Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

S. Alinhac

Problèmes hyperboliques singuliers

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 8, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974____A7_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

PROBLEMES HYPERBOLIQUES SINGULIERS

par S. ALINHAC

Exposé N° VIII

5 Décembre 1973

§ 0. INTRODUCTION

Cet exposé rend compte de certains résultats sur les problèmes de Cauchy singuliers, obtenus par S. Alinhac [2], [3].

On envisage le cas d'une surface initiale multiplement caractéristique, et l'on indique des conditions nécessaires et des conditions suffisantes (hélas distinctes!) pour que le problème de Cauchy soit bien posé entre des fonctions plates sur la surface iniale .

§ 1. GENERALITES ; NOTATIONS

On note H le demi-espace supérieur de $\mathbb{R}^{n+1}$, soit

$$H = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, t > 0\} ,$$

et l'on considère dans un voisinage D de 0 dans $\bar{H}$, le problème de Cauchy relatif à la surface initiale $t = 0$, et à un opérateur différentiel de l'un des types suivants :

. un système du premier ordre de la forme

$$\text{(sys)} \qquad L \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{B}{t} ,$$

où A_i et B sont des matrices (pxp), complexes, bornées.

. un opérateur différentiel de la forme

$$\text{(Op)} \qquad P \equiv t^k D_t^m + \sum_{\substack{\ell < m \\ \ell + |\alpha| \leq m}} a_{\ell,\alpha} t^{v_{\ell,\alpha}} D_t^{\ell} D_x^{\alpha} ,$$

où k et les $v_{\ell,\alpha}$ sont des réels non négatifs, tandis que les $a_{\ell,\alpha}$ sont complexes et bornées.

Pour un tel problème, les conditions habituelles de traces sur $t = 0$ (en nombre égal à l'ordre de l'opérateur) n'assurent nullement l'unicité d'une solution, si elle existe; on peut observer par exemple que la fonction $t^{-\lambda}$ est dans le noyau de l'opérateur

$$P = t\frac{\partial^2}{\partial t^2} \pm \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial}{\partial t} .$$

On est donc conduit à se placer d'emblée dans les fonctions qui sont "plates" sur $t = 0$, c'est-à-dire nulles ainsi que toutes leurs dérivées ; on note $C_p^\infty(D)$ l'espace de ces fonctions.

On dira alors que le problème de Cauchy plat est bien posé avec unicité si l'on observe les deux faits suivants :

i) Pour tout $f \in C_p^\infty(D)$, il existe $u \in C_p^\infty(D)$, $Qu = f$.

ii) Pour tout $V \subset D$, voisinage de 0 dans $\bar{H}$, et tout $u \in C_p^\infty(V)$, tel que $Qu = 0$, alors $u = 0$ dans V.

(où Q est un opérateur de la forme (Sys) ou (Op)).

Au paragraphe suivant, on indique une condition nécessaire à la réalisation de cette situation, dans le cas où Q est de la forme (Op), et certaines conditions suffisantes ; on discute également, dans ce dernier cas, quelles conditions de traces permettent de bien poser le problème de Cauchy usuel.

§ 2. ENONCES DES RESULTATS ET ESQUISSES DES PREUVES

Dans l'étude des opérateurs de la forme (Op), on est amené à faire une distinction entre ceux qui sont peu singuliers et ceux qui le sont beaucoup, entre ceux qui sont "de Fuchs" et ceux qui ne le sont pas.

Définition 1 : Un opérateur P de la forme (Op) est dit "de Fuchs" s'il existe une fonction $\eta(\alpha)$, définie sur les multiindices α, $|\alpha| \leq m$, telle que

$$|\alpha| \neq 0 \Rightarrow \eta(\alpha) > 0 \ , \quad \eta(\alpha) \geq 0 \quad \text{et}$$

$$\forall \ell, \alpha, \quad \ell + |\alpha| \leq m, \quad \ell < m, \quad m - k = \ell - v_{\ell,\alpha} + \eta(\alpha) \ .$$

On note $\lambda(P) = \sup\limits_{\substack{\ell + |\alpha| = m \\ \ell < m}} \dfrac{k - v_{\ell,\alpha}}{m - \ell}$, en remarquant que si P est "de Fuchs", $\lambda < 1$.

Remarque : Cette définition comporte des conditions sur les termes non principaux de P ; elle est empruntée pour l'essentiel à Baouendi et Goulaouic [4].

Parmi les opérateurs non Fuchsiens, on s'intéresse à ceux qui sont "sans propagation", selon la

<u>Définition 2</u> : P est dit "sans propagation" si

. $\lambda(P) \geq 1$, et il existe un couple (ℓ_o,α_o), $\ell_o + |\alpha_o| = m$, $\ell_o < m$, tel que $\lambda(P) = \dfrac{k - v_{\ell_o,\alpha_o}}{m - \ell_o}$ et $a_{\ell_o,\alpha_o}(0,0) \neq 0$.

