétés analytiques complexes (voir § 3) grâce aux propositions suivantes :

<u>Proposition 1</u> : Soit h une application bi-analytique définie dans un voisinage complexe d'un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, et telle que $\Omega_1 = h(\Omega)$ soit aussi un domaine de $\mathbb{R}^n$ .Il existe un difféomorphisme $\dot{h}$ de $\Omega \times \mathbb{R}^n_{(y)}$ sur $\Omega_1 \times \mathbb{R}^n_{(y)}$ qui met en bijection l'ensemble des profils Λ au-dessus de Ω et

l'ensemble des profils Λ_1 au-dessus de Ω_1, de façon telle que $\Lambda_1 = \widetilde{h}(\Lambda)$.

<u>Démonstration</u> : Soit i_Ω la bijection canonique de $\Omega \times \mathbb{R}^n_{(y)}$ sur le fibré tangent $T\Omega$ à Ω, h' l'application dérivée de h qui applique $T\Omega$ sur $T\Omega_1$; on pose $\widetilde{h} = i^{-1}_{\Omega_1} \circ h' \circ i_\Omega$ (concrètement : $\widetilde{h}(x,y) = (h(x), h'_x(y))$). $\widetilde{h}$ est une application différentiable de $\Omega \times \mathbb{R}^n_{(y)}$ sur $\Omega_1 \times \mathbb{R}^n_{(y)}$; comme h est linéaire dans chaque fibre, elle transforme tout profil Λ au-dessus de Ω en un profil Λ_1 au-dessus de Ω_1 ; de plus, $\widetilde{h}$ étant bijective, tout profil Λ_1 est l'image d'un profil Λ.

<u>Proposition 2</u> : Avec les mêmes hypothèses que ci-dessus, soit deux profils Λ, Λ_1 tels que $\Lambda_1 = \widetilde{h}(\Lambda)$. Pour tout profil $\Lambda'_1 \supset \Lambda_1$ tel que $\mathring{\Lambda}'_1 \supset \bar{\Lambda}_1$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de Ω tel que $h(\Lambda \cap \mathcal{V}) \subset \Lambda'_1$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\{K_i,\ i \in I\}$ une famille de compacts formant un recouvrement localement fini de l'ouvert Ω_1. Pour tout indice $i \in I$, il existe un nombre $\varepsilon_i > 0$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l} (\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_1) \in \Lambda_1 \quad , \ \widetilde{x}_1 \in K_i \|\widetilde{y}_1\| < 1 \\ \|(x_1 y_1) - (\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_1)\| < \varepsilon_i \|\widetilde{y}_1\| \end{array}\right\} \Longrightarrow (x_1, y_1) \in \Lambda'_1$$

(on a utilisé ici la compacité de $(K_i \times S^{n-1}) \cap \bar{\Lambda}_1$ dans $\mathring{\Lambda}'_1$).

Prenons alors $(x_1, y_1) = h(x,y) = (h \circ \widetilde{h}^{-1})(\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_1)$. L'application différentiable $\ell = h \circ \widetilde{h}^{-1}$ est telle que $\forall \widetilde{x}_1 \in \Omega_1$, $\ell(\widetilde{x}_1, 0) = (\widetilde{x}_1, 0)$; la majoration du reste de Taylor d'ordre 1 fournit l'inégalité:

$$\|\ell(\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_1) - \ell(\widetilde{x}_1, 0) - (0, \widetilde{y}_1)\| = \|(x_1, y_1) - (\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_1)\| \leq \varepsilon_i \ \|\widetilde{y}_1\|$$

pour tout $\widetilde{x}_1 \in K_i$ et $\|\widetilde{y}_1\| < \rho_i$ suffisamment petit.

Posons maintenant $\mathcal{V}_1 = \bigcup_{i \in I} \{(\widetilde{x}_1 \widetilde{y}_1) \ ; \ \widetilde{x}_1 \in K_i, \ \|\widetilde{y}_1\| < \rho_i\}$; $\mathcal{V}_1$ est un voisinage de Ω_1, et d'après les inégalités précédentes, on voit que :

$$(\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_1) \in \Lambda_1 \cap \mathcal{V}_1 \Rightarrow (x_1, y_1) \in \Lambda'_1 \ .$$

Posant $\mathcal{V} = \widetilde{h}^{-1}(\mathcal{V}_1)$, voisinage de Ω, ceci équivaut à la propriété de l'énoncé :

$$(x,y) \in \Lambda \cap \mathcal{V} \Rightarrow h(x,y) \in \Lambda'_1 .$$

<u>Proposition 3</u> : Soit h, $\tilde{h}$, Ω, Ω_1 comme dans la proposition 1, et soit D un tuboïde de profil Λ au-dessus de Ω, supposé contenu dans le domaine de h. Alors le domaine $D_1 = h(D)$ est un tuboïde de profil $\Lambda_1 = \tilde{h}(\Lambda)$ au-dessus de Ω_1.

<u>Démonstration</u> : Vérifions que h(D) satisfait aux conditions a), b) de la définition 2 :

a) Soit $\Lambda'_1 \supset \Lambda_1$ tel que $\mathring{\Lambda}'_1 \supset \bar{\mathring{\Lambda}}_1$.

