

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MALGRANGE

**Sur les polynômes de I. N. Bernstein**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1973-1974), exp. n° 20,  
p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1973-1974\\_\\_\\_\\_A19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974____A19_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE  
CENTRE DE MATHÉMATIQUES  
*17, rue Descartes*  
*75230 Paris Cedex 05*

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

SUR LES POLYNOMES DE I. N. BERNSTEIN

par B. MALGRANGE

Exposé N° XX

10 Avril 1974



## SUR LES POLYNOMES DE I. N. BERNSTEIN

B. Malgrange

1. INTRODUCTION

Dans [1], I. N. Bernstein a démontré le résultat suivant :

Soit  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ , et  $s$  une indéterminée ; il existe un polynôme  $B \in \mathbb{C}[s]$  et un opérateur différentiel  $P(s, x, D_x)$  à coefficients polynomiaux en  $s$  et  $x$  tel qu'on ait l'identité  $P(s, x, D_x) f^s = B(s) f^{s-1}$  (le premier membre de cette identité est défini de la manière qu'on pense, avec  $\frac{\partial}{\partial x_i} f^s = s \frac{\partial f}{\partial x_i} f^{s-1}$  etc.). Il est visible que l'ensemble des  $B \in \mathbb{C}[s]$  pour lesquels une telle identité existe est un idéal ; nous noterons  $b$  un générateur de cet idéal, par exemple celui dont le coefficient dominant est égal à 1 et nous l'appellerons "le polynôme de Bernstein attaché à  $f$ ". Notons aussi que, si  $a$  est un point de  $\mathbb{C}^{n+1}$ , avec  $f(a) = 0$ , on pourrait aussi définir le "polynôme de Bernstein local  $b_a$  attaché à  $f$ ", de la même manière, en considérant les opérateurs différentiels  $P(s, x, D_x)$  à coefficients analytiques en  $x$  au voisinage de  $a$ , et polynomiaux en  $s$  ; évidemment, pour tout  $a$ ,  $b_a$  divise  $b$  ; si  $f$  est non singulière en  $a$ , on a  $b_a(s) = s$  dans le cas général, en faisant  $s = 0$ , on voit qu'on a  $b(0) = 0$  ; on posera dans la suite  $b(s) = s\tilde{b}(s)$ .

Des exemples, qui m'ont été montrés par M. Sato (voir à ce propos [7] et [9]) suggèrent que les zéros de  $b$  sont rationnels, et sont liés étroitement à la monodromie de l'application  $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ . Nous nous proposons de démontrer un résultat partiel dans ce sens ; le même résultat devrait aussi être vrai pour les "polynômes de Bernstein locaux" ; il suffirait pour cela d'utiliser la même démonstration, sous réserve d'avoir à sa disposition un "théorème de régularité local" qui est très probablement vrai, encore qu'il

ne se trouve pas dans la littérature (ce résultat est bien connu si  $f$  a une singularité isolée en  $a$  ; dans le cas général, H. Hamm m'a signalé en avoir une démonstration, non encore publiée). Cependant, le résultat que nous obtenons est très incomplet : divers exemples semblent en effet suggérer que dans les zéros de  $b$  intervient la monodromie de  $f$  en toute dimension, et pas seulement en dimension maximum. Par contre, dans le cas "local, singularité isolée en  $a$ " il est probable que tous les zéros de  $b_a$  soient obtenus par notre résultat ; dans le cas quasi-homogène, cela a été démontré par M. Kashiwara (non encore publié).

## 2. RAPPELS SUR LA MONODROMIE

Nous supposons dans la suite  $n \geq 1$ , le cas  $n = 0$  étant sans grand intérêt. Notons  $D$  un disque ouvert de centre  $O$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $X = f^{-1}(D) \subset \mathbb{C}^{n+1}$  et posons  $X(t) = f^{-1}(t)$ ,  $D^* = D - \{0\}$ ,  $X^* = X - X(0)$  ; si  $D$  est choisi de rayon  $r$  assez petit, on peut supposer que  $D^*$  ne contient pas de valeur critique de  $f$ , et même que  $f : X^* \rightarrow D^*$  est une fibration  $\mathbb{C}^\infty$  (le premier résultat, i.e. la version algébrique du théorème de Morse-Sard, est élémentaire ; le second, beaucoup plus fort, se démontre, en gros en plongeant la situation dans une situation où  $f$  soit propre, et en appliquant le théorème de Hironaka de résolution des singularités au diviseur à l'infini ; voir p. ex. Deligne [2], th. 6.13), quitte à remplacer  $f$  par  $(2r)^{-1}f$ , on peut supposer qu'on a  $r = 2$ .

