Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

B. Helffer

Opérateurs pseudo-différentiels et résolubilité locale (d'après R. Beals et C. Feffermann)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 7, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974____A6_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS ET RESOLUBILITE LOCALE

(D'APRES R. BEALS ET C. FEFFERMANN)

par B. HELFFER

Exposé N° VII

28 Novembre 1973

§ 0. INTRODUCTION

On se propose de montrer dans cet exposé, comment l'introduction d'une classe plus générale d'opérateurs pseudo-différentiels permet de résoudre un problème de division de symboles (insoluble avec des symboles pseudo-différentiels classiques) et, du même coup, de démontrer une condition suffisante de résolubilité locale pour les opérateurs de type principal à coefficients C^∞, qui avait été conjecturée par L. Nirenberg et Trèves [6] et démontrée une première fois dans [1] par des méthodes plus compliquées.

Le travail exposé ici est dû à R. Beals et C. Feffermann [2]. Pour d'autres applications, nous renvoyons aux travaux de L. Boutet de Monvel [4] et de R. Beals [3] concernant en particulier l'hypoellipticité.

§ 1. FONCTIONS POIDS ET OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS

1.1 Fonctions poids . Si ξ est un point de $\mathbb{R}^n$, on note $\langle\xi\rangle = 1 + |\xi|$. Un couple (Φ,φ) de fonctions continues sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sera appelé couple de fonctions poids, s'il existe des constantes positives c, C, ε telles que :

(i) $\forall\ (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a : $c \leq \Phi(x,\xi) \leq C\langle\xi\rangle$; $c\langle\xi\rangle^{\varepsilon-1} \leq \varphi(x,\xi) \leq C$

(ii) $\forall\ (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a : $\varphi(x,\xi)\,.\,\Phi(x,\xi) \geq c$

(iii)♦ $\forall\ (x,y,\xi,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que : $\langle\xi\rangle \sim \langle\eta\rangle$, on a : $\dfrac{\Phi(x,\xi)}{\varphi(x,\xi)} \sim \dfrac{\Phi(y,\eta)}{\varphi(y,\eta)}$

(iv) $\forall\ (x,\xi)$, $\forall (y,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tels que . $|y-x| < c\,\varphi(x,\xi)$, $|\eta-\xi| < c\,\Phi(x,\xi)$

on a $\Phi(y,\eta) \sim \Phi(x,\xi)$, $\varphi(y,\eta) \sim \varphi(x,\xi)$

Deux couples (Φ,φ), (Φ^*,φ^*) de fonctions poids sont dits équivalents si :

$$\Phi \sim \Phi^* \ ,\quad \varphi \sim \varphi^* \ .$$

On peut montrer que tout couple de fonctions poids (Φ,φ) peut être remplacé par un couple équivalent (Φ^*,φ^*) vérifiant la condition plus

♦ On dira que $A \sim B$, si A/B et B/A sont bornés.

stricte suivante :

(iv)' $\forall\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, $\exists\, C_{\alpha,\beta} > 0$; $\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$|D_x^\alpha \, D_\xi^\beta \, \Phi \,| \leq C_{\alpha,\beta}\, \Phi^{1-|\beta|} \,.\, \varphi^{-|\alpha|}$$

$$|D_x^\alpha \, D_\xi^\beta \, \varphi \,| \leq C_{\alpha,\beta}\, \Phi^{-|\beta|} \,.\, \varphi^{1-|\alpha|}$$

1.2 <u>Classes de symboles</u> : Pour tout couple de réels (M,m), nous définissons $S^{M,m}_{\Phi,\varphi}$ comme l'ensemble des fonctions $a(x,\xi)$ C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ qui possèdent la propriété suivante :

$$\left[\begin{array}{l} \forall\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n,\ \exists\, C_{\alpha,\beta} > 0\ ,\ \forall\,(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ |D_x^\alpha \, D_\xi^\beta \, a(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}\, \Phi^{M-|\beta|}(x,\xi)\,.\,\varphi^{m-|\alpha|}(x,\xi) \end{array}\right.$$

Signalons quelques propriétés de ces symboles :