Posons $\Lambda' = \tilde{h}^{-1}(\Lambda'_1) \supset \Lambda$; on peut toujours trouver Λ''_1 tel que $\Lambda'_1 \supset \Lambda''_1 \supset \Lambda_1$, $\mathring{\Lambda}'_1 \supset \bar{\mathring{\Lambda}}''_1$, $\mathring{\Lambda}''_1 \supset \bar{\mathring{\Lambda}}_1$; Λ, Λ' et $\Lambda'' = \tilde{h}^{-1}(\Lambda''_1)$ satisfont alors à des inclusions analogues. D'après la définition 2 - a) il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de Ω tel que $D \cap \mathcal{U} \subset \Lambda''$; de plus d'après la proposition 2, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de Ω tel que $h(\Lambda'' \cap \mathcal{V}) \subset \Lambda'_1$. Posant $\mathcal{W} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, on a :

$$h(D \cap \mathcal{W}) \subset \Lambda'_1$$

soit $h(D) \cap \mathcal{W}_1 \subset \Lambda'_1$, où $\mathcal{W}_1 = h(\mathcal{W})$ est un voisinage de Ω_1.

b) Soit $\Lambda'_1 \subset \Lambda_1$ et tel que $\bar{\mathring{\Lambda}}'_1 \subset \mathring{\Lambda}_1$; on choisit Λ''_1 intermédiaire entre Λ_1, Λ'_1 dans le même sens que ci-dessus, les images inverses $\Lambda, \Lambda', \Lambda''$ par h^{-1} satisfaisant des inclusions analogues ($\Lambda' \subset \Lambda'' \subset \Lambda$ etc...) ; d'après la définition 2-b) appliquée à D, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de Ω tel que $\Lambda'' \cap \mathcal{U} \subset D$; la proposition 2 appliquée à h^{-1} permet alors d'écrire que $h^{-1}(\Lambda'_1 \cap \mathcal{V}_1) \subset \Lambda''$, pour un voisinage convenable $\mathcal{V}_1$ de Ω_1.

On en déduit alors que :

$$\Lambda'_1 \cap \mathcal{V}_1 \cap h(\mathcal{U}) \subset h(\Lambda'') \cap h(\mathcal{U}) \subset h(D)$$

soit, en posant $\mathcal{W}_1 = \mathcal{V}_1 \cap h(\mathcal{U})$, voisinage de Ω_1 :

$$\Lambda'_1 \cap \mathcal{W}_1 \subset D_1, \text{ ce qui est la condition b) cherchée.}$$

§ 2. PROPRIETES DE CONVEXITE HOLOMORPHE DES TUBOÏDES

Les deux propositions suivantes ont été démontrées dans [1] (d'après la 2ème remarque faite ci-dessus concernant la nouvelle définition des tuboïdes que nous donnons ici, ces propositions peuvent être énoncées sans modification).

Théorème 1 : Pour tout tuboïde D de profil Λ au-dessus de Ω, il existe un tuboïde $\hat{D}$ de profil $\hat{\Lambda}$, enveloppe convexe par fibres de Λ (c'est-à-dire $\hat{\Lambda} = \bigcup_{x\in\Omega} (x,\hat{\Lambda}_x)$, $\hat{\Lambda}_x$ étant l'enveloppe convexe de Λ_x), tel que toute fonction holomorphe dans D admette un prolongement analytique univalent dans $\hat{D}$.

Théorème 2 : Pour tout tuboïde D dont le profil Λ est à fibres convexes il existe un tuboïde D' de même profil Λ, contenu dans D et qui est un domaine d'holomorphie.

Remarque : Dans le cas où le profil Λ est de la forme $\Omega \times \mathbb{R}^n_{(y)}$, le théorème 2 se réduit à la propriété suivante : pour tout domaine D de $\mathbb{C}^n$ contenant Ω, il existe un domaine d'holomorphie $D' \subset D$ qui contient aussi Ω. Cette propriété, démontrée d'abord par H. Cartan [7] dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, fut ensuite établie par Grauert [8] en toute généralité, Ω pouvant être remplacée par une variété analytique réelle quelconque $\mathcal{X}$ de dimension n.

1) Nous ne donnerons ici que quelques indications sur la démonstration du théorème 1 : pour tout point $x\in\Omega$, on peut trouver une suite de tubes locaux $D_i = \Omega_i \times \Delta_i$ de profils $\Lambda_i = \Omega_i \times \mathcal{C}_i$ ($\mathcal{C}_i$ profil de Δ_i, Ω_i voisinage du point x) tels que $\forall i$, $D_i \subset D$, et

$$\mathcal{C}_i \subset\subset \mathcal{C}_{i+1}\ ,\quad \bigcup_i \mathcal{C}_i = \Lambda_x .$$

Le théorème 1 résulte alors de la propriété suivante :

Proposition 4 : Pour tout tube local ♦ $D = \Omega\times\Delta$ de profil $\Lambda = \Omega\times\mathcal{C}$, et toute boule ouverte $\Omega' \subset\subset \Omega$, l'enveloppe d'holomorphie de D contient un tube local $D' = \Omega'\times\Delta'$, de profil $\hat{\Lambda} = \Omega\times\hat{\mathcal{C}}$, $\hat{\mathcal{C}}$ étant l'enveloppe convexe de $\mathcal{C}$.

♦ Ici les domaines Δ_i, Δ doivent être choisis semi-étoilés : Δ est semi-étoilé, si $y\in\Delta \Rightarrow \lambda y\in\Delta$, pour tout λ tel que $0<\lambda\le 1$.

Ce résultat peut être considéré comme une version locale du "théorème du tube" de Bochner [9] suivant lequel l'enveloppe d'holomorphie d'un tube $\mathbb{R}^n \times B$ est le tube convexe $\mathbb{R}^n \times \hat{B}$ ($\hat{B}$ étant l'enveloppe convexe de B).