. Pour tous ℓ,α, $\underset{\ell < m}{\ell + |\alpha| \geq m - 1}$, $\dfrac{k - v_{\ell,\alpha}}{m-\ell} \leq \lambda(P)$.

<u>Remarque</u> : Seuls les termes sous-principaux interviennent dans la définition (parmi les termes non-principaux).

Voyons des exemples :

- l'opérateur $t\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \pm \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda\dfrac{\partial}{\partial t}$ est de Fuchs, et $\lambda(P) = 1/2$.
- l'opérateur $t^2\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \pm \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ n'est pas de Fuchs, et est "sans propagation", tandis que $t^2\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \pm \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda\dfrac{\partial}{\partial t}$ n'est ni l'un ni l'autre.
- l'opérateur $t^2\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + x\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ n'est ni "de Fuchs" ni "sans propagation", de même que $t^2\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - x^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, etc...

Un premier résultat concerne les opérateurs "sans propagation".

<u>Théorème 1</u> : Soit P un opérateur de la forme (Op) dans D, et supposons
i) les coefficients $a_{\ell,\alpha} \in C^\infty(\overline{D})$.
ii) P est "sans propagation".
Alors le problème de Cauchy plat avec unicité n'est bien posé dans aucun voisinage Ω de 0 dans $\overline{H}$, $\Omega \subset D$.

Ce théorème est la conjonction de deux résultats :

<u>Proposition 1</u> : Soit, dans D, un opérateur $Q(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})$, à coefficients $C^\infty(D \cap H)$, tel qu'en tout point de $D \cap H$, la direction de l'axe des t soit non caractéristique pour Q. Supposons que, dans un voisinage Ω de 0 dans

$\bar{H}$, $\Omega \subset D$, le problème de Cauchy plat avec unicité soit bien posé. Alors, dans $\Omega \cap H$, les caractéristiques simples de Q sont réelles.

<u>Proposition 2</u> : Soit P un opérateur de la forme (Op) dans D, et supposons

i) les coefficients $a_{\ell,\alpha} \in C^{\infty}(\bar{D})$.

ii) Il existe un voisinage Ω de 0 dans $\bar{H}$, $\Omega \subset D$, dans lequel le problème de Cauchy plat avec unicité est bien posé.

iii) Dans $\Omega \cap H$, les caractéristiques simples de P sont réelles. Alors P ne peut être "sans propagation".

<u>"Preuves" de ces propositions</u> :

1) On note qu'au voisinage de tout point $P_o = (x_o, t_o)$ de Ω, le problème de Cauchy plat avec unicité est bien posé (avec $t = t_o$ comme surface initiale). On est ainsi ramené au cas non-caractéristique, à ceci près que les résultats classiques supposent bien posé le problème de Cauchy usuel, ce qui est plus fort que l'hypothèse présente. En fait, la preuve donnée par P. D. Lax [6] dans le cas des caractéristiques simples s'adapte bien par troncature au cas "plat".

2) C'est ici qu'intervient la structure précise de P, supposé "sans propagation". On va construire en supposant P "sans propagation" une solution asymptotique de Pu = 0, plate sur t = 0, qui permettra de prouver l'impossibilité d'une inégalité du type:

$$\sup_K |u| \leq \mathrm{Cte} \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |D^{\alpha} Pu| ,$$

valable pour les $u \in C^{\infty}_p(K)$, où K est un compact voisinage de 0 dans $\bar{H}$. L'existence d'une telle inégalité (où k dépend de K) pour tout compact $K \subset \Omega$ résulte de ii).

La solution asymptotique u sera prise sous la forme

$$u = e^{\tau\varphi}(Y_o + Y_{1/\tau} + \ldots + Y_{N/\tau^N} + \ldots),$$

où la "phase" φ vérifie $P_m(x,t, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}) \equiv 0$, les Y_i vérifient des relations de récurrence convenables liées à P. Si l'on définit les opérateurs $p^j(\varphi)$ par

$$e^{-\tau\varphi}P(ye^{\tau\varphi}) \equiv \sum_{k=0}^{m} p^k(\varphi)(y)\,\tau^{m-k}$$

(m est l'ordre de P, p^k est d'ordre k), ces relations s'écrivent

$$\left\{ j \geq m, \quad \sum_{r=0}^{\inf(m,m+j)} p^r(\varphi)Y_{m+j-r} = 0 \right.$$

Le fait (supposé dans le raisonnement par l'absurde) que P est "sans propagation" intervient dans la construction de u en deux endroits essentiels :

- il existe une "fonction de phase" φ, réelle, positive pour $t > 0$ près de 0, et nulle sur $t = 0$.
- On choisit comme phase dans u non pas φ, mais $\psi = \dfrac{-1}{\varphi^\nu}$, où ν est un entier convenablement grand.