- Lorsque (iv)' est vérifiée, on a : $\varphi \in S^{o,1}_{\Phi,\varphi}$, $\Phi \in S^{1,0}_{\Phi,\varphi}$
- Pour tout réel $N > 0$, on a : $S^{M-N,m-N}_{\Phi,\varphi} \subset S^{M,m}_{\Phi,\varphi}$
- Si $a \in S^{M,m}_{\Phi,\varphi}$ et $b \in S^{P,p}_{\Phi,\varphi}$, alors $ab \in S^{M+P,\ m+p}_{\Phi,\varphi}$
- Si $a \in S^{M,m}_{\Phi,\varphi}$ et s'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall\,(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\ ,\ a(x,\xi) \geq c\, \Phi^M . \varphi^m$$

Alors pour tout t dans $\mathbb{R}$, $a^t \in S^{Mt,mt}_{\Phi,\varphi}$.

1.3 <u>Opérateurs pseudo-différentiels</u> : A tout symbole $a(x,\xi)$ dans $S^{M,m}_{\Phi,\varphi}$, on associe un opérateur $A = a(x,D)$ opérant de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et défini par :

$$Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} a(x,\xi)\, \hat{u}(\xi)\, d\xi \ ;\ u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

On désigne par $L^{M,m}_{\Phi,\varphi}$, la classe d'opérateurs ainsi introduite ; et on a les théorèmes suivants :

<u>Théorème 1.1</u> : Si $A \in L^{M,m}_{\Phi,\varphi}$ et $B \in L^{P,p}_{\Phi,\varphi}$, alors $A.B \in L^{M+P,m+p}_{\Phi,\varphi}$. Le symbole $a \circ b$ de AB a un développement asymptotique :

$$a\circ b \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\partial^{\alpha} a}{\partial \xi^{\alpha}}\right)(D_x^{\alpha} b)$$

au sens suivant :

$$\forall \text{ N entier positif, } a\circ b - \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\partial^{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}} a\right)(D_x^{\alpha} b) \in S^{M+P-N,m+p-N}_{\Phi,\varphi}$$

Si $A \in L^{M,m}_{\Phi,\varphi}$, $A^{*} \in L^{M,m}_{\Phi,\varphi}$.

La démonstration est une adaptation de la méthode classique (avec cependant des difficultés techniques supplémentaires).

<u>Théorème 1.2</u> : Si A est dans $L^{o,o}_{\Phi,\varphi}$, A peut être prolongé en un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

La démonstration utilise un théorème sur les sommes d'opérateurs "presque orthogonaux" utilisé dans [5], pour démontrer la continuité dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ des opérateurs de $L^o_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ de Hörmander.

<u>Remarque 1</u> : Les opérateurs introduits ci-dessus ne sont pas en général pseudo-locaux♦. En effet, si $\varphi(x,\xi) = 1$, $\Phi(x,\xi) = 1$; $e^{i\langle h,\xi\rangle} \in S^{1,1}_{\Phi,\varphi}$ pour tout h dans $\mathbb{R}^n$ et l'opérateur associé (translation dans la direction h) n'a évidemment pas cette propriété.

Cette propriété est vérifiée, si l'on suppose que (Φ,φ) vérifie l'hypothèse supplémentaire :

(v) $\exists\, c > 0,\ \delta > 0\ ;\ \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\ ;\ \Phi(x,\xi) \geq C\langle\xi\rangle^{\delta}$

<u>Remarque 2</u> : Invariance par transformation canonique : Notons qu'on peut localiser les définitions précédentes dans des cônes du fibré cotangent en faisant l'hypothèse supplémentaire $\Phi/\varphi \sim \langle\xi\rangle$. Les classes introduites sont stables par les transformations associées au Fourier intégraux elliptiques et ceci permet l'usage de transformations canoniques pour

---

♦ On dira qu'un opérateur A est pseudo-local, si, pour u dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, supp.sing (Au) $\subset$ supp.sing u.

simplifier certains problèmes.

<u>Exemple</u> : $\varphi(x,\xi) = \langle\xi\rangle^{-\delta}$, $\Phi(x,\xi) = \langle\xi\rangle^{\rho}$ $(0 \le \delta \le \rho \le 1,\ \delta < 1)$

Alors $S^{M,m}_{\Phi,\varphi}$ est la classe introduite par Hörmander $S^{M\rho - m\delta}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$.

