SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. C. GUILLOT

Quelques résultats récents en scattering

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 4, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974____A3_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

QUELQUES RESULTATS RECENTS EN SCATTERING

par J. C. GUILLOT

Exposé N° IV

7 Novembre 1973

§ 0. INTRODUCTION

Mon intention est d'exposer les résultats que l'on veut atteindre en scattering, à travers quelques résultats récents. Je me suis, pour cela, limité volontairement aux propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + q(x)$ dans $\mathbb{R}^n$ ou dans un ouvert non borné de $\mathbb{R}^n$. C'est un point de vue particulier et beaucoup de questions importantes ne sont pas évoquées. Je signale, néanmoins, qu'à la suite du Congrès qui s'est tenu à Denver en Juin 1973, un livre sera publié en Janvier 1974 qui rendra compte de toutes les contributions récentes.

§ 1. La théorie du scattering étudie le spectre d'opérateurs autoadjoints dans un espace de Hilbert, aussi devons-nous rappeler un certain nombre de définitions.

Soit H un opérateur autoadjoint dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ qu'on suppose séparable.

Soit D(H) le domaine de définition de cet opérateur. D(H) est dense dans $\mathcal{H}$. Le théorème spectral associe à cet opérateur d'une manière unique une famille spectrale, c'est-à-dire, une application de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des projecteurs orthogonaux de $\mathcal{H}$ qu'on notera :

$$\lambda \longmapsto E(\lambda)$$

et vérifient les propriétés suivantes :

1) $\lambda \longmapsto E(\lambda)$ est croissante : $E(\lambda_1) \leq E(\lambda_2)$ si $\lambda_1 < \lambda_2$.

2) $\operatorname{s-lim}_{\lambda \to -\infty} E(\lambda) = 0$ et $\operatorname{s-lim}_{\lambda \to +\infty} E(\lambda) = I$.

3) $\operatorname{s-lim}_{\epsilon \downarrow 0} E(\lambda + \varepsilon) = E(\lambda)$

on a $H = \int \lambda \, d\, E(\lambda)$. A cette famille spectrale est associée une mesure spectrale qu'on notera aussi E(S) où $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est un borélien de $\mathbb{R}$. En particulier on a $E((\lambda_1,\lambda_2)) = E(\lambda_2) - E(\lambda_1)$.

Le support de la mesure spectrale E(S) est le spectre de H qu'on notera $\sigma(H)$. On notera $\rho(H)$ l'ensemble résolvant de H.

Habituellement on utilise la résolvante de H qu'on notera $R_o(Z) = (H - z)^{-1}$ pour définir les notions de spectres ponctuel et continu d'un opérateur autoadjoint. En particulier tout point de discontinuité de la famille spectrale est une valeur propre de H et l'ensemble des valeurs propres est par définition le spectre ponctuel et le spectre continu est l'ensemble de tous les points où cette même famille est continue et au voisinage desquels elle est strictement croissante. Nous allons ici employer une définition différente de spectre continu et en particulier introduire d'autres notions de spectre qui sont particulièrement utiles.

Il y a plusieurs moyens de décomposer le spectre d'un opérateur autoadjoint :

1) La plus générale est celle qui fait intervenir la notion de spectre essentiel qu'on notera $\sigma_{ess}(H)$. Par définition $\sigma_{ess}(H) = \bigcap_{A \in \mathcal{J}} \sigma(A + H)$ où $\mathcal{J}$ désigne l'ensemble des opérateurs compacts sur $\mathcal{H}$. C'est un fermé et $\sigma_{ess}(H) \subset \sigma(H)$; le complémentaire de $\sigma_{ess}(H)$ dans $\sigma(H)$ est constitué de valeurs propres <u>isolées</u> et de multiplicité finie dont les points d'accumulation appartiennent à $\sigma_{ess}(H)$.