Fixons  $t \in D$ , par exemple  $t = 1$  ; puisque  $X(1)$  est une variété algébrique affine non singulière de dimension  $n$ , les  $H_i(X(1); \mathbb{C})$  sont finis sur  $\mathbb{C}$ , et sont nuls pour  $i \geq n+1$ . Soit  $h$  l'automorphisme de monodromie de  $H_n(X(1), \mathbb{C})$ , i.e. l'action du générateur de  $\pi_1(D^*, 1)$  sur  $H_n(X(1), \mathbb{C})$ . D'après le "théorème de monodromie" (voir [4]), on a les résultats suivants :

- i) les valeurs propres de  $h$  sont des racines de l'unité.
- ii) Le polynôme minimal de  $h$  a au plus des zéros multiples d'ordre  $n+1$ .

Définissons maintenant "l'homologie bornée" et "l'homologie évanescen-  
te" de  $X(1)$  ; pour cela, nous aurons besoin du résultat suivant (H. Hamm,  
non publié) :

Soient  $R > 0$  ,  $0 < \rho < 2$  ; posons  $X_{R,\rho} = X \cap \{|x| < R\} \cap \{|f(x)| < \rho\}$  ,  
 $D_\rho = \{|t| < \rho\}$  et définissons comme ci-dessus  $X_R(t)$  ,  $X_{R,\rho}^*$  et  $D_\rho^*$  ; alors,  
pour tout  $R$  assez grand, il existe  $\rho$  tel que la projection  $f : X_{R,\rho}^* \rightarrow D_\rho^*$   
soit une fibration  $\mathbb{C}^\infty$  , et tel que  $X_R(0)$  soit rétracte par déformation de  
 $X_{R,\rho}$  .

Prenons alors  $\gamma \in H_n(X(1); \mathbb{C})$  ; le fait que  $f : X^* \rightarrow D^*$  soit une fibra-  
tion nous donne, par restriction à  $]0, 1]$  , une fibration triviale ; d'où, pour  
 $t \in ]0, 1]$  , une classe  $\gamma(t) \in H_n(X(t); \mathbb{C})$  bien déterminée. Nous dirons alors  
que  $\gamma$  est borné s'il existe  $R > 0$  tel que, pour  $t \in ]0, 1]$  , assez petit,  
 $\gamma(t)$  soit dans l'image de l'application  $i_* : H_n(X_R(t); \mathbb{C}) \rightarrow H_n(X(t); \mathbb{C})$  provenant  
de l'injection naturelle  $i : X_R(t) \rightarrow X(t)$  .

[A noter que  $i_*$  est injective ; en effet  $X_R(t)$  est "de Runge" dans  $X(t)$  ,  
et par suite, les formes holomorphes sur  $X(t)$  sont denses dans les formes ho-  
lomorphes sur  $X_R(t)$  ].

L'ensemble des  $\gamma \in H_n(X(1); \mathbb{C})$  bornés sera noté  $H_n^b(X(1); \mathbb{C})$  ; on  
définit alors l'homologie évanescente  $\tilde{H}_n(X(1); \mathbb{C})$  comme l'ensemble des  
 $\gamma \in H_n^b(X(1); \mathbb{C})$  qui possèdent la propriété suivante : soit  $R > 0$  tel que,  
pour tout  $t \in ]0, 1]$  , assez petit,  $\gamma(t)$  soit de la forme  $i_*^* \gamma_R(t)$  , avec  
 $\gamma_R(t) \in H_n(X_R(t); \mathbb{C})$  ; alors, pour  $t_0$  assez petit,  $\gamma_R(t_0)$  est "évanescent  
dans  $|X| < R$  " i.e. l'image de  $\gamma_R(t_0)$  dans  $H_n(X_{R,t_0}; \mathbb{C})$  est nulle.