1.4 <u>Inégalité de Garding précisée</u> : l'introduction de la classe d'opérateurs pseudo-différentiels ci-dessus permet de donner une démonstration très simple de l'inégalité de Garding.

<u>Théorème 1.3</u> : Soit a un symbole réel non négatif de $S^{1,1}_{\Phi,\varphi}$, alors il existe un couple de fonctions poids (Ψ,ψ) et une constante c_o, tels que :

(i) $\Phi^{1/2}.\varphi^{-1/2} \le \Psi \le c_o\,\Phi$; $\Phi^{-1/2}.\varphi^{1/2} \le \psi \le c_o\varphi$

(ii) $\psi^{-1}.\Psi = \varphi^{-1}\,\Phi$

et des symboles $b \in S^{1/2,1/2}_{\Psi,\psi}$, $c \in S^{o,o}_{\Psi,\psi}$ tels que $b(x,D) \ge 0$ et $a(x,D) = b(x,D)^2 + c(x,D)$.

<u>Esquisse de la démonstration</u> : On peut supposer que $\varphi \in S^{o,1}_{\Phi,\varphi}$, $\Phi \in S^{1,o}_{\Phi,\varphi}$.

Posons :

$$\Psi = \Phi^{1/2}.\varphi^{-1/2}(a+1)^{1/2} \ ;\ \psi = \Phi^{-1/2}.\varphi^{1/2}(a+1)^{1/2}$$

de sorte que l'on a $\Psi.\psi = (a+1)$.

Utilisant les inégalités :

$$a(x,\xi) \ge c\,|\nabla_x a(x,\xi)|^2\,\varphi(x,\xi)\,\Phi^{-1}(x,\xi)$$

$$a(x,\xi) \ge c\,|\nabla_\xi a(x,\xi)|^2\,\Phi(x,\xi)\,\varphi(x,\xi)^{-1}$$

qui résultent de la non-négativité de a, on vérifie que (Ψ,ψ) est un couple de fonctions poids. On pose alors $b(x,D) = [(a+1)^{1/4}(x,D)]^*[(a+1)^{1/4}(x,D)]$. Le calcul symbolique permet alors de montrer que $b(x,D)^2 = a(x,D) + c(x,D)$ où $c(x,D)$ est dans $L^{o,o}_{\Psi,\psi}$.

§ 2. RESOLUBILITE LOCALE

La seconde application du calcul symbolique dans les classes $S^{M,m}_{\Phi,\varphi}$ est une nouvelle démonstration de la suffisance de la condition (P) de L. Nirenberg, F. Trèves pour la résolubilité locale des opérateurs de type principal. Pour une présentation détaillée de cette question, nous renvoyons à [6] et à sa bibliographie. On peut montrer, que cette étude se ramène, après localisation, et usage de transformations canoniques, à l'étude d'un opérateur pseudo-différentiel du premier ordre du type suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} - p(t,x,D_x) \;;\quad t \in [-1,+1],\ x \in \mathbb{R}^n$$

où $p(t,x,\xi)$ est un symbole réel dans $C^\infty([-1,+1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ vérifiant :

(2.1) $\forall (j,\alpha,\beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n,\ \exists C_{j,\alpha,\beta} \geq 0,\ \forall (x,t,\xi) \in (\mathbb{R}^n \times [-1,+1] \times \mathbb{R}^n)$

$$|D_t^j\, D_x^\alpha\, D_\xi^\beta\, p(t,x,\xi)| \leq C_{j,\alpha,\beta} <\xi>^{1-|\beta|}$$

(2.2) Pour (x,ξ) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, le signe de $p(t,x,\xi)$ est constant lorsque t varie dans $[-1,+1]$.