L'intérêt du spectre essentiel est qu'il est très stable par perturbation. En particulier si $R_1(z)$ et $R_2(z)$ sont les résolvantes de deux opérateurs autoadjoints H_1 et H_2 et si $R_1(z) - R_2(z) \in \mathcal{J}$ pour <u>un</u> $z \in \rho(H_1) \cap \rho(H_2)$ alors $\sigma_{ess}(H_1) = \sigma_{ess}(H_2)$.

1) On définit simplement le spectre ponctuel de H (noté $\sigma_p(H)$) comme l'ensemble des valeurs propres, il est au plus dénombrable. Soit $\lambda_n \in \sigma_p(H)$ alors le sous-espace propre est $H_n(\lambda_n) = (E(\lambda_n) - E(\lambda_n - 0))\mathcal{H}$. Les sous espaces propres sont orthogonaux deux à deux. Soit $\mathcal{H}_p = \oplus_{\lambda_n} H_n(\lambda_n)$ alors si $\mathcal{H}_p = \mathcal{H}$ on dit que H a un spectre purement ponctuel mais si $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_p = \mathcal{H}_c \neq \{0\}$, alors $\mathcal{H}_p$ et $\mathcal{H}_c$ réduisent H et par définition

$$\sigma(H/\mathcal{H}_c) = \sigma_c(H), \text{le spectre continu de H.}$$

<u>Remarque</u> : Si $\mathcal{H}_p = \{0\}$ on dit que H a un spectre purement continu $\sigma_c(H) \subseteq \sigma_{ess}(H)$. Il faut prendre garde au fait que $\sigma_p(H)$ et $\sigma_c(H)$ ne

constituent pas une partition de $\sigma(H)$. En général on n'a ni $\sigma(H) = \sigma_p(H) \cup \sigma_c(H)$ ni $\sigma_p(H) \cap \sigma_c(H) = \emptyset$; on pourra en particulier parler de valeurs propres plongées dans le spectre continu.

2) On définit maintenant l'a notion fondamentale de spectre absolument continu de H, noté $\sigma_{ac}(H)$. Pour cela on introduit une autre décomposition de H en somme directe orthogonale différente de la précédente.

Soit $\mathcal{H}_{ac} = \{u \in \mathcal{H};\ S \to (E(S)u,u)$ soit abs cont. par rapport à la mesure de Lebesgue$\}$

$\mathcal{H}_{ac}$ est un sous espace fermé de H qui réduit l'opérateur initial. De plus $\mathcal{H}_{ac} \subset \mathcal{H}_c$. On définit alors $\sigma_{ac}(H) = \sigma(H/\mathcal{H}_{ac})$, le spectre absolument continu de H. Alors $\sigma_{ac}(H) \subset \sigma_c(H)$.

Si $\mathcal{H}_{ac} = \mathcal{H}$ on dit que H a spectre purement absolument continu l'ensemble canonique d'un tel opérateur est $-\Delta$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ défini sur $H^2(\mathbb{R}^n)$ défini sur $H^2(\mathbb{R}^n)$ dont le spectre est égal à $[0,\infty[$.

En général $\mathcal{H}_s = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_{ac} \neq \{0\}$ et il réduit H. On définit alors $\sigma_s(H) = \sigma(H/\mathcal{H}_s)$, le spectre singulier de H. On a $\mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}_S$. On définit aussi le sous espace $\mathcal{H}_{cs} = \mathcal{H}_c \ominus \mathcal{H}_{ac}$ on a donc la décomposition suivante :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_{cs} \oplus \mathcal{H}_{ac} = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_c = \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}_{ac} .$$

$\mathcal{H}_{cs}$ réduit H et on définit $\sigma_{cs}(H) = \sigma(H/\mathcal{H}_{cs})$ le spectre continu singulier. En particulier $\sigma_{cs}(H) \subset \sigma_c(H)$.