On peut le démontrer soit de façon purement géométrique (cf. [10]), soit en utilisant une généralisation du théorème de la transformée de Laplace ([5]). En effet le théorème de la transformée de Laplace à plusieurs variables énonce une propriété d'équivalence entre l'analyticité d'une fonction f dans un tube $\mathbb{R}^n \times B$ et la décroissance exponentielle de sa transformée inverse $\tilde{f}$ avec pour indicatrice de décroissance le polaire $\tilde{B}$ de B.

Comme B et $\hat{B}$ ont même polaire $\tilde{B}$, le théorème du tube en résulte (pour la classe des fonctions à croissance lente). Or cette étude géométrique peut être transposée, avec des résultats analogues dans le cadre de la transformation de Fourier généralisée (voir [1], [5], et le prochain exposé) et la proposition 4 en est un corollaire.

2) Nous allons maintenant décrire plus en détails la démonstration du théorème 2 (indépendante du théorème 1) ; celle-ci se fait en deux étapes :

a) On construit d'abord un tuboïde de $D'' \subset D$, de même profil Λ que D, et dont toutes les fibres D''_x ($\forall\, x \in \Omega$) sont convexes semi-étoilées. On utilise pour cette construction la proposition auxiliaire suivante :

<u>Proposition 5</u> : Soit D_j $(j = 1,2)$ un tuboïde de profil Λ_j à fibres convexes au-dessus de Ω_j avec

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \ , \quad \mathring{\Lambda}_1 \subset\subset \mathring{\Lambda}_2 \ , \quad \bar{D}_1 \setminus \Omega_1 \subset D_2 \ ,$$

D_1 (éventuellement vide) ayant toutes ses fibres $(D_1)_x$ convexes ($\forall\, x \in \Omega_2$) ; alors pour tout profil Λ_3 à fibres convexes au-dessus de Ω_3 tel que $\mathring{\Lambda}_1 \subset\subset \mathring{\Lambda}_3 \subset\subset \mathring{\Lambda}_2$, il existe un tuboïde D_3 de profil Λ_3 tel que : $\bar{D}_3 \setminus \Omega_3 \subset D_2$, $D_1 \subset D_3$, D_3 a toutes ses fibres $(D_3)_x$ convexes ($\forall\, x \in \Omega_3$).

Ici D_3 peut être construit comme l'enveloppe convexe par fibres de D_1 et d'un tuboïde D_ρ de profil Λ_3 défini comme suit

$D_\rho = \{(x,y) \in \Lambda_3 \ ; \ 0 < \|y\| < \rho\}$; par un argument de compacité, on montre en effet que pour ρ suffisamment petit, cette enveloppe convexe est bien contenue dans D_2.

On applique alors cette proposition auxiliaire à la construction de D", en considérant une suite croissante de profils Λ_n $(\ldots\mathring{\Lambda}_n \subset\subset \mathring{\Lambda}_{n+1} \subset\subset \ldots)$ à fibres convexes dont la réunion est Λ ; par récurrence sur n, on peut construire en effet une suite croissante de tuboïdes D_n à fibres convexes de profils Λ_n, et contenus dans D ; le tuboïde $D'' = \bigcup\limits_n D_n$ satisfait alors aux conditions cherchées.

b) Partant du tuboïde D" à fibres convexes, on construit un tuboïde d'holomorphie D' contenu dans D" et de même profil, comme l'intersection d'une famille appropriée de domaines d'holomorphie (cf. [11]) chaque domaine de la famille est le complémentaire dans $\mathbb{C}^n$ d'une sphère complexe.

Pour décrire de façon détaillée cette construction, introduisons d'abord la notion de <u>bipolaire sphérique</u> $\widehat{\Delta}$ d'un domaine convexe semi-étoilé Δ de $\mathbb{R}^n$, contenu dans la boule $\{y \in \mathbb{R}^n \ ; \|y\| < \frac{1}{2}\}$.

Géométriquement, $\widehat{\Delta}$ est défini de la façon suivante : considérons Δ comme l'enveloppe de tous ses hyperplans d'appuis π_ξ de normale $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$, ou comme l'intersection de tous les demi-espaces ouverts π_ξ^+ contenant l'origine et bordés par π_ξ. A tout $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ associons la boule B_ξ de rayon $\frac{1}{2}$, contenue dans π_ξ^+ et tangente à π_ξ au pied de la normale à π_ξ issue de l'origine. On définit $\widehat{\Delta}$ comme l'intersection de toutes les boules B_ξ pour ξ variant dans $\mathbb{S}^{n-1}$; on montre aisément que $\widehat{\Delta}$ est un domaine convexe semi-étoilé, contenu dans Δ et de même profil que Δ.

Donnons aussi une définition équivalente de $\widehat{\Delta}$, utile pour la suite ♦ : soit $\widetilde{\Delta} = \{(\xi,r) \ ; \xi \in \mathbb{S}^{n-1} \ ; \ 0 \le r \le \frac{1}{2} \ ; \ <\xi,y> + r > 0, \ \forall \ y \in \Delta\}$; $\widetilde{\Delta}$ est le polaire de Δ en coordonnées homogènes (tronqué par $r \le \frac{1}{2}$) ; on a alors (définition analogue à celle du bipolaire ordinaire d'un ensemble) :

$\widehat{\Delta} = \{y \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|y\| < \frac{1}{2} \ ; \ <\xi,y> + r - \|y + r\xi\|^2 \neq 0 \ ; \ \forall \ (\xi,r) \in \widetilde{\Delta}\}$.

Nous pouvons maintenant construire un tuboïde d'holomorphie D' contenu dans D" ; on peut toujours supposer que D" est contenu dans le tube $\Theta = \{(x,y) \ ; \ \|y\| < \frac{1}{2}\}$, ce que nous ferons.