On ramème alors l'étude de la résolubilité locale à la démonstration du lemme suivant :

Lemme N.T : Soit $p(t,x,\xi)$ un symbole vérifiant (2.1) et (2.2), alors l'opérateur correspondant $p_t(x,D)$ peut être écrit sous la forme :

$$p_t(x,D) = A_t.B + C_t$$

où B est un opérateur self-adjoint non borné dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, A_t est un opérateur self-adjoint, borné, non négatif et où $[A_t,B]$, $[[A_t,B],B]$, C_t sont des opérateurs bornés dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

On déduit, en effet, d'un théorème sur les opérateurs : $\frac{\partial}{\partial t} - A_tB - C_t$,une inégalité L^2 qui permet de conclure.

L'idée la plus simple pour démontrer ce lemme serait d'écrir le symbole $p(t,x,\xi)$ sous la forme ♦ : $p_t(x,\xi) = a_t . b + c_t$ où a_t, b, c_t sont des symboles classiques d'ordre 0, 1 ,0 respectivement et où $a_t \geq 0$. Si p_t pouvait s'écrire ainsi, la conclusion du lemme se déduirait immédiatement du calcul symbolique classique et de l'inégalité de Garding. C'est ce qu'ont fait L. Nirenberg et F. Trèves dans le cas où $p_t(x,\xi)$ est un symbole réel analytique. Malheureusement, cette décomposition n'est pas possible dans le cas de C^∞.

Il est cependant possible de montrer le lemme suivant :

Lemme N.T' : Soit $p_t(x,\xi)$ vérifiant (2.1) et (2.2), alors il existe un couple de fonctions poids (Φ,φ) tel que $p_t(x,\xi)$ peut s'écrire sous la forme :

$$p_t = a_t\, b + c_t \ , \quad \text{avec } a_t \geq 0,\ a_t \in S^{0,0}_{\Phi,\varphi},\ b \in S^{1,1}_{\Phi,\varphi} \text{ et } c_t \in S^{0,0}_{\Phi,\varphi}$$

Il est clair que (NT)', grâce à l'inégalité de Garding démontrée plus haut, et le calcul symbolique dans les classes $S^{M,m}_{\Phi,\varphi}$, implique (NT).

§ 3. DEMONSTRATION DU LEMME (NT)'

On considère les trois quantités suivantes qui joueront un rôle important dans la suite :

$$\alpha(x,\xi) = \sup_t \{ |\nabla_\xi p_t(x,\xi)| + \langle\xi\rangle^{-1} |\nabla_x p_t(x,\xi)| \}$$

$$\beta(x,\xi) = \sup_{\delta\in[0,1]} \{ p_t(y,\eta) \text{ a un signe constant dans le domaine défini par : } -1 \leq t \leq 1,\ |y-x| + \langle\xi\rangle^{-1}|\eta-\xi| \leq \delta \}$$

$\tau(x,\xi)$ est un point de $[-1,+1]$ dépendant mesurablement de (x,ξ) tel que :

$$\left(|\nabla_\xi p_t(x,\xi)| + \langle\xi\rangle^{-1} |\nabla_x p_t(x,\xi)| \right)_{t=\tau(x,\xi)} \geq \frac{\alpha(x,\xi)}{2}$$

3.1 Remarques préliminaires : Pour donner une justification intuitive à la démonstration dans le cas général, on peut considérer les cas extrèmes suivants :

♦ On note dans la suite $p_t(x,\xi) = p(t,x,\xi)$.

♦ S'il existe $c > 0$, telle que $\alpha(x,\xi) > c$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on peut prendre "moralement": $b(x,\xi) = p_{\tau(x,\xi)}(x,\xi)$. En fait, on doit prendre une régularisation de p_τ qui peut être définie de la manière suivante :

$$b(x,\xi) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \psi(x-y, \frac{\xi-\eta}{<\eta>}) <\eta>^{-n} p_{\tau(y,\eta)}(x,\xi)\, dy\, d\eta$$

où $\psi(x,\xi)$ désigne une fonction C^∞ à support compact dans : $|x| < c_1, |\xi| < c_1$, et égale à 1 sur $|x| \le c_2, |\xi| \le c_2$, c_1 étant choisi suffisamment petit.