L'intérêt de cette approche est que σ_c, σ_{ac} et σ_{cs} sont des spectres de restrictions convenables de l'opérateur H, donc en particulier des spectres d'opérateurs autoadjoints, par opposition à l'approche habituelle où en général le spectre continu n'est pas un fermé. Par contre $\sigma_p(H)$, σ_c, σ_{ac} et σ_{cs} ne définissent pas une partition de spectre.

La décomposition en somme directe précédente de $\mathcal{H}$ est équivalente à la décomposition de Lebesgue de la mesure spectrale et on peut procéder d'une manière équivalente en introduisant à priori une décomposition de Lebesgue de la mesure spectrale et en déduisant la décomposition en somme directe.

§ 2. C'est un fait quasiment expérimental que les spectres essentiel et absolument continu d'un opérateur autoadjoint sont stables lorsqu'on le perturbe par une grande classe de perturbations alors que le spectre continu ne l'est pas. La théorie du Scattering est concernée en partie par la recherche des conditions de stabilité du spectre absolument continu d'un opérateur autoadjoint lorsqu'on le perturbe. C'est une propriété beaucoup plus forte que celle du spectre essentiel et par suite plus difficile à démontrer. En fait, durant ces dernières années les travaux se sont concentrés sur l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + q$ traité comme perturbation du Laplacien $-\Delta$. Plus précisément, le point de départ est un théorème de type suivant :

<u>Théorème</u> : Soit $q(.)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles et mesurable vérifiant la condition suivante, dite de Stummel :

$$\sup_{x\in \mathbb{R}^n} \int_{|x-y|\leq 1} \frac{|q(y)|^2}{|x-y|^{\nu}}\, dy < \infty \quad \text{pour } \nu > n-4$$

et

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_{|x-y|\leq 1} \frac{|q(y)|^2}{|x-y|^{\nu}}\, dy = 0$$

Alors

(i) L'opérateur $H = -\Delta + q$ est un opérateur autoadjoint dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ de domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$

(ii) $\sigma(H)$ est borné inférieurement ; de plus

$$\sigma_{ess}(-\Delta) = [0, +\infty[= \sigma_{ess}(H).$$

En particulier si q est une fonction suffisamment régulière qui vérifie en outre

$$q(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{\beta}}\right) \text{ avec } \beta > 0 \text{ lorsque } |x| \geq R$$

alors $q(.)$ vérifie la condition de Stummel.

Mais quelle information précise sur le spectre de H peut on déduire de l'assertion : $\sigma_{ess}(H) = [0, +\infty[$? Essentiellement une information sur la partie du spectre qui n'est pas contenu dans $[0, +\infty[$; à savoir : $\sigma(H) \cap (-\infty, 0[$ est constitué uniquement de valeurs propres isolées (dans $\sigma(H)$) de multiplicité finie et dont le seul point d'accumulation possible est $\{0\}$. Par contre on ne peut rien dire de précis sur la structure du spectre contenu dans $[0,+\infty[$. La théorie du scattering permet dans certains cas de préciser la nature du spectre essentiel en montrant que le spectre absolument continu est aussi stable. Plus précisément les problèmes que l'on cherche à résoudre dans ce cas se résument dans le programme suivant :

<u>Programme de T. Ikebe</u> : Trouver des conditions sur q(.) telles que

(I) a) $\sigma_{ac}(H) = \sigma_{ac}(-\Delta) = [0, +\infty[$, et plus particulièrement

- que peut-on dire sur l'ensemble des valeurs propres plongées dans le spectre continu ?
- que peut-on dire sur $\sigma_{cs}(H)$?

b) Montrer l'existence et la complétude des opérateurs d'onde

$$W_{\pm} = \underset{t \to \pm\infty}{S - \lim}\, e^{itH} e^{it\Delta}$$

(II) Construire deux développements en fonctions propres généralisés pour H_{ac}, engendrés par deux systèmes de fonctions propres de l'opérateur de Schrödinger $(\varphi_{\pm}(x;k))_{k \in \mathbb{R}^n}$ tels que

$$(W_{\pm} f)(x) = \mathrm{L.i.m} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\pm}(x;k)\, \hat{f}_0(k)\, dk \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

où $\hat{f}_0$ est la transformée de Fourier usuelle de $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