Les relations déterminant les Y_i à partir de Y_o s'écrivent alors

$$\left\{\begin{array}{l} p^1(\psi)Y_o = 0 \\ p^1(\psi)Y_1 + p^2(\psi)Y_o = 0 \\ \dots \\ p^1(\psi)Y_k + p^2(\psi)Y_{k-1} + \dots = 0 \\ \dots \end{array}\right.$$

Le fait est que $p^1(\psi)$ est résoluble.

En réalité, les calculs des deux points précédents ne peuvent, en général, que s'effectuer d'une façon approchée, ce qui ne modifie pas l'essentiel de la preuve.

Le cas des opérateurs "sans propagation" étant ainsi éliminé de notre propos, on va indiquer quels résultats positifs on peut obtenir pour des opérateurs "de Fuchs".

Remarquons d'abord qu'on peut réduire la discussion au cas de systèmes de la forme (Sys), en accord avec le

Lemme : Supposons P de la forme (Op) et Fuchsien. Alors il existe un changement de variables

$$\begin{cases} X = x \\ T = t^{1-\nu} \end{cases} \qquad 0 \le \nu < 1,$$

un système L de la forme (Sys) et un choix de nouvelles fonctions $U(u)$ et $g(f)$ tels que si u vérifie $Pu = f$, alors U vérifie $LU = (g,0,\dots,0)$. (on peut prendre par exemple $\nu = \nu(P) = \mathrm{Sup}(0,\lambda(P),1 - \inf_{|\alpha|\neq 0} \frac{\eta(\alpha)}{|\alpha|})$.

De plus, la proposition 1 citée plus haut indique que ces systèmes doivent être "hyperboliques" en quelque façon. Le principal résultat positif est alors le suivant :

<u>Théorème 2</u> : Soit L un système de la forme (Sys), où les matrices A_i, B et $\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$ sont bornées dans D. On note $L^2_\mu(D)$ l'espace des fonctions f telles que $t^\mu f \in L^2$, et $\bar{D}_\mu = \{U \in L^2_{\frac{\mu-1}{2}}(D),\ LU \in L^2_{\frac{\mu+1}{2}}(D)\}$; on note $\bar{L}_\mu$ l'opérateur de $\bar{D}_\mu$ dans $L^2_{\frac{\mu+1}{2}}$ qui vaut L. Deux formes sont envisagées pour D :

i) D est une bande $0 \le T < T_0$ (cas <u>global</u>).
On suppose la partie principale L_1 de L hyperbolique symétrisable dans la direction de l'axe des t (au sens de Friedrichs [5], rappelé ci-dessous). Alors il existe $\mu_0 \in \mathbb{R}$, tel que pour $\mu < \mu_0$, $\bar{L}_\mu$ est à indice.

ii) D est défini par la donnée d'un ouvert borné régulier Ω de $\mathbb{R}^n_x$ contenant 0, d'une fonction $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$, $d\varphi \neq 0$, $\varphi > 0$ dans Ω, $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$, et des inégalités

$$D = \{(x,t),\ x \in \Omega,\ 0 \le t < \varphi(x)\}.$$

On suppose que les directions de l'axe des t et de toutes les normales au bord supérieur S de D sont des directions d'hyperbolicité pour L_1. Alors il existe $\mu_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour $\mu > \mu_0$, $\bar{L}_\mu$ est à indice.

<u>Remarque</u> : Dire que $L_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ est hyperbolique symétrisable dans la direction de l'axe des t signifie pour l'essentiel ceci : il existe un pseudo-différentiel $r(x,\xi)$ d'ordre zéro, assez régulier, tel

que $\quad$. $r + r^H \geq \alpha_o\, \mathrm{id}$ $(\alpha_o > 0$ fixe)

. $ar = r^H a^H$, où a désigne la matrice $a(x,t,\xi,\tau) = \tau + \sum_{i=1}^{n} A_i(x,t)\xi_i$.

(m^H désigne la transposée conjuguée de la matrice m).

Lorsque L_1 a des caractéristiques réelles de multiplicité constante, un tel r existe.

"__Preuve__" : On établit des inégalités d'énergie entre des L^2_λ convenables.

Lorsque L provient d'un opérateur P par réduction suivant le lemme, le théorème 2 appliqué à L permet d'obtenir des résultats pour P, qui sont résumés dans le

__Théorème 3__ : Soit P un opérateur de Fuchs dans un domaine δ. On suppose que D (transformé de δ par le changement de variables du lemme) et L_1 (associé à P par le lemme) vérifient les hypothèses du théorème 2 (cas i) ou ii)).