Il est facile de voir que  $H_n^b$  et  $\tilde{H}_n$  sont stables par l'automorphis-  
me de monodromie  $h$  . Ceci étant, le théorème que nous nous proposons de  
démontrer est le suivant :

### Théorème (2.1)

Supposons que  $\lambda$  soit une valeur propre de la restriction  $\tilde{h}$  de  $h$   
à  $\tilde{H}_n(X(1); \mathbb{C})$  , et que la multiplicité de  $\lambda$  dans le polynôme minimal de  $\tilde{h}$   
soit égal à  $p$  ; il existe alors  $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{Q}$  , possédant les propriétés  
suivantes :

- i)  $\exp(2\pi i \mu_j) = \lambda$  , pour  $j = 1, \dots, p$   
 ii) le polynôme  $(s+\mu_1)\dots(s+\mu_p)$  divise  $\tilde{b}$  .

J'ignore si l'on peut toujours, dans cet énoncé, choisir  $\mu_1, \dots, \mu_p$  égaux, ou s'il existe des contre-exemples.

Exemple. Prenons  $f = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$  ; en choisissant  $P = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  ,  
 on trouve  $\tilde{b}(s) = s + \frac{n-1}{2}$  ; or, dans cet exemple, il est bien connu que  
 $H_n(X(1); \mathbb{C}) = \tilde{H}_n(X(1); \mathbb{C})$  est de dimension 1 sur  $\mathbb{C}$  , et qu'on a  $h = (-1)^{n-1}$  .

### 3. POLYNOMES DE BERNSTEIN ET PERIODES D'INTEGRALES

Avant d'établir le résultat annoncé, il nous faut rappeler la traduction du théorème de monodromie en termes de périodes d'intégrales. Choisissons une classe d'homologie  $\gamma(1) \in H_n(X(1); \mathbb{C})$  ; du fait que  $X^* \rightarrow D^*$  est une fibration, on en déduit naturellement une classe  $\gamma(t) \in H_n(X(t); \mathbb{C})$  , pour  $t$  voisin de 1 ; par prolongement, on obtient une fonction multi-forme (i.e. une fonction sur le revêtement universel de  $D^*$ ) ; suivant l'abus de notation usuel, nous la noterons encore  $\gamma(t)$  en précisant au besoin la détermination choisie de  $\log t$  . En mettant  $h$  (ou  $\tilde{h}$ ) sous forme de Jordan, il nous suffira d'examiner le cas où,  $\lambda$  étant une valeur propre de  $h$  , on a, pour un certain  $p \geq 1$  :  $(h-\lambda)^p \gamma(1) = 0$  ,  $(h-\lambda)^{p-1} \gamma(1) \neq 0$  .

Soit d'autre par  $\Omega^q$  l'espace des formes différentielles de degré  $q$  en  $dx_1, \dots, dx_{n+1}$  , à coefficients dans  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$  . Prenons  $\pi \in \Omega^n$  ; pour  $t \in D^*$  ,  $\pi|_{X(t)}$  est une forme holomorphe de degré maximum, donc fermée, et l'intégrale  $I(t) = \int_{\gamma(t)} \pi$  est donc bien définie. On a les propriétés suivantes :

- i)  $I(t)$  est une fonction holomorphe (multiforme) sur  $D^*$  et l'on a  
 $\frac{d}{dt} \int_{\gamma(t)} \pi = \int_{\gamma(t)} \frac{d\pi}{df}$  ,  $\frac{d\pi}{df}$  étant la forme relative usuelle

[élémentairement, on peut considérer que c'est la famille, paramétrée par  $t \in D^*$  , de formes sur  $X(t)$  , définie ainsi : sur

$\{\frac{\partial f}{\partial x_i} \neq 0\}$  ,  $\frac{d\pi}{df}(t)$  est la restriction à  $X(t)$  de

$(-1)^{i-1} (\frac{\partial f}{\partial x_i})^{-1} g dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_{n+1}$  , avec  $d\pi = g dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  ] .

ii) Il existe  $k > 0$  tel que, dans tout angle  $|\arg t| \leq C$  ( $C > 0$  quelconque), on ait  $\lim_{t \rightarrow 0} t^k I(t) = 0$ .

Ce résultat, dû à Deligne (voir [2] ou [4]) est la variante "affine" du théorème de régularité de Nilsson-Griffiths.