En ce qui concerne la partie I , des résultats complets ont été obtenus par S. Agmon, Birman, T. Ikebe, T. Kato, S. T. Kuroda, P. A. Rejto et M. Schechter lorsque $q(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ $\varepsilon > 0$ et $|x| \geq R$ et par T. Ikebe, P. Alshom et G. Schmidt, T. Kato et S. T. Kuroda en ce qui concerne la partie II . Mais les résultats les plus récents ont été obtenus par S. Agmon, [2], S. T. Kiroda [3] et M. Schechter [4] et concernent les opérateurs elliptiques. Plus précisément, considérons l'opérateur différentiel formel suivant :

$$Hu = \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} D^\alpha(a^{(1)}_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}(x)D^\beta u \quad (D_j = i\,\frac{\partial}{\partial x_j})$$

où α et β sont deux multiindices et où les constantes $a^{(1)}_{\alpha\beta}$ et les fonctions $a_{\alpha\beta}(x)$ vérifient les conditions suivantes :

(1) $a^{(1)}_{\alpha\beta} = \overline{a^{(1)}_{\beta\alpha}}$ et il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a^{(1)}_{\alpha\beta}\xi^{\alpha+\beta} \ge C_1|\xi|^{2m} \quad \xi\in \mathbb{R}$$

(2) Les fonctions $a_{\alpha\beta}(.)$ définies sur $\mathbb{R}^n$ sont bornées et mesurables. Toutes les fonctions $a_{\alpha\beta}(.)$ avec $|\alpha| = |\beta| = m$ sont uniformément continues sur $\mathbb{R}^n$.

(3) $a_{\alpha\beta}(x) = \overline{a_{\beta\alpha}(x)}$

(4) Il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \{a^{(1)}_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}(x)\}\xi^{\alpha+\beta} \ge C_2|\xi|^{2m} \quad x\in\mathbb{R}^n,\ \xi\in\mathbb{R}^n$$

(5) $\exists\,\delta > 1$ et $C_3 > 0$ $|a_{\alpha\beta}(x)| \le \dfrac{C_3}{(1+|x|)^\delta}$ $\forall\alpha,\beta$ avec $|\alpha|,|\beta| \le m$ et $\forall x\in\mathbb{R}^n$.

Soit $P_1(\xi)$ le polynôme suivant

$$P_1(\xi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} a^{(1)}_{\alpha\beta}\xi^{\alpha+\beta} \qquad \xi\in\mathbb{R}^n$$

on associe à $P_1(.)$ l'opérateur autoadjoint, note H_1, dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ de domaine $H^{2m}(\mathbb{R}^n)$ et défini par

$$H_1u = P_1(D)u\ , \qquad u\in H^{2m}(\mathbb{R}^n)$$

De plus $\lambda\in\mathbb{R}$ est une valeur critique du polynôme P_1 s'il existe $\xi\in\mathbb{R}^n$ tel que $P_1(\xi) = \lambda$ et grad $P_1(\xi) = 0$. S. Agmon a montré que l'ensemble e_1 des valeurs critiques est un ensemble fini. Par suite, si on pose $\lambda_{min} = \inf\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n} P_1(\xi)$ on a $\sigma(H_1) = [\lambda_{min},\infty[$ et le spectre de H_1 est absolument continu.

Maintenant à l'opérateur formel H on associe un opérateur autoadjoint, noté H_2, par la méthode de Friedrichs. Plus précisément, H_2 est l'opérateur autoadjoint de domaine $D(H_2)$ tel que

$$(H_2 u,v) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} ((a_{\alpha\beta}^{(1)} + a_{\alpha\beta}(x) D^{\beta} u, D^{\alpha} v)$$

$$u \in D(H_2) \quad , \qquad v \in H^m(\mathbb{R}^n)$$

On note $E_2(.)$ la famille spectrale associée à H_2.