Le choix de $\tau(x,\xi)$ et l'hypothèse $\alpha(x,\xi) > 0$ entraînent que :

$$b(x,\xi) = 0 \Longrightarrow p_{\tau(x,\xi)} = 0 \Longrightarrow p_t(x,\xi) = 0, \ \forall\, t \in [-1,+1]$$

et que la variété des zéros de $b(x,\xi)$ est une bonne sous variété. $\frac{p_t(x,\xi)}{b(x,\xi)}$ sera alors un symbole classique dans S^0, non négatif.

♦ Si $p_t(x,\xi)$ est de signe constant dans $\mathbb{R}^n$, par exemple positif, on prend "moralement" :$b(x,\xi) = <\xi>$ (en fait on régularise comme dans le cas précédent).

♦ Lorsque localement, on n'est pas dans les deux cas précédents, on ne sait pas factoriser. On va éliminer ce cas là, en montrant qu'il peut être absorbé dans c_t.

3.2 Introduction du couple de fonctions de poids :

on pose
$$\begin{cases} \varphi(x,\xi) = \alpha(x,\xi) + \beta(x,\xi) + <\xi>^{-1/2} \\ \Phi(x,\xi) = <\xi>\, \varphi(x,\xi) \end{cases}$$

(φ,Φ) est un couple de fonctions poids (seul le point (iv) est délicat à montrer) choisi pour les raisons suivantes :

♦ $p_t(x,\xi)$ est dans $S^{1,1}_{\Phi,\varphi}$ uniformément en $t \in [-1,+1]$

♦ On veut qu'en tronquant $p_t(x,\xi)$ convenablement, on puisse se ramener (modulo $S^{0,0}_{\Phi,\varphi}$) à une fonction factorisable.

Or on remarque que, si C est une constante suffisamment grande :

$$\{\Phi.\varphi > C\} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha(x,\xi) + \beta(x,\xi) \neq 0 \\ \text{et} \quad \alpha(x,\xi) + \beta(x,\xi) < \varphi(x,\xi) < (1+\frac{1}{\sqrt{C-1}})(\alpha(x,\xi)+\beta(x,\xi)) \end{cases}\}$$

Soit (Φ^*,φ^*) un couple équivalent à (Φ,φ) vérifiant (iv)', alors, si $\theta(t)$ est une fonction C^∞ non négative sur $[0,+\infty[$, égale à zéro pour $t \leq C_1$ et égale à 1 pour $t \geq C_2$, on a les propriétés suivantes :

$$\theta(\Phi^*\varphi^*)p_t \in S^{1,1}_{\Phi,\varphi} \quad ; \quad (1-\theta(\Phi^*.\varphi^*))p_t \in S^{o,o}_{\Phi,\varphi}$$

On peut donc dans la suite supposer que $\Phi\varphi > C$.

3.3 <u>Esquisse de la démonstration dans le cas général</u> : c_o désignera une constante qui sera déterminée au cours de la démonstration. On désigne par B^+ (resp.B^-) l'ensemble des (x,ξ) vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall(t,y,\eta) \in [-1,+1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, tel que : $\varphi^{-1}(x,\xi)|y-x| + \Phi^{-1}(x,\xi)|\eta-\xi| \leq c_o$

$$p_t(y,\eta) \geq 0 \quad (\text{resp. } p_t(y,\eta) \leq 0)$$

- $\exists(t_o,y_o,\eta_o) \in [-1,+1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, tel que :

$$\varphi^{-1}(x,\xi)|y_o-x| + \Phi^{-1}(x,\xi)|\eta_o-\xi| < c_o/2$$

$$p_{t_o}(y_o,\eta_o) > 0 \quad (\text{resp. } p_{t_o}(y_o,\eta_o) < 0)$$

On a clairement $B_+ \cap B_- = \emptyset$. On désigne par $B^+(x,\xi)$ (resp. $B^-(x,\xi)$) l'ensemble :

$$\{(y,\eta) \in B^+ \quad (\text{resp. } B^-);\ (\frac{x-y}{\varphi(y,\eta)}, \frac{\xi-\eta}{\Phi(y,\eta)}) \in \operatorname{supp}\psi\}$$

ψ a été définie en 3.1.