♦ La notation $<\xi,y>$ désigne le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

On considère la famille suivante de sphères complexes $S_{a\eta\rho}$ dans $\mathbb{C}^n$:

$$S_{a\eta\rho} = \{z \in \mathbb{C}^n \ ; \ <\eta, (z-a+i\rho\eta)> + i \sum_{j=1}^{n} (z_j - a_j + i\rho\eta_j)^2 = 0 \}$$

où $a \in \mathbb{R}^n$; $\eta \in \mathbb{S}^{n-1}$; $0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}$.

Remarquons que la trace de $S_{a\eta\rho}$ dans la fibre $(x=a, \mathbb{R}^n_{(y)})$ est la sphère réelle de rayon $\frac{1}{2}$:

$$\sigma_{\eta\rho} = \{y \in \mathbb{R}^n \ ; \ <\eta, y> + \rho - \|y+\rho\eta\|^2 = 0\} \ ,$$

laquelle ne passe par l'origine (avec pour normale η) que lorsque $\rho = 0$. Dans toute autre fibre $(x, \mathbb{R}^n_{(y)})$ la trace de $S_{a\eta\rho}$ est une sphère réelle de rayon $> \frac{1}{2}$ et la boule ouverte limitée par cette sphère contient un voisinage fixe de l'origine (indépendant de η, ρ) .

Définissons alors dans $\mathbb{C}^n$ l'ensemble

$$E(D'') = \bigcap_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ (\eta,\rho) \in \tilde{D}''_a}} (\complement S_{a\eta\rho}) \cap \Theta .$$

On montre que $E(D'')$ est un ouvert (la famille de paramètres (η,ρ) variant sur le compact $\tilde{D}''_a$, polaire de D''_a), et par suite un ouvert d'holomorphie (cf. [11]).

On vérifie d'autre part que $E(D'')$ est contenu dans D'', et admet une composante connexe D' qui est un tuboïde de même profil Λ que D''.

Pour expliquer ces dernières propriétés, considérons l'ensemble

$$E_a(D'') = \bigcap_{(\eta,\rho) \in \tilde{D}''_a} (\complement S_{a\eta\rho}) \cap \Theta .$$

Cet ensemble est un tuboïde au-dessus de $\mathbb{R}^n$ dont le profil est $(\bigcup_{x \neq a} (x, \mathbb{R}^n_{(y)})) \cup (a.\Lambda_a)$. En effet d'après la propriété décrite ci-dessus des sphères $S_{a\eta\rho}$, on vérifie que la fibre $(E_a(D''))_{x=a}$ est le bipolaire sphérique $\hat{D}''_a$ de D''_a, lequel a même profil Λ_a que D_a. Toute autre fibre $(E_a(D''))_x (x \neq a)$ est une intersection de boules réelles contenant un voisinage fixe de l'origine.

Considérant alors E(D'') comme l'intersection de tous les domaines $E_a(D'')$, a variant dans $\mathbb{R}^n$, on obtient les propriétés annoncées. Remarquons en particulier que pour tout $a \notin \Omega$, $D''_a = \emptyset \Rightarrow \tilde{D}''_a = \mathbb{S}^{n-1} \times [0,1/2] \Rightarrow \hat{D}''_a = \emptyset$; la fibre correspondante $(E(D''))_a$ est donc vide .

§ 3. TUBOÏDES DANS DES VARIETES COMPLEXES

Nous nous proposons de généraliser les définitions et résultats des sections précédentes au cas où l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est remplacé par une variété analytique réelle♦ $\mathcal{R}$ de dimension n. D'après un théorème classique [12], $\mathcal{R}$ peut toujours être identifiée à une sous-variété analytique réelle d'une variété analytique complexe♦ $\mathcal{M}$ de dimension (complexe) n, de telle sorte que :

1) $\mathcal{M} = \bigcup_{j\in J} \mathcal{M}_j$, les domaines $\mathcal{M}_j$ formant un recouvrement localement fini de $\mathcal{M}$.

2) $\mathcal{R} = \bigcup_{j\in J} \mathcal{R}_j$; $\mathcal{R}_j = \mathcal{M}_j \cap \mathcal{R}$.

3) Chaque domaine $\mathcal{M}_j$ admet une paramétrisation α_j par des variables complexes $z^{(j)} = (z_1^{(j)},\dots,z_n^{(j)})$ variant dans un domaine $\mathcal{U}_j$ de $\mathbb{C}^n$: $\mathcal{U}_j \xrightarrow{\alpha_j} \mathcal{M}_j$. Dans ces variables, $\mathcal{R}_j$ est représenté par le domaine réel (éventuellement vide pour certains indices j) :

$$\begin{cases} \Omega_j = \{z^{(j)} \in \mathcal{U}_j \quad ; \quad \operatorname{Im} z^{(j)} = 0\} \\ \Omega_j \xrightarrow{\alpha_j} \mathcal{R}_j . \end{cases}$$

<u>Définition 1'</u> : On appelle profil Λ au-dessus de $\mathcal{R}$ tout domaine dans le fibré tangent $T\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}$:

♦ paracompacte et connexe

$$\Lambda = \bigwedge_{x \in \mathcal{R}} (x, \Lambda_x),$$

tel que $\forall\ x \in \mathcal{R}$, Λ_x soit un cône ouvert connexe non vide dans $T_x\mathcal{R}$ (l'espace tangent à $\mathcal{R}$ au point x).