S. T. Kuroda a alors démontré le théorème suivant :

<u>Théorème</u> : (i) $\sigma_{ess}(H_2) = [\lambda_{min},\infty[$

(ii) L'ensemble $\{\lambda_n\}$ de toutes les valeurs propres de H_2 dans $(\lambda_{min},\infty) - e_1$ n'a pas de point d'accumulation dans $(\lambda_{min},\infty) - e_1$. Chaque valeur propre λ_n est de multiplicité finie.

(iii) La restriction de H_2 au sous-espace $E_2((\lambda_{min},\infty) - (e_1 \cup \{_n\}))L^2(R^n)$ est unitairement équivalente à H_1. en particulier

$$\sigma_{ac}(H_2) = [\lambda_{min},\infty[$$

De plus les opérateurs d'onde

$$W_{\pm}(H_2,H_1) = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_2} e^{-itH_1}$$

existent et sont complets.

Récemment, M. Schechter [4] a amélioré certains des résultats obtenus par S. T. Kuroda et S. Agmon [2] a obtenu des résultats analogues par une approche différente.

§ 3. Par ailleurs on sait maintenant que ce sont les meilleurs résultats que l'on peut obtenir dans une certaine direction. Il n'est pas possible en effet d'améliorer la condition 5). Plus précisément, considérons l'opérateur autoadjoint H_o dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ suivant :

$$H_o = -\Delta - \frac{\alpha}{|x|} \quad x \in \mathbb{R}^3$$

$$D(H_o) = H^2(\mathbb{R}^3) \quad .$$

Cet exemple se distingue du précédent par le fait que le potentiel $q(x) = -\frac{\alpha}{|x|}$ ne vérifie plus la condition $|q(x)| \leq \frac{c}{|x|^{1+\varepsilon}}$ $\varepsilon > 0$ pour $|x|$ suffisamment grand. Il a été étudié du point de vue du scattering par J. Dollard [5]. Celui-ci a en effet montré que les opérateurs d'onde ordinaires

$$W_{\pm}(H_o, -\Delta) = \underset{t \to \pm\infty}{s - \lim}\, e^{itH_o}\, e^{it\Delta}$$

n'existent pas. Par contre il a montré que les opérateurs d'onde généralisés suivants :

$$W_{\pm}^{D}(H_o, -\Delta) = \underset{t \to \pm\infty}{s - \lim}\, e^{itH_o}\, e^{it\Delta}\, e^{\frac{i\,\epsilon(t)\alpha}{2(-\Delta)^{1/2}} \operatorname{Log}(-4|t|\Delta)}$$

où

$$\epsilon(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

existent et sont complets.

J. Dollard a montré de plus dans sa thèse qu'on pouvait associer à H_{oac} deux développements en fonctions propres, engendrés par deux systèmes $(\varphi_{\pm}^{c}(x;k))_{k \in \mathbb{R}^3}$ de telle sorte que l'on ait

$$(W_{\pm}^{D}(H_o, -\Delta) f)(x) = \text{L. i. m.} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_{\pm}^{c}(x;k) \hat{f}_o(k)\, dk \ ; \ f \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

où $\hat{f}_o$ est la transformée de Fourier ordinaire de $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

Aussi définit-on les potentiels à courte portée comme ceux vérifiant

$$|q(x)| \leq \frac{C}{|x|^{1+\varepsilon}} \qquad \varepsilon > 0 \text{ pour } |x| \text{ suffisamment grand}$$

et les potentiels à longue portée, comme ceux vérifiant

$$|q(x)| \leq \frac{C}{|x|^{\beta}} \qquad \beta > 0 \text{ pour } |x| \text{ suffisamment grand.}$$

Après le travail de J. Dollard, les recherches se sont orientées dans trois directions principales.