Dorénavant, nous considérerons seulement des  $\gamma$  bornés. Dans ce cas, nous avons besoin d'un renforcement du résultat précédent :

Proposition (3.1)

Supposons  $\gamma(1)$  borné ; alors, pour  $|\arg t| \leq C$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} I(t)$  existe ; de plus, si  $\gamma$  est évanescent, cette limite est nulle.

Cette proposition est démontrée en appendice.

Notons que l'action de  $h$  se traduit sur  $I$  par la substitution  $\log t \mapsto \log t + 2\pi i$  ; il résulte alors aisément de i), (3.1) et de la propriété :  $(h-\lambda)^p \gamma(1) = 0$  que  $I$  a la forme suivante, lorsque  $\gamma$  est évanescent :

$$I(t) = \sum_{\substack{\mu \in L(\lambda) \\ 0 \leq q \leq p-1}} c_{\mu,q} t^\mu (\log t)^q, \quad c_{\mu,q} = c_{\mu,q}(\pi) \in \mathbb{C},$$

$L(\lambda)$  désignant l'ensemble des  $\mu > 0$  tels qu'on ait  $\exp(2\pi i \mu) = \lambda$  ; et, puisque  $\lambda$  est une racine de l'unité, de tels  $\mu$  sont rationnels. Si  $\gamma$  n'est pas évanescent, on a nécessairement  $\lambda = 1$ , et  $I(t)$  a la même expression à un terme constant près.

D'autre part, il existe certainement un  $\pi \in \Omega^n$  et un  $\mu \in L(\lambda)$  tels qu'on ait  $c_{\mu,p-1}(\pi) \neq 0$  ; sinon, en posant  $\gamma'(1) = (h-\lambda)^{p-1} \gamma(1)$  on aurait, pour tout  $\pi \in \Omega^n$  :  $\int_{\gamma'(1)} \pi = 0$  ; or, d'après un théorème de Grothendieck (voir p. ex. [2]), les  $\pi|_{X(1)}$  engendrent  $H^n(X(1); \mathbb{C})$  ; on aurait donc alors  $\gamma'(1) = 0$ , contrairement à l'hypothèse.

Soit de même  $\omega \in \Omega^{n+1}$  ; en notant qu'il existe  $\pi \in \Omega^n$ , avec  $d\pi = \omega$ , et en utilisant la formule de dérivation i), on trouve :

$$(3.2) \quad \int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{df} = \sum_{\substack{\mu \in L(\lambda)-1 \\ 0 \leq q \leq p-1}} d_{\mu,q}(\omega) t^\mu (\log t)^q$$

et il existe un  $\omega$  et un  $\mu$  tels qu'on ait  $d_{\mu,p-1}(\omega) \neq 0$ .



Maintenant prenons un  $\gamma$  évanescant fixé, avec les propriétés indiquées. Posons, pour  $1 \leq k \leq p$  :

$$\mu_k = \inf\{\mu \in L(\lambda) - 1 ; \text{il existe } q \geq k-1 \text{ et } \omega \in \Omega^{n+1} \text{ avec } d_{\mu,q}(\omega) \neq 0\} .$$

Nous allons démontrer le résultat suivant, qui entraîne évidemment le théorème (2.1).

Proposition (3.3)

Le polynôme  $(s+\mu_1)\dots(s+\mu_p)$  divise  $\tilde{b}$  .

A) Démonstration dans le cas  $\lambda \neq 1$  .

Il suffit ici de démontrer que  $(s+\mu_1)\dots(s+\mu_p)$  divise  $b$  . Prenons une trivialisatoin de  $f^{-1}(]0,1])$  ; représentons  $\gamma(1)$  par un cycle singulier  $C^\infty$  de  $X(1)$ , soit  $\Gamma(1)$  ; et pour  $t \in ]0,1]$ , posons  $\Gamma(t,1) = \Gamma(1) \times [t,1]$  ; soit  $\omega \in \Omega^{n+1}$  ; pour tout  $s \in \mathbb{C}$ , on a (en choisissant par exemple  $\arg t = 0$ )

$$b(s) \int_{t_0}^1 t^{s-1} dt \int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{df} = b(s) \int_{\Gamma(t_0,1)} f^{s-1} \omega = \int_{\Gamma(t_0,1)} [P(s,x,D_x) f^s] \omega .$$