Cette notion généralise bien celle de la définition 1. En effet, si $\mathcal{R}$ est représentée comme ci-dessus, $\Lambda \cap T\mathcal{R}_j$ est représenté dans $T\Omega_j$ par un ouvert à fibres coniques qui est l'image canonique par i_{Ω_j} d'un profil $\Lambda_j \in \Omega_j \times \mathbf{R}^n_{(y^{(j)})}$ au-dessus de Ω_j, au sens du paragraphe 1 ; d'après la proposition 1, cette propriété reste vraie par changement de paramétrisation (bi-analytique) des domaines $\mathcal{R}_j$, ou par modification du recouvrement $\{\mathcal{R}_j\ ;\ j \in J\}$.

<u>Définition 2'</u> : Etant donné un profil Λ dans $T\mathcal{R}$, on appelle tuboïde de profil Λ au-dessus de $\mathcal{R}$ tout domaine D de $\mathcal{M}$ tel que $D \cap \mathcal{M}_j$ soit représenté dans $\mathcal{U}_j$ par un tuboïde de D_j de profil Λ_j au-dessus de Ω_j ; au sens de la définition 2 (c'est-à-dire dans l'espace des coordonnées complexes $z^{(j)}$ qui paramétrisent $\mathcal{M}_j$).

Le fait que $\forall\ j \in J$, $D \cap \mathcal{M}_j$ soit représenté par un tuboïde D_j dans la carte $(\mathcal{U}_j, \alpha_j)$ est d'après la proposition 3, une propriété indépendante de la paramétrisation (analytique) de $\mathcal{M}_j$. Pour la même raison, cette caractérisation est également indépendante du choix du recouvrement $\{\mathcal{M}_j ;\ j \in J\}$. Par suite la définition 2' est une extention légitime au cas des variétés de la définition des tuboïdes dans $\mathbb{C}^n$ donnée dans le paragraphe 1.

Les théoremes 1 et 2 se généralisent alors aux tuboïdes dans des variétés, sous la forme suivante :

<u>Théorème 1'</u> : Soit $\mathcal{R}$ et $\mathcal{M}$ comme ci-dessus. Pour tout tuboïde $D \subset \mathcal{M}$ de profil $\Lambda \subset T\mathcal{R}$ au-dessus de $\mathcal{R}$, il existe un tuboïde $\hat{D} \subset \mathcal{M}$ de profil $\hat{\Lambda}$, enveloppe convexe par fibres de Λ dans $T\mathcal{R}$, tel que toute fonction f holomorphe dans $\mathbf{D}$ admette un prolongement analytique univalent $\hat{f}$ dans $\hat{\mathbf{D}}$.

<u>Théorème 2'</u> : Pour tout tuboïde $D \subset \mathcal{M}$ dont le profil $\Lambda \subset T\mathcal{R}$ est à <u>fibres convexes</u>, il existe un tuboïde D' contenu dans D, de même profil Λ et qui est une variété de Stein.

Le théorème 1' s'obtient par application du théorème 1 dans chaque carte $(\mathcal{U}_j, \alpha_j)$ de $\mathcal{M}$: f admet alors des prolongements analytiques $\hat{f}_j$ dans des tuboïdes $\hat{D}_j \subset \mathcal{M}_j$ dont les profils sont les enveloppes convexes par fibres de $\Lambda \cap T\mathcal{R}_j$; les $\hat{f}_j$ se recollent suivant $\hat{f}$ dans $\hat{D} = \bigcup_{j \in J} \hat{D}_j$ qui est un tuboïde de profil $\hat{\Lambda}$.

Pour la démonstration du théorème 2', on se ramène au cas où le tuboïde D appartient à une sous-variété complexe d'un espace $\mathbb{C}^k$, en utilisant la propriété de plongement suivante :

<u>Proposition 6</u> : Etant donné un couple $(\mathcal{R}, \mathcal{M})$ de variétés de dimension n comme ci-dessus, il existe un voisinage ouvert connexe $\mathcal{N}$ de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{M}$, un espace $\mathbb{C}^k$ de dimension k suffisamment grande et une application holomorphe h de $\mathcal{N}$ dans $\mathbb{C}^k$ possédant les propriétés suivantes :

i) h est une application régulière (c'est-à-dire injective et de rang maximum (cf. [8])) de $\mathcal{N}$ dans $\mathbb{C}^k$.

ii) Il existe un domaine $\mathcal{W}$ de $\mathbb{C}^k$ tel que $\underline{\mathcal{N}} = h(\mathcal{N})$ soit une sous-variété (complexe) fermée de dimension n de $\mathcal{W}$.

iii) La restriction h_r de h à $\mathcal{R}$ est une application régulière propre de $\mathcal{R}$ sur une sous-variété analytique réelle (fermée) $\underline{\mathcal{R}}$ de $\mathbb{R}^k$, telle que $\underline{\mathcal{R}} = \underline{\mathcal{N}} \cap \mathbb{R}^k$.

Cette proposition résulte du théorème de plongement pour les variétés analytiques réelles [8] qui assure l'existence d'une application analytique régulière propre $\mathcal{R} \xrightarrow{h_r} \underline{\mathcal{R}} \subset \mathbb{R}^k$, pour une dimension k suffisamment grande ; h_r se prolonge en effet à une application holomorphe régulière h d'un voisinage complexe de $\mathcal{R}$ (dans $\mathcal{M}$) dans le complexifié $\mathbb{C}^k$ de $\mathbb{R}^k$, et (h_r étant propre), on peut trouver $\mathcal{W}$ suffisamment petit tel que i) et ii) soient satisfaites.