1. Obtenir les opérateurs d'onde généralisés pour tous les potentiels à longue portée et en démontrer l'existence .

Pour l'opérateur de Schrödinger, c'est un problème qui a été résolu par W. Amreim, P. Martin et B. Misra [6], V. S. Buslaev et V. B. Matveev [7], P. Alshom et T. Kato [8].

2. Obtenir directement des résultats concernant le spectre de l'opérateur de Schrödinger directement c'est-à-dire sans passer par l'existence et la complétude des opérateurs d'onde. Dans cette direction des résultats importants ont été obtenus par J. Aguilar et J. M. Combes [9], R. Lavine [10], T. Ikebe et Y. Saito [11].

J. Aguilar et J. M. Combes ont introduit des méthodes analytiques qui se sont révélées très utiles pour le problème à N corps. Mais peut-être les résultats les plus complets et les plus généraux pour l'opérateur de Schrödinger ont été obtenus par R. Lavine :

Soit q(x) une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles telle que

$$q(x) = q_1(x) + q_2(x)$$

où $q_1(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ avec $\lim\limits_{|x|\to\infty} q_1(x) = 0$ et

$$\left|\frac{\partial q(x)}{\partial r}\right| \leq \frac{C}{(1+r)^{\gamma}} \quad \text{avec } \gamma > 1 \quad r = |x|$$

et où $q_2(x) = \frac{1}{(1+r)^{\gamma}}(q_{2,p}(x) + q_{2,\infty}(x))$ avec $q_{2,p}(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p > \max(\frac{n}{2}; 1)$

$$q_{2,\infty}(x) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

On peut associer alors à l'opérateur $-\Delta + q(x)$ un opérateur autoadjoint H dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ par la méthode de Friedrichs et R. Lavine a montré que les valeurs propres positives de H sont de multiplicité finie et ne peuvent s'accumuler qu'à l'origine. De plus $\mathcal{H}_{cs}(H) = 0$ c'est-à-dire que nous avons la décomposition en somme directe suivante

$$\mathcal{H}_p(H) + \mathcal{H}_{ac}(H)$$

T. Ikebe et Y. Saito ont généralisé certains des résultats de R. Lavine a des opérateurs du type

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} + b_j(x)\right)^2 + q(x)$$

où $b_j(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $q(x)$ sont des potentiels à longue portée vérifiant certaines conditions.

3. Généraliser le programme complet d'Ikebe.

Des résultats dans cette direction ont été obtenus par V. Georgescu [13] et par J. C. Guillot et K. Zizi [12]. V. Georgescu a considéré le cas où le potentiel q(x) est à symétire sphérique.

En ce qui nous concerne, nous avons considéré des perturbations générales du potentiel coulombien. Plus précisément, nous avons considéré principalement les deux cas suivants

a) le problème dans $\mathbb{R}^n$: Considérons l'opérateur

$$H = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} + b_j(x)\right)^2 - \frac{\alpha}{|x|} + q(x) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^n) \ (n \geq 3)$$

où $b_j(x)$ et $q(x)$ sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles vérifiant certaines conditions. Définissons

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial b_j}{\partial x_j}(x) + b_j^2(x)\right) + q(x) \quad \text{avec } b_j(.) \in C^1(R^n)$$

On suppose alors que

$$(1+|x|)^a Q(x) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$$

$$(1+|x|)^a b_j(x) \in L^{p_{2,j}}(\mathbb{R}^n) \qquad 1 \leq j \leq n$$

avec $a > \frac{n}{2}$; $\mathrm{Max}(2,\frac{n}{2}) < p_1 < 2n$; $n < p_{2,j} < 2n$. Alors H est un opérateur autoadjoint dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ de domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$ pour lequel on peut développer une théorie complète en utilisant la théorie de factorisation de T. Kato et S. T. Kuroda [14].

b) Le problème extérieur : Soit Ω un domaine non borné de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière Γ est formée de deux variétés Γ_1 et Γ_2 de classe C^2, disjointes et compactes. Supposons que l'origine O appartient à l'intérieur du compact déterminé par Γ_2.