Alors il existe $s_o \in \mathbb{R}$ tel que si $s < s_o$, l'opérateur

$$P : W^{m-1}_{s+k-m,\nu(P)}(\delta) \cap \{u, Pu \in L^2_s(\delta)\} \longrightarrow L^2_s(\delta) \quad \text{est à indice.}$$

L'espace $W^p_{\sigma,\eta}(\delta)$ (où $p \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $0 \leq \eta < 1$) est l'espace des $u \in L^2_\sigma(\delta)$, tels que pour $\ell + |\alpha| \leq p$,

$$D^\ell_t D^\alpha_x \in L^2_{\sigma+\ell+(1-\eta)|\alpha|}(\delta).$$

Dans des cas plus particuliers, il est possible d'étendre les conclusions des théorèmes 2 et 3 afin d'obtenir des solutions C^∞ plates sur $t = 0$. Les plus simples de ces cas sont ceux où les matrices A_i et B ne dépendent que de t (bien que cela ne soit nullement nécessaire). On obtient alors des résultats du type suivant (dans une bande) :

__Proposition 3__ : Les hypothèses sont celles du théorème 2, cas i), et l'on suppose de plus que A_i et B ne dépendent que de t, et sont C^∞ pour $0 \leq t \leq T_o$.

Soit alors $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\rho + 1 + q$ n'est pas valeur propre de $-B(0)$. Dans ce cas, pour tout f, $t^{-\rho}f \in D_{L^2}(D)$, il existe une unique fonction u, $t^{-(\rho+1)}u \in D_{L^2}(D)$ et $Lu = f$. (On note $D_{L^2}(D)$ l'espace des fonctions $C^\infty(D)$ qui sont dans L^2 ainsi que toutes leurs dérivées).

<u>Proposition 4</u> : Les hypothèses générales sont celles de la proposition 3. Supposons $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que λ est valeur propre de $-B(0)$, mais qu'aucun des nombres $\lambda + 1 + q$, $q \in \mathbb{N}$, ne le soit.

Alors, pour tout $u_o \in \ker(\lambda + B(0))$, $u_o \in D_{L^2}(\mathbb{R}^n_x)$, il existe un unique u tel que $t^{-\lambda}u \in D_{L^2}(D)$, $t^{-\lambda}u|_{t=0} = u_o$, et $Lu = 0$.

§ 3. QUELQUES EXEMPLES

Parmi les plus classiques, citons les opérateurs d'Euler-Poisson-Darboux $L_\lambda \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x + \frac{\lambda}{t}\frac{\partial}{\partial t}$, pour lesquels on connaît des solutions élémentaires explicites (Delache et Leray [7]). Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} L_\lambda u = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \quad , \; t \geq 0,$$

a une signification géométrique classique : si $\lambda = n+1$ (resp. $n-1$), la solution u n'est autre que la fonction "moyenne" de f, c'est-à-dire

u(x,t) = moyenne de f sur la boule (resp. sphère) de centre x et de rayon t.

Pour les autres valeurs de λ (sauf les entiers impairs négatifs), la solution u peut toujours se représenter comme une moyenne <u>à poids</u> convenable de f (cf. Alinhac [1]).

Diverses généralisations ont été étudiées, en particulier par Lions [8] qui envisage le cas de variables séparées

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\alpha(t)}{t}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\beta(t)}{t^2} - \mathcal{A}(t) ,$$

où $\mathcal{A}(t)$ est elliptique.

Enfin, le problème de Cauchy pour des opérateurs du type (Op), Fuchsiens, avec données et coefficients analytiques en variable d'espace x, a été étudié par Baouendi et Goulaouic [4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Alinhac : Une caractérisation des fonctions harmoniques dans un ouvert borné par des propriétés de moyennes sur certaines boules, Thèse de 3ème cycle, Orsay, 1972.

[2] S. Alinhac : Systèmes hyperboliques singuliers, à paraître.

[3] S. Alinhac : Problèmes de Cauchy pour des opérateurs singuliers, à paraître.

[4] Baouendi et Goulaouic : Cauchy Problems with characteristic initial hypersurface, à paraître aux Comm. on Pure and Applied Math.

[5] Friedrichs : Pseudo-differential operators, Courant Institute, New York.

[6] P. D. Lax : Duke Math. J., 24, n°4, 1957.

[7] Leray et Delache : Calcul de la solution élémentaire de l'opérateur d'Euler-Poisson-Darboux..., Bull. de la SMF, 99 (1971).

[8] Lions : Opérateurs de Delsarte et problèmes mixtes, Bull de la S.M.F., 84 (56).