Soit alors $D \subset \mathcal{M}$ un tuboïde de profil $\Lambda \subset T\mathcal{R}$ à fibres convexes ; Posons $D'' = D \cap \mathcal{N}$, $\underline{D''} = h(D'') \subset \underline{\mathcal{N}}$. On construit un tuboïde $\mathfrak{D}$ dans $\mathbb{C}^k$ au-dessus de l'ouvert reel $\Omega = \mathcal{W} \cap \mathbb{R}^k$, possédant les propriétés suivantes :

a) $\mathcal{D} \cap \underline{\mathcal{N}} = \underline{D}''$.

b) Le profil $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$ a toutes ses fibres convexes (et $\mathcal{A} \cap T\underline{\mathbb{R}} = \underline{\Lambda} = h_r'(\Lambda))$.

Cette construction s'effectue au moyen d'un recouvrement localement fini de $\mathcal{W}$ par des ouverts W_j relativement compacts dans des cartes $\mathcal{W}_j$ recouvrant $\mathcal{W}$. Dans chaque carte $\mathcal{W}_j$, $\underline{D}'' \cap \mathcal{W}_j$ est "prolongé" en un tuboïde $\mathcal{D}_j$ dont le profil est constant par rapport aux coordonnées transverses à $\underline{\mathcal{N}}$. On pose alors : $\mathcal{D} = \bigcup_{x \in \Omega} (x, \bigcap_{j \in \underline{J}_x} (\mathcal{D}_j)_x)$, où J_x désigne la famille finie d'indices j tels que $x \in \overline{W}_j$. On vérifie aisément que $\mathcal{D}$ est un ouvert de $\mathcal{W}$, tel que $\mathcal{D} \cap \underline{\mathcal{N}} = \underline{D}''$. De plus $\mathcal{D}$ est un tuboïde dont le profil $\mathcal{A}$ est à fibres convexes (comme chacun des D_j).

Ayant construit $\mathcal{D}$, on déduit du théorème 2 qu'il existe un tuboïde $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ de même profil $\mathcal{A}$ et qui est un domaine d'holomorphie. Comme $\underline{\mathcal{N}}$ est fermée dans $\mathcal{W}$, $\underline{D}' = \mathcal{D}' \cap \underline{\mathcal{N}}$ est une sous-variété fermée de $\mathcal{D}'$; $\underline{D}'$ est donc, comme $\mathcal{D}'$ une variété de Stein, et il est clair que $\underline{D}'(\subset \underline{D}'')$ est un tuboïde, de même profil $\underline{\Lambda}$ que $\underline{D}''$. Posant alors $D' = h^{-1}(\underline{D}')$, on obtient ainsi une variété de Stein contenue dans D et de profil Λ.

§ 4. PROPRIETES DE DECOMPOSITION DES FONCTIONS ANALYTIQUES DEFINIES DANS DES TUBOÏDES

Nous nous bornerons à énoncer ces propriétés pour des tuboïdes dans $\mathbb{C}^n$, mais le cas de tuboïdes dans des variétés ne présente aucune difficulté nouvelle ; les propriétés que nous établissons sont en effet des conséquences directes du théorème 2 (ou 2') et du théorème B de Cartan (valable pour toute variété de Stein [2]).

Etant donné un profil Λ au-dessus d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et un ouvert $\Omega' \subset \Omega$, on posera :

$$\Lambda_{|\Omega'} = \{(x,y) \; ; \; x \in \Omega', \; y \in \Lambda_x\}$$

<u>Théorème 3</u> : Soit $\{\Lambda_j \; ; \; 1 \leq j \leq p\}$ une famille finie de profils au-dessus des ouverts respectifs Ω_j, possédant les propriétés suivantes :

a) $\forall j, \forall x \in \Omega_j$, la fibre $(\Lambda_j)_x$ est convexe

b) posant $\Omega_{ij} = \Omega_i \cap \Omega_j$ et $\Lambda_{ij} = \Lambda_i \cap \Lambda_j$, on a :

$$\forall\, i,j \;:\; \Lambda_i|_{\Omega_{ij}} = \Lambda_j|_{\Omega_{ij}} = \Lambda_{ij} \;.$$

Alors pour toute famille de fonctions $\{h_{ij} \;;\; 1 \le i,j \le p\}$ analytiques dans des tuboïdes respectifs D_{ij} de profils Λ_{ij} et telles que :

$h_{ij} = -h_{ji}$, $h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} = 0$ dans $D_{ij} \cap D_{jk} \cap D_{ki}$, il existe une famille de fonctions $\{h_i \;;\; 1 \le i \le p\}$ analytiques dans des tuboïdes D_i de profils Λ_i telles que dans $D_i \cap D_j$: $h_{ij} = h_i - h_j$.

De plus les domaines D_j ne dépendent que de la famille des D_{ij} et non des fonctions h_{ij} (et sont tels que $D_i \cap D_j \subset D_{ij}$).

Démonstration par récurrence sur p :

a) $\underline{p=2}$: On construit un voisinage ouvert réel $\mathcal{U}_1$ de $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ et un voisinage ouvert réel $\mathcal{U}_2$ de $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ tels que : $\mathcal{U}_1 \subset \Omega_1$, $\mathcal{U}_2 \subset \Omega_2$, $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$.