Désignons par  $P^*$  l'opérateur différentiel adjoint de  $P$ , opérant sur  $\Omega^{n+1}$  (en coordonnées, si  $P = \sum a_\alpha(s,x) D^\alpha$ ,  $D^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \dots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$ , et si  $\omega = g dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1}$ , on a  $P^* \omega = [\sum (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha g)] dx$ ); on a  $[P(s,x,D_x) f^s] \omega = f^s (P^* \omega) + d(f^s \omega_P)$ , avec  $P^* \omega \in \Omega^{n+1}[s]$ ,  $\omega_P \in \Omega^n[s]$ ; d'où, par Stokes

$$\int_{\Gamma(t_0,1)} (P f^s) \omega = \int_{\Gamma(t_0,1)} f^s P^* \omega + \int_{\gamma(1) - \gamma(t_0)} f^s \omega_P$$

et finalement,

$$(3.4) \quad b(s) \int_{t_0}^1 t^{s-1} dt \int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{df} = \int_{t_0}^1 t^s dt \int_{\gamma(t)} \frac{P^* \omega}{df} + \int_{\gamma(1)} \omega_P - t_0^s \int_{\gamma(t_0)} \omega_P .$$

Pour  $\text{Re } s$  assez grand (en utilisant la proposition (3.1), il suffit de prendre  $\text{Re } s > 1$ ), on peut passer à la limite dans tous les termes de cette égalité, pour  $t_0 \rightarrow 0$ ; on a alors :

$$(3.5) \quad b(s) \int_0^1 t^{s-1} dt \int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{df} = \int_0^1 t^s dt \int_{\gamma(t)} \frac{P^* \omega}{df} + \int_{\gamma(1)} \omega_P .$$

Supposons qu'on ait  $\mu_1 = \dots = \mu_k < \mu_{k+1}$ , et choisissons  $\omega$  tel qu'on ait, dans (3.2) :  $d_{\mu_1, k-1}(\omega) \neq 0$ . D'après (3.2) et la formule

$$\int_0^1 t^{\mu+s-1} (\log t)^k dt = \frac{d^k}{ds^k} \cdot \frac{1}{\mu+s}, \quad \text{l'intégrale } \int_0^1 t^{s-1} dt \int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{df} \quad (\operatorname{Re} s > 1) \text{ se}$$

prolonge en une fonction méromorphe de  $s \in \mathbb{C}$ , ayant en  $-\mu_1$  un pôle d'ordre  $k$ ; de même,  $\int_0^1 t^s dt \int_{\gamma(t)} \frac{P^*\omega}{df}$  se prolonge en une fonction méromorphe de  $s \in \mathbb{C}$ , qui n'a pas de pôle en  $-\mu_1$ ; enfin  $\int_{\gamma(1)} \omega_P$  est un polynôme en  $s$ ; l'égalité (3.5) implique que  $-\mu_1$  soit un zéro d'ordre  $k$  de  $b$ ; on traite de la même manière  $\mu_{k+1}, \dots, \mu_p$  (nous laissons les détails au lecteur). Ceci démontre le résultat cherché.

B) Le cas  $\lambda = 1$ .

La méthode est analogue, mais il faut faire un peu plus attention (la démonstration précédente montrerait seulement que  $(s+\mu_1)\dots(s+\mu_p)$  divise  $b = \tilde{s}\tilde{b}$ , et l'on risque de "perdre" une racine de  $\tilde{b}$ ).

Tout d'abord, en faisant  $s = 0$  dans l'égalité  $P(s, x, D_x) f^s = b(s) f^{s-1}$  on trouve  $b(0) = 0$ , d'où  $b(s) = \tilde{s}\tilde{b}(s)$ , comme on l'a déjà vu; d'où aussi  $P(0, x, D_x) 1 = 0$ ; par suite, on a :  $P(s, x, D_x) = sQ(s, x, D_x) + \sum R_i(x, D_x) \frac{\partial}{\partial x_i}$  et, en appliquant cette égalité à  $f^s$ , on trouve

$$Q(s, x, D_x) f^s + \sum R_i(x, D_x) \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} f^{s-1} \right] = \tilde{b}(s) f^{s-1}.$$