Soit ν la normale extérieure à Γ et soit $\sigma(x)$ une fonction höldérienne d'exposant s $(0 < s \leq 1)$. Soit $\rho(x) = (1+|x|)^{\frac{n+1+\varepsilon}{2}}$ avec $\varepsilon > 0$ fixé. Supposons que $\rho(x)\, q(x)$ soit une fonction définie sur $\Omega \cup \Gamma$ à valeurs réelles uniformément höldérienne d'exposant α $(0 < \alpha \leq s)$. Supposons que

$$\rho(x)\, q(x) \underset{|x| \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Soit H l'opérateur autoadjoint dans $L^2(\Omega)$ défini par $H_g = -\Delta g - \frac{\alpha}{|x|} g + qg$ et dont le domaine de définition est formé de toutes les fonctions $g \in H^2(\Omega)$ telles que

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} - \sigma(x)\right) g(x) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$g(x) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2$$

On peut alors en suivant la technique de N. Shenk et D. Thoe [15] construire des développements en fonctions propres pour H et étudier les opérateurs d'onde associés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Kato : Perturbation theory for linear operators, Springer 1966.

[2] S. Agmon : Spectral properties of Schrödinger operators, Actes du Congrès Intern. Math. 1970, Tome 2, p.679-683.

[3] S. T. Kuroda : Scattering theory for differential operators I, II Journal Math. Soc. Japan 25 (1973) p.75-104 ; p.222-234.

[4] M. Schechter : Scattering theory for elliptic operators of arbitrary order (Preprint).

[5] J. Dollard : Asymptotic convergence and the Coulomb interaction J. Math. Phys. 5 (1964) p. 729-738.

[6] W. Amreim, P. Martin et B. Misra : On the asymptotic condition of Scattering theory. Helv. Phys. Acta 43 (1970) p.313-344.

[7] V. S. Buslaev et V. B. Matveev : Wave operators for the Scattering equation with a slowly decreasing potential. Teoreticheskaya i Matematicheskaya 2 (1970) p.367-376. Traduction anglaise : Theo. Math. Phys. 2 (1970) p.266-274.

[8] P. Alshom et T. Kato : Scattering with long range potentials, Preprint, 1971.

[9] J. Aguilar et J. M. Combes : A classe of analytic perturbations for Schrödinger hamiltonians.I. The one body problem , Comm. Math. Phys. (1971) p.269-272.

[10] R. Lavine : Absolute continuity of positive spectrum for Schrödinger operators with long range potentials. J. of Funct. Anal. 12 (1973) p.30.

[11] Ikebe-Saito : J. Math. Kyoto University, t.12, p.513 (1972).

[12] J. C. Guillot et K. Zizi : Exposé à la conférence de Denver (Juin 73); sera publié en Janvier 74. J. C. Guillot, C. R. Acad. Sc. t.277 p.453 (1973) et K. Zizi, C. R. Acad. Sc. t.277 p.513 et 591 (1973).

[13] V. Georgescu : Exposé de W. Amreim à la conférence de Denver (Juin 73)

[14] T. Kato et S. T. Kuroda : Theory of simple Scattering and eigenfunctions expensions. Functional Analysis and related topics. Springer (1970).

[15] N. Shenk et D. Thoe : a) Outgoing solutions of $(-\Delta + q - k^2)u = f$ in an exterior domain J. Math. Anal. and App. 31 (1970) p.81.

b) Eigenfunction expansions and Scattering theory for perturbations of $-\Delta$. J. Math. Anal. and Appl. 36 (1971) p. 313.