On pose alors : $D'_j = \Lambda_j|_{\mathcal{U}_j}$, $j = 1,2$ et $D'_{12} = D_{12} \cap \Lambda_{12}$. On vérifie que $D' = D'_1 \cup D'_2 \cup D'_{12}$ est un ouvert qui est un tuboïde de profil $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$. D'après le théorème 2, il existe un tuboïde d'holomorphie $D \subset D'$ et de profil Λ. Posant alors $(j=1,2)$ $D_j = (D'_j \cup D'_{12}) \cap D$, on a par construction

$D_1 \cup D_2 = D$, $D_1 \cap D_2 \subset D'_{12} \subset D_{12}$, D_1, D_2 étant des tuboïdes de profils respectifs Λ_1, Λ_2. Soit h_{12} analytique dans Δ ; d'après le théorème B de Cartan appliqué au recouvrement de D par D_1, D_2 il existe une décomposition :

$$h_{12} = h_1 - h_2 \quad \text{valable dans } D_1 \cap D_2,$$

où h_1, h_2 sont respectivement analytiques dans D_1, D_2.

b) $\underline{(p-1) \Rightarrow p}$: Soit $\{g_i \;;\; 1 \le i \le p-1\}$ une famille de fonctions analytiques dans des tuboïdes respectifs D'_i de profils Λ_i, telles que : $h_{ij} = g_i - g_j$ $(1 \le i,j \le p-1)$ dans $D'_i \cap D_{ij}$. Posons alors $\ell_i = g_i - h_{ip}$, analytique dans $D'_{ip} = D'_i \cap D_{ip}$, tuboïde de profil Λ_{ip}. Comme $h_{ij} = h_{ip} - h_{jp}$, les p fonctions ℓ_i se recollent en une fonction ℓ, analytique dans $\bigcup_{1\le i\le p-1} D'_{ip}$, tuboïde de profil $(\bigcap_{1\le i\le p-1} \Lambda_i) \cap \Lambda_p$. Les conditions géométriques du cas $p=2$ étant satisfaites par les deux profils $(\bigcup_{1\le i\le p-1} \Lambda_i)$ et Λ_p, il existe une décomposition : $\ell = \ell' + h_p$, où ℓ' (resp. h_p) est analytique dans un tuboïde D' (resp. D_p) de profil $(\bigcup_{1\le i\le p-1} \Lambda_i)$(resp. Λ_p).

Posant alors : $h_i = g_i - \ell'$ $(1\le i\le p-1)$, analytique dans le tuboïde $D_i = D'_i \cap D'$ de profil Λ_i, on vérifie aisément que $\forall\, i,j \le p$: $h_i - h_j = h_{ij}$ dans $D_i \cap D_j \subset D_{ij}$. De plus, il est clair que la détermination de tous les tuboïdes D_i est purement géométrique, c'est-à-dire indépendante des fonctions h_{ij} considérées.

<u>Théorème 4</u> : Soit deux domaines réels ω, Ω tels que $\omega \subset \Omega$, et soit Λ un profil à fibres convexes au-dessus de Ω.

Pour toute fonction h analytique dans un tuboïde Δ de profil $\Lambda_{|\omega}$, il existe une décomposition : $h = H + r$, où H est analytique dans un tuboïde D de profil Λ, et r est analytique dans un voisinage complexe $\mathcal{W}$ de ω ; de plus D et $\mathcal{W}$ ne dépendent que de Δ (et $D \cap \mathcal{W} \subset \Delta$).

<u>Démonstration</u> :

a) Soit $\{\Lambda_i \;;\; i \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de profils à fibres convexes au-dessus de Ω tels que :

$$\forall_i\,,\ \Lambda_i \subset \Lambda_{i+1}\,,\ \bar{\dot{\Lambda}}_i \subset \dot{\Lambda},\ \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} \Lambda_i = \Lambda\,,$$

Pour tout entier i, il existe un voisinage ouvert complexe $\mathcal{V}_i$ de ω tel que $\Lambda_i \cap \mathcal{V}_i \subset \Delta$ (cf. définition 2). Posons $\mathcal{D}'_i = \Lambda_i \cup \mathcal{V}_i$; $\mathcal{D}'_i$ est un tuboïde de profil $\mathcal{A}_i = \Lambda_i \cup \{\omega \times \mathbb{R}^n_{(y)}\}$ au-dessus de Ω. Il existe alors (cf. théorème 2) un tuboïde $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}'_i$, de même profil $\mathcal{A}_i$ et qui est un domaine d'holomorphie. D'après le théorème B de Cartan appliqué au recouvrement de $\mathcal{D}_i$ par les deux ouverts $D_i = \mathcal{D}_i \cap \Lambda_i$ et $\mathcal{W}_i = \mathcal{D}_i \cap \mathcal{V}_i$ (tels que $D_i \cap \mathcal{W}_i \subset \Delta$), il existe une décomposition : $h = H_i + r_i$ valable dans $D_i \cap \mathcal{W}_i$, telle que H_i (resp. r_i) soit analytique dans D_i (resp. $\mathcal{W}_i$).

b) Il nous reste à "recoller" ces différentes décompositions de h, pour i variant dans N^*. Considérons pour cela le domaine $\mathcal{D} = \bigcup_{i \in N^*} \mathcal{D}_i$, qui est un tuboïde de profil $\mathcal{A} = \Lambda \cup \{\omega \times \mathbb{R}^n_{(y)}\}$. Il existe un tuboïde d'holomorphie $\underline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}$ de même profil (théorème 2), dont les ouverts $\underline{\mathcal{D}}_i = \mathcal{D}_i \cap \underline{\mathcal{D}}$ forment un recouvrement. Dans chaque domaine $\underline{\mathcal{D}}_{ij} = \underline{\mathcal{D}}_i \cap \underline{\mathcal{D}}_j$, on considère la fonction ℓ_{ij} qui vaut $(H_j - H_i)$ dans

$\underline{\mathcal{D}}_{ij} \cap \Lambda_i \cap \Lambda_j$ et $(r_i - r_j)$

dans $\underline{\mathcal{D}}_{ij} \cap \mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j$ (ces deux fonctions se recollant d'après a)). Par construction, on a $\ell_{ij} + \ell_{jk} + \ell_{ki} = 0$ et il existe donc une suite de fonctions ℓ_i analytiques dans $\underline{\mathcal{D}}_i$ telles que $\ell_{ij} = \ell_i - \ell_j$ dans $\underline{\mathcal{D}}_{ij}$ (théorème B appliqué à $\underline{\mathcal{D}}$ recouvert par les $\underline{\mathcal{D}}_i$).