Prenons  $\omega \in \Omega^{n+1}$ ; un calcul analogue à celui qui mène à (3.5) donne alors, pour  $\operatorname{Re} s > 1$  :

$$\tilde{b}(s) \int_0^1 t^{s-1} dt \int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{df} = \int_0^1 t^s dt \int_{\gamma(t)} \frac{Q^*\omega}{df} + \int_0^1 t^{s-1} dt \int_{\gamma(t)} \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{R_i^*\omega}{df} + \int_{\gamma(1)} \omega_P$$

avec  $P^*\omega \in \Omega^{n+1}[s]$ ,  $R_i^*\omega \in \Omega^{n+1}$ ,  $\omega_P \in \Omega^n[s]$ . On transforme le second terme du second membre, en observant que  $\pi = \sum \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \lrcorner R_i^*\omega \in \Omega^n$

( $\lrcorner$ , le produit intérieur) est égal, en tant que forme relative, à

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{R_i^*\omega}{df}.$$

Supposons encore qu'on ait  $\mu_1 = \dots = \mu_k < \mu_{k+1}$ , et prenons  $\omega$  tel qu'on ait  $d_{\mu_1, k-1}(\omega) \neq 0$ ; comment en A), on voit que le prolongement analytique de  $s \mapsto \int_0^1 t^{s-1} dt \int_{\gamma(t)} \frac{\omega}{df}$  a un pôle d'ordre  $k$  en  $-\mu_1$ , et que le premier et le troisième terme du second membre n'ont pas de pôle en

reste à montrer que  $\int_0^1 t^{s-1} dt \int_{\gamma(t)} \pi$  n'a pas de pôle en  $-\mu_1$  ; pour établir cela, il suffit de montrer que, dans le développement  $\int_{\gamma(t)} \pi = \sum c_{\mu,q} t^\mu (\log t)^q$ , on a  $c_{\mu,q} = 0$  pour  $\mu \leq \mu_1$  ; or, si on avait, pour un tel  $q$  :  $c_{\mu,q} \neq 0$ , en utilisant le fait qu'on a  $\mu > 0$  d'après (3.1) et en appliquant la formule  $\frac{d}{dt} \int_{\gamma(t)} \pi = \int_{\gamma(t)} \frac{d\pi}{df}$ , on trouverait  $d_{\mu-1,q}(d\pi) \neq 0$  contrairement à la définition de  $\mu_1$ . Cela montre bien que  $-\mu_1$  est zéro d'ordre  $k$  de  $\tilde{b}$  ; comme en A), nous laissons le lecteur adapter le raisonnement à  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_p$ . Ceci termine la démonstration.

#### 4. APPENDICE : DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION (3.1)

Choisissons  $\mu_0$  tel qu'on ait  $\exp(2\pi i \mu_0) = \lambda$  ; de  $(h-\lambda)^p \gamma(1) = 0$ , on déduit facilement que  $I(t) = \int_{\gamma(t)} \pi$  a la forme suivante :

$$I(t) = \sum_{0 \leq q \leq p-1} g_k(t) t^{\mu_0} (\log t)^q, \text{ avec } g_k \text{ holomorphe dans } D^* ;$$

le "théorème de régularité" montre alors que les  $g_k$  sont méromorphes en 0. De là, résulte facilement, que, pour démontrer (3.1), il suffit d'établir ceci :

Sur toute demi-droite issue de l'origine (plus précisément, pour  $\arg t$  fixé),  $I(t)$  a une limite pour  $t \rightarrow 0$  ; de plus, si  $\gamma$  est évanescent, cette limite est nulle.