On pose :

$$b_1(x,\xi) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \psi(\frac{x-y}{\varphi(y,\eta)}, \frac{\xi-\eta}{\Phi(y,\eta)})\ \varphi^{-n}(y,\eta).\Phi^{-n}(y,\eta)p_{\tau(y,\eta)}(x,\xi)\,dy.d\eta$$

$$b_2(x,\xi) = \iint_{B_+} \psi(\frac{x-y}{\varphi(y,\eta)}, \frac{\xi-\eta}{\Phi(y,\eta)})\varphi^{1-n}(y,\eta).\ \Phi^{1-n}(y,\eta)\,dy.d\eta$$

$$- \iint_{B_-} \psi(\frac{x-y}{\varphi(y,\eta)}, \frac{\xi-\eta}{\Phi(y,\eta)})\varphi^{1-n}(y,\eta).\ \Phi^{1-n}(y,\eta)\,dy.d\eta$$

$b(x,\xi) = b_1(x,\xi) + b_2(x,\xi)$

$G_a = \{(x,\xi)$, il existe un voisinage $U(x,\xi)$ de (x,ξ) pour lequel $p_t(y,\eta)$ est nul pour tout t dans $[-1,+1]$, tout (y,η) dans $U(x,\xi)\}$

$G_b = \{(x,\xi)\ ;\ \Phi(x,\xi).\varphi(x,\xi) \leq C\}$

<u>Lemme 3.1</u> : On suppose que $(x,\xi) \notin G_b$, alors, si (c_o, c_1, C) sont choisies convenablement :

i) $b(x,\xi) \in S^{1,1}_{\Phi,\varphi}$

ii) S'il existe t_o, tel que $p_{t_o}(x,\xi) > 0$, alors $b(x,\xi) > 0$

iii) S'il existe t_o, tel que $p_{t_o}(x,\xi) < 0$, alors $b(x,\xi) < 0$

Il résulte du fait que : $\varphi(y,\eta) \sim \varphi(x,\xi)$, $\Phi(y,\eta) \sim \Phi(x,\xi)$ lorsque $\left(\frac{x-y}{\varphi(y,\eta)}, \frac{\xi-\eta}{\Phi(y,\eta)}\right)$ est dans le support de ψ et de ce que $p_t(x,\xi)$ est dans $S^{1,1}_{\Phi,\varphi}$, que $b(x,\xi)$ est dans $S^{1,1}_{\Phi,\varphi}$.

Montrons le point (ii). Si $\alpha(x,\xi) > 0$, on montre que $B_-(x,\xi)$ est vide. On a donc $b(x,\xi) \geq b_1(x,\xi)$. La démonstration est la même que celle donnée en 3.1. Lorsque $\alpha(x,\xi) = 0$, $\frac{\varphi(x,\xi)}{\beta(x,\xi)}$ est très proche de 1 : on montre que $B_-(x,\xi)$ est vide et que $B_+(x,\xi)$ est non vide. Par conséquent, on a :

$$b(x,\xi) \geq b_2(x,\xi) > 0$$

On voit dans la démonstration de ce lemme, comment on s'est ramené localement aux deux cas particuliers considérés en 3.1.

<u>Lemme 3.2</u> : On suppose que $(x,\xi) \notin G_b \cup G_a$, alors si (c_o, c_1, C) sont choisies convenablement, on a l'estimation suivante :

$$\forall\, (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n,\quad \exists C_{\alpha,\beta} \geq 0\ ;\ \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{G_a \cup G_b\}$$

$$\left| D^\alpha_x D^\beta_\xi \left(\frac{p_t(x,\xi)}{b(x,\xi)}\right)\right| \leq C_{\alpha,\beta}\, \Phi^{-|\beta|}(x,\xi).\varphi^{-|\alpha|}(x,\xi)$$

En un point (x,ξ) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{G_a \cup G_b\}$, on distingue les trois cas suivants :

(1) $\forall\, t \in [-1,+1],\ \forall (y,\eta)\ ;\ \varphi^{-1}(x,\xi)|y-x| + \Phi^{-1}(x,\xi)|\eta-\xi| \leq 2c_0 : p_t(y,\eta) \geq 0$