Définissant alors $\underline{H}_i = H_i + \ell_i$ dans $D_i \cap \underline{\mathcal{D}}_i$ et $\underline{r}_i = r_i - \ell_i$ dans $\mathcal{W}_i \cap \underline{\mathcal{D}}_i$, on vérifie aisément que :

1) les $\underline{H}_i$ se recollent en une fonction H analytique dans $D = \bigcup_{i \in N^*} (\underline{\mathcal{D}}_i \cap D_i)$; D est un tuboïde de profil Λ.

2) les $\underline{r}_i$ se recollent en une fonction r, analytique dans $\mathcal{W} = \bigcup_{i \in N^*} (\underline{\mathcal{D}}_i \cap \mathcal{W}_i)$; $\mathcal{W}$ est un voisinage complexe de ω.

3) $h = H + r$ dans $D \cap \mathcal{W}$, ce qui achève la démonstration du théorème 4 .

§ 4. "VALEURS AU BORD - DISTRIBUTIONS" DE FONCTIONS ANALYTIQUES DANS DES TUBOÏDES, ET THEOREMES DE DECOMPOSITION CORRESPONDANTS

Soit D un tuboïde de profil Λ au-dessus de Ω, et h une fonction holomorphe dans D. On dit que h admet comme valeur au bord une distribution f dans Ω, si la restriction de h à tout tube local $\omega \times (\mathcal{C} \cap B) \subset D$ ($\mathcal{C}$ étant un cône de sommet l'origine et B une boule de centre l'origine dans $\mathbb{R}^n_{(y)}$) admet $f|_\omega$ comme valeur au bord (c'est-à-dire si :

$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\omega)$: $\int h(x + iy)\varphi(x)\, dx \xrightarrow[\substack{y \to 0 \\ y \in \mathcal{C}}]{} \langle f , \varphi \rangle$).

D'après un théorème classique [13], h admet donc une valeur au bord-distribution dans Ω si et seulement si elle est à croissance lente dans tout tube local[♦] $T = \omega \times (\mathcal{C} \cap B) \subset D$, tel que $\omega \times \dot{\mathcal{C}} \subset\subset \Lambda$. Il en est ainsi en particulier si h est à croissance lente dans D lui même.

Reprenant les démonstrations des théorèmes 3 et 4 dans le cas à croissance lente, et utilisant alors le théorème de Hörmander ("à croissance") [3] analogue au théorème B de Cartan, on obtient :

<u>Théorème 5</u> : Soit $\{\Lambda_j ; 1 \leq j \leq p\}$ une famille de profils au-dessus d'ouverts Ω_j satisfaisant aux conditions a) et b) du théorème 3. Soit d'autre part une famille de distributions f_{ij} dans les ouverts respectifs $\Omega_{ij} = \Omega_i \cap \Omega_j$, valeurs au bord de fonctions analytiques h_{ij}, définies et à croissance lente dans des tuboïdes D_{ij} de profils Λ_{ij}, et telles que

$$f_{ij} = - f_{ji} \quad ; \quad f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0$$

dans $\Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k$.

Alors il existe une famille de distributions f_i dans les ouverts respectifs Ω_i, valeurs au bord de fonctions analytiques h_i, définies et à croissance lente dans des tuboïdes D_i de profils Λ_i, telles que dans Ω_{ij} : $f_{ij} = f_i - f_j$ (et dans $D_i \cap D_j$: $h_{ij} = h_i - h_j$).

<u>Théorème 6</u> : Soit ω, Ω, Λ comme dans le théorème 4, et soit f une dsitribution dans ω, valeur au bord d'une fonction analytique h, définie et à croissance lente dans un tuboïde Δ de profil $\Lambda_{|\omega}$.

Alors dans ω, il existe une décomposition $f = F_{|\omega} + r$, où la distribution F est valeur au bord dans Ω d'une fonction analytique et à croissance lente dans un tuboïde D de profil Λ, et r est analytique et à croissance lente dans un voisinage complexe de ω.

♦ C'est à dire h(z) borné en module par une puissance de l'inverse de la distance (euclidienne) du point z à la frontière de T.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Bros et D. Iagolnitzer : Tuboïdes dans $\mathbb{C}^n$ et généralisation d'un théorème de Grauert, préprint, D.Ph.T. Saclay.

[2] H. Cartan : Séminaires E. N. S. 1951/52.

[3] L. Hörmander : An introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand, Princeton, 1966.

[4] A. Martineau : Séminaire Bourbaki, 20ème année, 4340 (1967-1968).

[5] J. Bros et D. Iagolnitzer, Ann. Inst. Henri Poincaré, section A, vol. XVIII n° 2, p.147-184 (1973).

[6] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara : Microfunctions and pseudo-différential equations, Lecture Notes in Math., Springer Verlag 1971.

[7] H. Cartan : Bull. Soc. Math. France, 85, p.77-100 (1957).

[8] H. Grauert : Annals of Math., Série 2, 68, p.460-472 (1958).

[9] S. Bochner : Annals of Math., 39, p.14 (1938).

[10] E. Andronikof : Valeurs au bord de fonctions holomorphes se recollant loin du réel, Thèse (1974), Université Paris-Nord, Saint Denis (Dept. de Math).

[11] P. Lelong : Leçons sur la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, Saclay 1960.

[12] Bruhat et Whitney : cf. [8].

[13] A. Martineau : Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes, Proc. of the Intern. Summer Institute Lisbon, 1964.