Pour fixer les idées, supposons  $\arg t = 0$ . Les arguments de rétraction par déformation considérés au paragraphe 2 montrent qu'il existe  $\gamma(0) \in H_n(X(0), \mathbb{C})$  tel que  $\gamma(1)$  et  $\gamma(0)$  soient homologues en tant que cycles de  $f^{-1}([0,1])$ . Choisissons alors, d'après Łojasiewicz [5], une triangulation semi-analytique  $K$  de  $f^{-1}([0,1])$ , telle que  $X(0)$  et  $X(1)$  soient des sous-complexes  $K(0)$  et  $K(1)$  de cette triangulation, et choisissons  $\Gamma(1)$  et  $\Gamma(0)$ , cycles simpliciaux de  $K(1)$  et  $K(0)$  qui représentent respectivement  $\gamma(1)$  et  $\gamma(0)$  ; soit  $\Delta$  une chaîne simpliciale de  $K$  telle qu'on ait  $\partial\Delta = \Gamma(1) - \Gamma(0)$ . D'après Herrera [6], on sait que les intégrales  $\int_{\Gamma(1)} \pi$ ,  $\int_{\Gamma(0)} \pi$ ,  $\int_{\Delta} d\pi$  ont un sens (i.e. sont des intégrales de fonctions intégrables), et qu'on a  $\int_{\gamma(1)} \pi = \int_{\Gamma(1)} \pi = \int_{\Gamma(0)} \pi + \int_{\Delta} d\pi$ .

Posons  $\Delta(t) = \Delta \cap f^{-1}([0, t[)$ , pour  $0 < t < 1$  ; pour  $t$  fixé, on peut supposer, quitte à raffiner la triangulation considérée, que  $X(t)$  est un sous-complexe semi-analytique de  $K$  ; alors,  $\Delta - \Delta(t)$  est une chaîne de  $f^{-1}([t, 1])$ , dont le bord est égal à  $\Gamma(1) - \Gamma(t)$ ,  $\Gamma(t)$  un cycle porté par  $X(t)$  ; on en déduit immédiatement que la classe de  $\Gamma(t)$  dans  $H_n(X(t), \mathbb{C})$  est égale à  $\gamma(t)$  ; en appliquant à nouveau la formule de Stokes-Herrera, on en déduit qu'on a  $\int_{\gamma(1)} \omega - \int_{\gamma(t)} \omega = \int_{\Delta - \Delta(t)} d\pi$  ; d'où  $\int_{\gamma(t)} \pi = \int_{\Gamma(0)} \pi + \int_{\Delta(t)} d\pi$ .

Posons  $\Delta(0) = \Delta \cap X(0)$  ; d'après les théorèmes classiques de la théorie de l'intégration, on a  $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Delta(t)} d\pi = \int_{\Delta(0)} d\pi$  ; or, cette dernière intégrale est nulle puisque la restriction de  $d\pi$  à  $X(0)$  est nulle ; on a donc  $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \arg t = 0}} I(t) = \int_{\Gamma(0)} \pi$ .

Enfin, si  $\gamma$  est évanescent,  $\Gamma(0)$  est homologue à zéro dans  $X(0)$  ; on peut alors supposer qu'on a même  $\Gamma(0) = 0$  ; donc on a  $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \arg t = 0}} I(t) = 0$ . Ceci achève la démonstration.

Dans le cas "local, singularité isolée", le résultat précédent peut être utilisé pour redémontrer le théorème de régularité, et un résultat de M. Sebastiani (voir [6] ; le raisonnement précédent est d'ailleurs inspiré de celui de Sebastiani [8]).

-----

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] - I.N. BERNSTEIN - Prolongement analytiques des fonctions généralisées avec paramètre (en russe). Funktsional'ny Analiz 6.4 (1972), pp. 26-40.
- [2] - P. DELIGNE - Equations différentielles à points singuliers réguliers. Lecture Notes in Mathematics, n° 163, Springer-Verlag (1970).
- [3] - M. HERRERA - Intégration on a semi-analytic set. Bull. Soc. Math. France, 94 (1966), pp. 141-180.
- [4] - N.M. KATZ - Nilpotent connections and the monodromy theorem : applications of a result of Turrutin. Public. Math. I.H.E.S. 39 (1972) pp. 355-412.
- [5] - S. LOJASIEWICZ - Triangulation of semi-analytic sets. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 3-18 (1964), pp. 449-474.
- [6] - B. MALGRANGE - Intégrales asymptotiques et monodromie. Séminaire J. Leray 1972-73 (à paraître).
- [7] - M. SATO and T. SHINTANI - On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces. Proc. Nat. Ac. Sc. USA 69-5 (1972)
- [8] - M. SEBASTIANI - Preuve d'une conjecture de Brieskorn. Man. Math. 2 (1970) pp. 301-308.
- [9] - T. SHINTANI - On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms, J. Math. Soc. Japan 24-1 (1972) pp. 132-188.