(2) $\forall\, t \in [-1,+1],\ \forall (y,\eta)\ ;\ \varphi^{-1}(x,\xi)|y-x| + \Phi^{-1}(x,\xi)|\eta-\xi| \leq 2c_0 : p_t(y,\eta) \leq 0$

(3) $p_t(y,\eta)$ change de signe dans $\{-1 \leq t \leq 1\ ;\ \varphi^{-1}(x,\xi)|y-x| + \Phi^{-1}(x,\xi)|\eta-\xi| \leq 2c_0\}$

Dans le cas (1), on montre (en utilisant $(x,\xi) \notin G_a$) qu'il existe une constante c_3, telle que pour tout (x,ξ) vérifiant (1), on ait :

$$b(x,\xi) \geq b_2(x,\xi) \geq c_3\, \Phi(x,\xi)\, \varphi(x,\xi)$$

Les estimations se déduisent alors facilement de cette inégalité.

Le cas (2) se traite de la même manière.

Dans le cas (3), on montre que, si c_0 est choisi assez petit, il existe une constante c_4, telle que, pour tout (x,ξ) vérifiant (3), on ait :

$$|\nabla_\xi b_1(x,\xi)| + \langle\xi\rangle^{-1} |\nabla_x b_1(x,\xi)| \geq c_4\, \varphi(x,\xi).$$

On peut alors obtenir, grâce à cette inégalité et aux estimations sur p_t, b_1, b, des estimations sur $\frac{p_t}{b_1}$, $\frac{b}{b_1}$. On doit vérifier auparavant que :

$$b_1(x,\xi) = 0 \Longrightarrow b(x,\xi) \neq 0\ ;\quad p_t(x,\xi) = 0$$

Lorsque (3) est vérifié et que (x,ξ) n'est pas dans $G_a \cup G_b$. On en déduit alors les estimations sur $\frac{p_t}{b}$ en utilisant $\frac{b}{b_1} \geq 1$.

Nous sommes en mesure de terminer la démonstration du lemme (VI)'.

Si C_1, C_2 sont choisis suffisamment grands, on déduit du lemme 3.2 et d'une remarque antérieure (§ 3.2) l'estimation suivante :

$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n,\ \exists C_{\alpha,\beta} > 0\ ;\ \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus G_a :$$

$$\left| D_x^\alpha D_\xi^\beta \frac{a(\xi^*, \varphi^*)}{b(x,\xi)} \cdot p_t(x,\xi) \right| \leq C_{\alpha,\beta}\, \Phi^{-|\beta|}(x,\xi)\, \varphi^{-|\alpha|}(x,\xi)$$

On remarque par ailleurs que si (x,ξ) est à la frontière de G_a et en dehors de G_b, $p_t(x,\xi) = 0$ et $b(x,\xi) \neq 0$. Ceci légitime la définition suivante de $a_t(x,\xi)$.

$$a_t(x,\xi) = \frac{\theta(\Phi^* . \varphi^*)}{b(x,\xi)} . p_t(x,\xi) \qquad \text{si } (x,\xi) \notin G_a$$

$$a_t(x,\xi) = 0 \qquad \text{si } (x,\xi) \in G_a$$

L'estimation ci-dessus et le lemme (3.1) montrent que $a_t(x,\xi)$ est un symbole non négatif dans $S^{o,o}_{\Phi,\varphi}$ et on vérifie que $p_t - a_t b$ est dans $S^{o,o}_{\Phi,\varphi}$.

c. q. f. d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Beals et C. Feffermann : On local solvability of linear partial differential equations. Annals of Mathematics Vol. 97 n° 3 (1973) p. 482-498.

[2] R. Beals et C. Feffermann : Spatially Inhomogeneous pseudo-differential operators (à paraître).

[3] R. Beals : Spatially Inhomogeneous Pseudo-differential Operators II, (à paraître).

[4] L. Boutet de Monvel : Opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques doubles. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1973-74, Exposés 1-2.

[5] A. P. Calderon et R. Vaillancourt : A class of bounded pseudo-differential Operators, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. A. (1972).

[6] F. Trèves : Résolubilité locale des équations aux dérivées partielles linéaires, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1970-71, annexe 1.